



10. Kocić Lj. M., Della Veccia B. Degeneracy of positive linear operators. *Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics*, 1998, vol. 13, pp. 59–72.
11. Petukhova N. Yu., Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Svoistvo skleivaniia polinomov Bernshteina dlia kusochno-lineinykh nepreryvnykh funktsii [Gluing property of Bernstein polynomials for piecewise linear continuous functions]. *Matematika, informatika, fizika v nauke i obrazovanii. Sbornik nauchnykh trudov k 140-letiyu MPGU*. Moscow, Prometei, 2012, pp. 81–82 (in Russian).
12. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulia polinomami Bernshteina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
13. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 1954, vol. 21, no. 3, pp. 527–531. DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02152-3.
14. Aramă O. Roprietați privind monotonia șirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein și aplicarea lor la studiul aproximării funcțiilor. *Studii și cercetări de Matematică (Cluj)*, 1957, vol. 8, no. 3–4, pp. 195–210.

УДК 517.518

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ p -ВАРИАЦИИ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

А. А. Тюленева

Тюленева Анна Анатольевна, аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anantuleneva@mail.ru

В настоящей статье мы изучаем средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $S_k(f)$ есть k -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье. Для p -абсолютно непрерывных функций ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) мы рассматриваем их приближения средними Эйлера в равномерной и C_p -метрике в терминах модулей непрерывности $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, и наилучших приближений тригонометрическими полиномами $E_n(f)_{C_p}$. Можно отметить следующее неравенство разных метрик из теоремы 2:

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является точным. Доказано также следующее обобщение результата Ч. Чуи и А. Холланда.

Если ω является модулем непрерывности на $[0, \pi]$, таким что $\delta \int_{\delta}^{\pi} t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ удовлетворяет двум свойствам: 1) $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1} \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+2\pi/(n+1))\|_{C_p} dt = O(\omega(1/n))$, где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Даны также некоторые приложения к приближениям в метриках типа Гельдера.

Ключевые слова: функции ограниченной p -вариации, p -абсолютно непрерывные функции, средние Эйлера, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-300-309

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая ограниченная 2π -периодическая функция и $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем p -вариационную сумму:

$$\mathcal{W}_{\xi}^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p}$$



по разбиению ξ от функции f и p -вариационные модули непрерывности (см. [1]):

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup_{|\xi| \leq \delta} \mathcal{W}_\xi^p(f), \quad |\xi| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}), \quad \delta \in [0, 2\pi],$$

$$\omega_{k-1/p}(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1} f(x), h), \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2, \quad \delta \in [0, 2\pi].$$

Здесь $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$, $k \in \mathbb{N}$. Пространство C_p функций f , удовлетворяющих равенству $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega_{1-1/p}(f, \delta) = 0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p} = \max(\|f\|_\infty, \omega_{1-1/p}(f, 2\pi))$, где $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Можно рассматривать также обычный модуль непрерывности целого порядка $k \in \mathbb{N}$: $\omega_k(f, \delta)_{C_p} = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{C_p}$ и $\omega_k(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_\infty$. Известно, что $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \leq 2\omega_{k-1/p}(f, \delta)$ (см. [1]).

Пусть $T_n = \{\alpha_0 + \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix), \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f)_{C_p} := \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{C_p}$. Пространство интегрируемых на $[0, 2\pi]$ в p -й степени, по Лебегу, 2π -периодических функций $L_{2\pi}^p$ снабжено нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$. Далее будет также использоваться пространство $C_{2\pi}$ непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Сверткой двух функций $f, g \in L_{2\pi}^1$ называется функция $f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt \in L_{2\pi}^1$. Известно, что $S_n(f)(x) = \pi^{-1} f * D_n(x)$, где $D_n(x) = \sin(n+1/2)x / (2 \sin x/2)$. Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ определим $E_{C_p}(\varepsilon) = \{f \in C_p : E_n(f)_{C_p} \leq \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\omega(\delta)$ возрастает, непрерывна на $[0, 2\pi]$ и $\omega(0) = 0$ ($\omega \in \Omega$). Тогда будем писать $\omega \in N^\alpha$, $\alpha > 0$, если для $0 < \delta < \eta \leq 2\pi$ имеем $\omega(\eta) \leq C(\eta/\delta)^\alpha \omega(\delta)$, соответственно $\omega \in B$, если $\sum_{i=n}^\infty i^{-1} \omega(i^{-1}) = O(\omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$, и $\omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, если $\sum_{i=1}^n i^{\alpha-1} \omega(i^{-1}) = O(n^\alpha \omega(n^{-1}))$, $n \in \mathbb{N}$. По поводу этих определений см. [2].

