УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ НА ОТРЕЗКЕ

А. А. Тюленева

Аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, aatuleneva@km.ru

Прямая теорема приближения алгебраическими многочленами доказана для интегралов Римана – Лиувилля порядка $r > 0$. Как следствие, получены асимптотические равенства для ε-энтропии образа класса типа Гельдера при действии оператора интегрирования Римана – Лиувилля порядка $r > 0$.

Ключевые слова: p-вариация, пространство L^p, интеграл Римана – Лиувилля, наилучшее приближение, алгебраические многочлены, ε-энтропия.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть $\xi = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, $\lambda(\xi) = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ — диаметр разбиения ξ, $1 \le p < \infty$. Определим p-вариационную сумму по разбиению и p-вариационный модуль непрерывности равенствами

$$\text{æ}_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}, \qquad \omega_{1-1/p}(f,\delta)_{[a,b]} = \sup_{\lambda(\xi)\le\delta} \text{æ}_\xi^p(f), \qquad \delta \in [0, b-a].$$

Если $V_p(f,[a,b]) = \omega_{1-1/p}(f, b-a) < \infty$, то $f \in V_p[a,b]$, а если $1 < p < \infty$ и $\lim\limits_{\delta\to0}\omega_{1-1/p}(f,\delta)_{[a,b]} = 0$, то $f \in C_p[a,b]$. Оба этих пространства являются банаховыми с нормой $\|f\|_{V_p} = \max(\|f\|_\infty, V_p(f,[a,b]))$. Подробнее об этих пространствах и теории приближений в них см. [1]. Далее, $E_n(f)_{V_p}$, $(E_n(f)_X)$ означает наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами p степени не выше $n-1$ ($p \in \mathscr{P}_{n-1}$) в метрике $C_p[0,1]$ $(X[0,1])$. Под пространством $X[a,b]$ будем понимать одно из следующих пространств: $L^p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, с нормой $\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $C[a,b]$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ или $C_p[a,b]$, $1 < p < \infty$. Если $[a,b] = [0,1]$, то $\|\varphi\|_{X[a,b]} = \|\varphi\|_X$ и вместо $\omega_{1-1/p}(f,\delta)_{[a,b]}$ пишем просто $\omega_{1-1/p}(f,\delta)$. Стандартным образом модуль гладкости порядка $k \in \mathbb{N}$ в $X[a,b]$ определяется формулой

$$\omega_k(f,\delta)_{X[a,b]} = \sup_{0<h\le\delta}\|\Delta_h^k f(x)\|_{X[a,b-kh]}; \quad \Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(x+ih).$$

При $[a,b] = [0,1]$ пишем просто $\omega_k(f,\delta)_X$, вместо $X = L^p$ или $X = C$ пишем p или ∞.

Для функции $\varphi \in L^1[a,b]$ интегралом Римана – Лиувилля порядка $r > 0$ называется функция

$$(I_a^r\varphi)(x) = \Gamma^{-1}(r)\int_a^x (x-t)^{r-1}\varphi(t)\,dt, \qquad a \le x \le b,$$

где $\Gamma(r)$ обозначает гамма-функцию Эйлера. Существование этого интеграла следует из леммы 5. Подробнее о свойствах этого интеграла см. [2, гл. 1]. Будем писать также $f \in I_{*,a}^r(\varphi)$, если $f(x) = I_a^r(\varphi)(x) + \sum_{k=1}^{[r]} c_k(x-a)^{r-k}$, $c_k \in \mathbb{R}$. Для приближения функций $f = I_0^r(\varphi)$ и $f \in I_{*,0}^r(\varphi)$ удобно использовать величины

$$\mathscr{E}_{n,s}(f)_X = \inf\left\{\left\|f - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \sum_{j=1}^{[s]} b_j x^{s-j}\right\|_X : a_i, b_j \in \mathbb{R}\right\}, \quad s - r \in \mathbb{N}.$$

Для $r > 0$ и $0 < \alpha \le 1$ через $W^r H^\alpha(M, N, [0,1])$ обозначим множество

$$\Big\{f \in C[0,1] : f \in I_{*,0}^r(\varphi),\ \|f\|_\infty \le N,\ \|\varphi\|_\infty \le M, |\varphi(x) - \varphi(y)| \le M|x-y|^\alpha,\ x, y \in [0,1]\Big\}.$$

Будем писать $\omega \in \Omega$, если $\omega(t)$ возрастает и непрерывна на $[0,1]$, а также обладает свойствами $\omega(0) = 0$, $\omega(t) > 0$ при $t > 0$ и $\omega(2t) \le C\omega(t)$, $t \in [0,1/2]$. Для функции $\omega \in \Omega$ положим $\omega^{-1}(u) = \sup\{t \in [0,1] : \omega(t) \le u\}$, $u \in [0,\omega(1)]$. Функция $\omega \in \Omega$ принадлежит классу N^r, $r > 0$, если для $1 \ge t \ge u > 0$ верно неравенство $t^{-r}\omega(t) \le Cu^{-r}\omega(u)$, соответственно $\omega \in \Omega$ принадлежит классу B, если $\int_0^\delta t^{-1}\omega(t)\,dt \le C\omega(\delta)$, $\delta \in [0,1]$. При $r > 0$, $1 < p < \infty$ и $\omega \in \Omega \cap N^{1-1/p}$ рассмотрим класс

$$W^r H^\omega_{1-1/p}(M,N,[0,1]) = \Big\{ f \in C_p[0,1] : f \in I^r_{*,0}(\varphi),\ \|f\|_{V_p} \le N,$$
$$\|\varphi\|_{V_p} \le M,\ \omega_{1-1/p}(f,\delta) \le \omega(\delta),\ \delta \in [0,1] \Big\}.$$

Пусть K — компакт в метрическом пространстве (X,ρ). Множество $U \subset X$ называется ε-сетью для множества K в пространстве X, если для любой точки $x \in K$ найдется $y \in U$ такая, что $\rho(x,y) \le \varepsilon$. Соответственно множество $V \subset K$ называется ε-цепью для K, если для любых $x, y \in V$, $x \ne y$, верно $\rho(x,y) > \varepsilon$. Следуя работе А. Н. Колмогорова и В. М. Тихомирова [3], двоичный логарифм количества точек в минимальной ε-сети для K в X будем называть ε-энтропией K в X и обозначать через $H_\varepsilon(K,X)$, а двоичный логарифм количества точек в максимальной ε-цепи для K будем называть ε-емкостью и обозначать $C_\varepsilon(K)$. Можно показать, что при $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства (см. [3])

$$C_{2\varepsilon}(K) \le H_\varepsilon(K,X) \le C_\varepsilon(K). \tag{1}$$

Лемма 