Пусть $S_k(f)(x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}^1$ порядка $k \in \mathbb{Z}_+$. Будем рассматривать средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Подробнее об этих методах суммирования см. [3]. Далее будем использовать обозначения ($q \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$)

$$\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad e(n, q, t) = (1+q)^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{\sin(k+1/2)t}{2 \sin t/2}.$$

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. Пусть $f \in C_p$, $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы прямая и обратная теоремы приближения

$$E_n(f)_{C_p} \leq C \omega_k(f, 1/(n+1))_{C_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

$$\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq C n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Лемма 1 доказывается аналогично доказательству прямой и обратной теорем приближения в пространствах $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$, в которых верны неравенства (1) и (2) с заменой C_p на $L_{2\pi}^p$ или $C_{2\pi}$ (см. [4, гл. 5] и [6]).

Лемма 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in C_p$, $g \in L_{2\pi}^1$. Тогда $f * g \in C_p$ и

$$\omega_{1-1/p}(f * g, \delta) \leq \omega_{1-1/p}(f, \delta) \|g\|_1, \quad \delta \in [0, 2\pi],$$

Как следствие, $\|f * g\|_{C_p} \leq \|f\|_{C_p} \|g\|_1$.



Первое утверждение леммы 2 доказано Б. И. Голубовым [5] для $\delta = 2\pi$. Его доказательство переносится на случай $\delta \in [0, 2\pi]$. Второе утверждение леммы вытекает из первого и определения нормы в C_p .

Следствие. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. Тогда

$$\|f - S_n(f)\|_{C_p} \leq C \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Пусть $t_n \in T_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{C_p} = E_n(f)_{C_p}$. Используя соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\|_1 / \ln n = 4/\pi$ (см. [6, гл. 2, формула (12.1)]) и лемму 2, получаем:

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{C_p} &\leq \|f - t_n\|_{C_p} + \|t_n - S_n(t_n)\|_{C_p} + \|D_n * (t_n - f)\|_{C_p} \leq \\ &\leq (1 + \|D_n\|_1) \|f - t_n\|_{C_p} \leq C_1 \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \in N^k$, $\omega_{k-1/p}(f, \delta) \in N^{k-1/p}$ и класс N^α , $\alpha > 0$, содержится в любом классе S^β при $\beta > \alpha$.

Первое утверждение леммы 3 хорошо известно (см. [4, гл. 3]), второе утверждение приведено с доказательством в [7] и третье утверждение легко следует из леммы 3 известной статьи Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [2] (см. также лемму 8).

Лемма 4. Пусть $(a_n)_{n=1}^\infty$ убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари $\sum_{k=n}^\infty a_k/k = O(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и функция $f(x)$ задается равенством $f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx/n$. Тогда $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, и $E_n(f)_{C_p} \leq C a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичное утверждение верно в $C_{2\pi}$.

Результат леммы 4 выводится из двух утверждений Б. И. Голубова [5] (подробнее см. в [8]).

Лемма 5. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. Тогда $\|f - S_n(f)\|_\infty \leq C E_n(f)_{C_p}$ и $\|S_n(f)\|_\infty \leq C \|f\|_{C_p}$, где C не зависит от $n \in \mathbb{Z}_+$ и f .

Лемма 5 установлена в [1].

Лемма 6. Для ядра $e(n, q, t)$ справедливы следующие соотношения:

- 1) $|e(n, q, t)| \leq Cn$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi/n]$;
- 2) $e(n, q, t) = \left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1} \right)^{n/2} \frac{\sin(n\Theta_t + t/2)}{2 \sin t/2}$, $0 < |t| < \pi$, где $\Theta_t \in (-\pi, \pi)$ однозначно определяется из условий $\sin \Theta_t = q \sin(t - \Theta_t)$, $\text{sgn}(\Theta_t) = \text{sgn}(t)$, $|\Theta_t| < |t| \leq \pi$;
- 3) $|e(n, q, t)| \leq Ct^{-1} \exp\left(\frac{-2nqt^2}{(1+q)^2\pi^2}\right)$, $0 < |t| < \pi$;
- 4) $|e(n, q, t)| \leq Cn^{1/2}t^{-2}$, $0 < |t| < \pi$.

Доказательство. 1. Для $t \in [0, 2\pi/n] \subset [0, \pi/2]$ и $0 \leq k \leq n$ имеем:

$$\sin t/2 \geq t/\pi \quad \text{и} \quad |\sin(k+1/2)t| \leq (k+1/2)t \leq (n+1/2)t \leq \frac{3}{2}nt.$$

Поэтому

$$|e(n, q, t)| \leq (1+q)^{-n} \frac{3\pi}{4t} nt \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \leq \frac{3\pi}{4} n.$$

Для $n \leq 3$ неравенство очевидно.

2. Равенство установлено в работе [9].

3. Как и в части 1, имеем неравенство $|1/(2 \sin t/2)| \geq \pi/(2|t|)$, кроме того, используем очевидную оценку $|\sin(n\Theta_t + t/2)| \leq 1$. С другой стороны,

$$\left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1} \right)^{n/2} = \left(1 - \frac{4q \sin^2 t/2}{(q+1)^2} \right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln \left(1 - \frac{4q \sin^2 t/2}{(q+1)^2} \right) \right).$$



При $0 < |t| < \pi$ справедливо неравенство $0 < 4q \sin^2 t/2/(q+1)^2 < 1$, кроме того, при $y \in [0, 1)$ имеем $\ln(1-y) \leq -y$. Используя неравенства выше вместе с неравенством $\sin^2 t/2 \geq (t/\pi)^2$, $0 < |t| < \pi$, мы находим, что

$$\left(\frac{q^2 + 2q \cos t + 1}{q^2 + 2q + 1}\right)^{n/2} \leq \exp\left(\frac{-2nqt^2}{(q+1)^2\pi^2}\right).$$

Объединяя полученные оценки, находим, что справедливо утверждение 3).

4. Так как при $y \geq 0$ имеем $e^y \geq 1 + y \geq 2y^{1/2}$, то в силу 3) верно

$$|e(n, q, t)| \leq \frac{\pi (q+1)\pi}{2t (2nq)^{1/2}t} = \frac{C_1}{n^{1/2}t^2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $q > 0$. Тогда существует постоянная C , зависящая от l и q , но не от n , для которой выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)^l} \leq \frac{C(q+1)^n}{(n+1)^l}.$$

Доказательство. Так как $(k+m)/(k+1) \leq m$ при $k \geq 0$ и $m \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)^l} &\leq l! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} = \\ &= l! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{l-1}} u^k du dt_1 \dots dt_{l-1} = \\ &= l! \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{l-1}} (q+u)^n du dt_1 \dots dt_{l-1} < \frac{l!(q+1)^{n+l}}{(n+1)\dots(n+l)} \leq \frac{C_1(q+1)^n}{(n+1)^l}, \end{aligned}$$

где $C_1 = l!(q+1)^l$. Лемма доказана.

Функция $g(t)$ почти убывает на промежутке P , если из $t_1, t_2 \in P$, $t_1 < t_2$, следует, что $f(t_2) \leq Cf(t_1)$, где C не зависит от t_1, t_2 .

Лемма 8 (см. [2]). Условие $\omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, равносильно условию почти убывания функции $\varphi(t)/t^{\alpha-\beta}$ на $(0, \pi]$ для некоторого $\beta \in (0, \alpha)$.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq C \ln(n+2) \omega_k(f, 1/n)_{C_p}, \\ \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq C \ln(n+2) n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} E_{i-1}(f)_{C_p}. \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем по определению, следствию и лемме 1

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &= \left\| (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} (f - S_j(f)) \right\|_{C_p} \leq \\ &\leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \ln(j+2) E_j(f)_{C_p} \leq \frac{C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \omega_k\left(f, \frac{1}{j+1}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Из первого утверждения леммы 3 стандартным образом вытекает неравенство

$$\omega_k(f, \lambda\delta)_{C_p} \leq (\lambda+1)^k \omega_k(f, \delta)_{C_p}.$$

Поэтому в силу леммы 7 получаем:

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_{C_p} &\leq \frac{C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \left(\frac{n+1}{j+1} + 1\right)^k \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \leq \\ &\leq \frac{2^{k+1} C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} (n+1)^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leq C_2 \ln(n+2) \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Применяя второе неравенство леммы 1, получаем второе неравенство теоремы. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $1 \leq p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы неравенства

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leq C_2 \omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leq 2C_2 \omega_{k-1/p}(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Доказательство. По лемме 5 получаем:

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \|f - S_j(f)\|_\infty \leq C_3 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p},$$

что доказывает (3). Здесь C_3 — константа из первого неравенства леммы 5. Применяя (3), леммы 1 и 7, аналогично доказательству теоремы 1 имеем:

$$\begin{aligned} \|f - e_n^q(f)\|_\infty &\leq C_4 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \omega_k\left(f, \frac{1}{j+1}\right)_{C_p} \leq \\ &\leq C_5 (1+q)^{-n} (n+1)^k \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leq C_6 \omega_k\left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в (4) вытекает из только что доказанного и [1, п. 2.2]. Теорема доказана.

Докажем неулучшаемость неравенства (3).

Теорема 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ убывает к нулю, $\varepsilon_k \leq C\varepsilon_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, и $\sum_{k=n}^\infty \varepsilon_k / (k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_\infty \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Доказательство. Оценка сверху в (5) вытекает из (3). Для доказательства оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k \cos kx/k$. По лемме 4 имеем $E_j(f_0)_{C_p} \leq C_1 \varepsilon_{j+1} \leq C_1 \varepsilon_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, т.е. $f_0/C_1 \in E_{C_p}(\varepsilon)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_0 - e_n^q(f_0)\|_\infty &\leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \|f_0 - S_j(f_0)\|_\infty \leq \\ &\leq (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{k} := (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} A_{j+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Но

$$f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} (f_0(0) - S_j(f_0)(0)) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

В силу (6) и последнего равенства получаем:

$$\|f_0 - e_n^q(f_0)\|_\infty = f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{k} +$$



$$+(1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^n \frac{\varepsilon_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} + (1+q)^{-n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} q^{n-j} \right) \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Пусть $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/k$ (см. (6)), $n \in \mathbb{N}$, и $B_k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} q^{n-j}$, $1 \leq k \leq n+1$, $B_0 = 0$. Тогда в силу условия находим, что

$$\begin{aligned} (1+q)^n \|f_0 - e_n^q(f_0)\|_{\infty} &= (1+q)^n A_{n+1} + \sum_{k=1}^n B_k (A_k - A_{k+1}) = \\ &= A_{n+1} B_{n+1} + \sum_{k=1}^n A_k (B_k - B_{k-1}) - B_n A_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} A_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} q^{n-k+1} A_k \geq \\ &\geq C_2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} q^{n-k+1} \varepsilon_k = C_2 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_{j+1} \geq C_3 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j. \end{aligned} \tag{7}$$

Для f_0/C_1 также верно (7) с константой C_3/C_1 . Теорема доказана.

Для случая $q = 1$ сформулируем и докажем теорему, обобщающую результат К. Чуи (С. К. Chui) и А. Холланда (А. S. B. Holland) [9].

Теорема 4. Пусть $\omega \in S^1$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ такова, что $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$ и, кроме того,

$$\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + 2\pi/(n+1))\|_{C_p}}{t} dt = O(\omega(1/n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. При $q = 1$ справедливо равенство $\sin \Theta_t = \sin(t - \Theta_t)$ (см. лемму 6)) и при $0 \leq \Theta_t \leq t$ мы имеем $\Theta_t = t/2$, поэтому $e(n, 1, t) = \cos^n(t/2) \sin[(n+1)t/2]/(2 \sin t/2)$. Пусть $a_n = 2\pi/(n+1)$, $b_n = 2\pi/(n+1)^\beta$, где $1/2 > \beta > \alpha/(\alpha+1)$ и $\alpha \in (0, 1)$ — число такое, что функция $\varphi(t)/t^\alpha$ почти убывает на $(0, \pi)$ (такое α существует по лемме 8). Тогда верно равенство $\sin(n+1)(t+a_n)/2 = -\sin(n+1)t/2$, что будет использовано далее. Пусть n достаточно велико так, что $b_n \leq \pi/2$. Запишем:

$$e_n^1(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi_x(t) e(n, 1, t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{a_n} + \frac{1}{\pi} \int_{a_n}^{b_n} + \frac{1}{\pi} \int_{b_n}^{\pi} = I_1 + I_2 + I_3.$$

В силу утверждения 1) леммы 6, леммы 3 и обобщенного неравенства Минковского в C_p (см. [5])

$$\|I_1\|_{C_p} \leq C_1 \int_0^{a_n} \omega_2(f, t)_{C_p} n dt \leq C_2 \omega_2(f, 1/n)_{C_p} \leq C_3 \omega(1/n), \tag{8}$$

а благодаря утверждению 3) леммы 6 находим, что

$$\begin{aligned} \|I_3\|_{C_p} &\leq C_4 \int_{b_n}^{\pi} b_n^{-1} \omega_2(f, t)_{C_p} \exp\left(-\frac{nt^2}{2\pi^2}\right) dt \leq \\ &\leq C_4 \int_{b_n}^{\pi} n^\beta \omega_2(f, t)_{C_p} \exp(-C_5 n^{1-2\beta}) dt \leq C_6 n^{\beta+2} \omega_2(f, 1/n) \exp(-C_5 n^{1-2\beta}) \leq C_7 \omega(1/n), \end{aligned} \tag{9}$$

так как $1 - 2\beta > 0$ и любая степень растет медленнее экспоненты. В (8) и (9) также использовалось неравенство $\omega_2(f, \lambda\delta)_{C_p} \leq (2\lambda)^2 \omega_2(f, \delta)_{C_p}$, $\lambda \geq 1$, по сути содержащееся в первом утверждении леммы 3. Для I_2 запишем:

$$\begin{aligned} 4\pi I_2 &= 2 \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt - \\ &- \int_0^{b_n - a_n} \frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin(t+a_n)/2} \cos^n \frac{t+a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)}{\sin t/2} \cos^n \frac{t}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin t/2} \left[\cos^n \frac{t}{2} - \cos^n \frac{t + a_n}{2} \right] \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{a_n}^{b_n} \varphi_x(t + a_n) \cos^n \frac{t + a_n}{2} \left[\frac{1}{\sin t/2} - \frac{1}{\sin(t + a_n)/2} \right] \sin \frac{n+1}{2} t dt - \\
 &- \int_0^{a_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin(t + a_n)/2} \cos^n \frac{t + a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt + \\
 &+ \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t + a_n)}{\sin(t + a_n)/2} \cos^n \frac{t + a_n}{2} \sin \frac{n+1}{2} t dt = I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} + I_{25}.
 \end{aligned}$$

В силу условия теоремы

$$\|I_{21}\|_{C_p} \leq \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{\sin t/2} dt \leq \pi \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{t} dt \leq C_8 \omega(1/n). \quad (10)$$

По теореме Лагранжа

$$|\cos^n t/2 - \cos^n(t + a_n)/2| = |n \cos^{n-1} z_n(t) \sin z_n(t) a_n/2| \leq \pi n t \frac{1}{n+1} \leq \pi t,$$

где $t/2 < z_n(t) < (t + a_n)/2 \leq t$ для $t \in [a_n, b_n]$. Поэтому в силу определения b_n

$$\begin{aligned}
 \|I_{22}\|_{C_p} &\leq \pi^2 \int_{a_n}^{b_n} \frac{\|\varphi_x(t + a_n)\|_{C_p}}{t} t dt \leq \pi^2 \int_0^{b_n} \omega_2(f, 2b_n)_{C_p} dt \leq \\
 &\leq C_9 n^{-\beta} \omega(n^{-\beta}) \leq C_{10} \omega(n^{-1}).
 \end{aligned} \quad (11)$$

В самом деле, по выбору $\beta > \alpha/(\alpha + 1)$ (см. начало доказательства) получаем:

$$n^{-\beta} \omega(n^{-\beta}) \leq n^{-\beta} C_{11} (n^{-\beta}/n^{-1})^\alpha \omega(n^{-1}) = C_{11} n^{\alpha - (\alpha+1)\beta} \omega(n^{-1}) \leq C_{11} \omega(n^{-1}).$$

Далее, так как $a_n \leq t \leq b_n \leq \pi/2$, то по лемме 8 выполняются неравенства

$$|\sin^{-1}(t/2) - \sin^{-1}((t + a_n)/2)| \leq \frac{a_n \pi^2}{2t(t + a_n)} \quad \text{и} \quad \omega(a_n + t) \leq C_{11} ((a_n + t)/a_n)^\alpha \omega(a_n),$$

поэтому с помощью замены $t = a_n y$ имеем:

$$\begin{aligned}
 \|I_{23}\|_{C_p} &\leq C_{12} a_n \int_{a_n}^{b_n} \frac{\omega_2(f, t + a_n)}{t(t + a_n)} dt \leq C_{13} a_n^{(1-\alpha)} \omega(a_n) \int_{a_n}^{\infty} \frac{dt}{t(t + a_n)^{1-\alpha}} = \\
 &= C_{13} \frac{a_n^{1-\alpha} \omega(a_n)}{a_n^{1-\alpha}} \int_1^{\infty} \frac{dy}{y(1+y)^{1-\alpha}} = C_{14} \omega(a_n) \leq C_{15} \omega(1/n).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Для оценки I_{24} используем неравенства $|\sin t| \leq |t|$ и $\sin(t + a_n)/2 \geq \sin a_n/2 \geq a_n/\pi$. В результате находим, что

$$\|I_{24}\|_{C_p} \leq \pi \int_{a_n}^{2a_n} \frac{\omega_2(f, t)_{C_p}}{a_n} \frac{n+1}{2} a_n dt \leq C_{16} a_n n \omega_2(f, 2a_n)_{C_p} \leq C_{17} \omega(1/n). \quad (13)$$

Наконец, снова по лемме 8 в силу неравенства $\alpha - 1 < 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
 \|I_{25}\|_{C_p} &\leq \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{\pi \omega_2(f, t + a_n)_{C_p}}{t + a_n} dt \leq C_{18} \omega(a_n) \int_{b_n - a_n}^{b_n} \frac{(t + a_n)^{\alpha-1}}{a_n^\alpha} dt \leq \\
 &\leq C_{18} \omega(a_n) a_n^{1-\alpha} (b_n + a_n)^{\alpha-1} \leq C_{18} \omega(a_n),
 \end{aligned} \quad (14)$$

так как $(a_n/(b_n + a_n))^{1-\alpha} \leq 1$. Объединяя оценки (8)–(14), завершаем доказательство теоремы.



Замечание. Если $\omega \in S^1$, то условия $\omega_1(f, \delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0, \pi]$, и $\omega_2(f, \delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0, \pi]$, равносильны, т.е. использование модуля непрерывности второго порядка не дает в теореме 4 никакого преимущества.

С помощью теорем 1 и 2 получим оценку приближения средними Эйлера в гёльдеровых метриках. Пусть $\omega \in \Omega$, $f \in C_{2\pi}$ и $\|f\|_{\omega, k, \infty} := \|f\|_{\infty} + \sup_{0 < \delta \leq 2\pi} \omega_k(f, \delta)_{\infty} / \omega(\delta) < \infty$. Множество всех таких функций обозначим через $H_{k, \infty}^{\omega}$. Это пространство является банаховым с нормой $\|\cdot\|_{\omega, k, \infty}$. Аналогично определяется пространство H_{k, C_p}^{ω} с нормой $\|\cdot\|_{\omega, k, C_p}$.

Теорема 5. Пусть ω, φ положительны на $(0, 2\pi]$ и $\omega, \varphi \in \Omega$, причем функция $\eta(t) = \omega(t)/\varphi(t)$ возрастает на $(0, 2\pi]$. Если $\omega \in S^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $f \in H_{k, C_p}^{\omega}$, то

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\varphi, k, \infty} \leq C\eta(1/n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (15)$$

и если последовательность $\{\eta(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает к нулю, то

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\varphi, k, C_p} \leq C\eta(1/n) \ln(n+2), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

Доказательство. По теореме 2 имеем неравенство

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n) \leq C_1\varphi(2\pi)\eta(1/n). \quad (17)$$

Пусть $\delta \geq 1/n$. Тогда

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{2^k \|f - e_n^q(f)\|_{\infty}}{\varphi(1/n)} \leq \frac{2^k C_1 \omega(1/n)}{\varphi(1/n)} = 2^k C_1 \eta(1/n), \quad (18)$$

Так как $e_n^q(f)$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше n , то

$$E_n(f)_{\infty} = E_n(f - e_n^q(f))_{\infty} \leq \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что при $k \geq n$ верно

$$E_k(f - e_n^q(f))_{\infty} = E_k(f)_{\infty} \leq C_1\omega(1/k),$$

а при $k < n$ справедливо неравенство

$$E_k(f - e_n^q(f))_{\infty} \leq \|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leq C_1\omega(1/n) \leq C_1\omega(1/k).$$

Так как $\omega \in S^k$, по лемме 4 из [2] $\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty} \leq C_2\omega(\delta)$, $0 < \delta \leq 1$ (см. также (2)). Поэтому

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{\infty}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_2\omega(\delta)}{\varphi(\delta)} \leq C_2\eta(\delta) \leq C_2\eta(1/n), \quad 0 < \delta \leq 1/n. \quad (19)$$

Из оценок (17)–(19) вытекает неравенство (15). Неравенство (16) доказывается аналогично. Вместо (17) по теореме 1 имеем $\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} \leq C_3\omega_k(f, 1/n)_{C_p} \ln(n+2) \leq C_4\eta(1/n) \ln(n+2)$, а вместо (18) при $\delta \geq 1/n$ находим, что

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{2^k \|f - e_n^q(f)\|_{C_p}}{\varphi(1/n)} \leq 2^k C_4 \eta(1/n) \ln(n+2).$$

Пусть теперь $0 < \delta \leq 1/n$. Если $\omega \in S^k$ и $\{\omega(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ убывает к нулю (что в данном случае вытекает из условия), то

$$n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \omega(1/i) \ln(i+2) \leq \ln(n+2) n^{-k} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \omega(1/i) \leq C_5 \ln(n+2) \omega(1/n),$$

т.е. $\omega(t) \ln(2+1/t) \in S^k$ (за исключением возрастания данной функции). Аналогично доказательству (15) мы выводим соотношение $\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p} \leq C_6\omega(\delta) \ln(2+1/\delta)$, $\delta \in (0, 1]$. В силу условия



убывания последовательности $\{\eta(1/n) \ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ мы получаем, что функция $\eta(t) \ln(2+1/t)$ почти возрастает на $(0, 1)$. В самом деле, пусть $0 < 1/(p+1) < t \leq 1/p \leq 1/m \leq u < 1/(m-1) \leq 1$, где $m, p \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Тогда $\eta(t) \ln(2+1/t) \leq \eta(1/p) \ln(p+3)$. Так как $\omega \in S^k$, то по лемме 8 для некоторого $\alpha \in (0, k)$ функция $\omega(t)/t^\alpha$ почти убывает на $(0, \pi)$. В частности, $\omega(2\delta) \leq 2^\alpha K \omega(\delta)$ и аналогичное неравенство верно для $\eta(\delta)$. Поэтому

$$\eta(1/p) \ln(p+3) \leq C_7 \eta(1/(p+1)) \ln(p+3) \leq C_7 \eta(1/m) \ln(m+2) \leq C_8 \eta(u) \ln(m+1) \leq C_9 \eta(u) \ln(2+1/u),$$

так как функция $g(x) = \ln(x+2)/\ln(x+1)$ убывает при $x > 0$ и $m \geq 2$. В результате имеем:

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leq \frac{C_6 \omega(\delta) \ln(2+1/\delta)}{\varphi(\delta)} \leq C_7 \eta(1/n) \ln(n+2), \quad 0 \leq \delta \leq 1/n.$$

Из полученных оценок выводим неравенство (16). Теорема доказана.

Библиографический список

1. Терехин А. П. Приближение функций ограниченной p -вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
5. Голубов Б. И. О наилучшем приближении p -абсолютно непрерывных функций // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Т. 4. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1988. С. 85–99.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. Vol. 26, № 1. P. 63–80.
8. Тюленева А. А. Приближение периодических функций ограниченной p -вариации обобщенными средними Абеля–Пуассона и логарифмическими средними // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 25–32.
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means // J. Approxim. Theory. 1983. Vol. 39, № 1. P. 24–38.
10. Rempulska I., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.

Approximation of Functions of Bounded p -variation by Euler Means

A. A. Tyuleneva

Tyuleneva Anna Anatol'evna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, anantuleneva@mail.ru

In this paper we study the Euler means

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (1+q)^{-n} S_k(f)(x), \quad q \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where $S_k(f)$ is the k -th partial trigonometric Fourier sum. For p -absolutely continuous functions ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) we consider their approximation by the Euler means in uniform and C_p -metric in terms of moduli of continuity $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, and the best approximations by trigonometric polynomials $E_n(f)_{C_p}$. One can note the following inequality for different metrics from Theorem 2

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leq C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

which is sharp. Also the following generalization of a result due to C. K. Chui and A. S. Holland is proved.



If ω is a modulus of continuity on $[0, \pi]$ such that $\delta \int_{\delta}^{\pi} t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ and $f \in C_p$ satisfies two properties 1) $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1} \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + 2\pi/(n+1))\|_{C_p} dt = O(\omega(1/n))$, where $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, then $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Some applications to the approximation in Hölder type metrics are given.

Key words: functions of bounded p -variation, p -absolutely continuous functions, Euler means, best approximation, modulus of continuity.

References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded p -variation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
3. Hardy G. H. *Divergent series*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
4. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, New York, MacMillan, 1963.
5. Golubov B. I. On the best approximation of p -absolutely continuous functions. *Some Questions of Function Theory and Functional Analysis*, vol. 4, Tbilisi, Izd. Tbilisi Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of p -absolutely continuous functions. *Analysis Math.*, 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
8. Tyuleneva A.A. Approximation of bounded p -variation periodic functions by generalized Abel-Poisson means and logarithmic means. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pt. 1, pp. 25–32 (in Russian).
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means. *J. Approxim. Theory*, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 24–38.
10. Rempulska I., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces *Proc. of A. Razmadze Math. Institute*, 2006, vol. 140, pp. 141–153.

УДК 519.642.8

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

А. А. Хромов¹, Г. В. Хромова²

¹Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

²Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи об определении плотности тепловых источников в стержне, в котором установилась стационарная температура, если эта температура задана приближенно. В математической постановке это задача нахождения равномерных приближений к правой части обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда заданы равномерное приближение к решению и величина погрешности. На базе так называемого разрывного оператора Стеклова сначала строятся семейства операторов, дающих устойчивые равномерные приближения к функции и ее производным 1 и 2 порядков, а затем на их основе — метод решения поставленной задачи. На некотором классе решений приводится оценка погрешностей приближенного решения.

Ключевые слова: обратная задача, оператор Стеклова, регуляризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины l , в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.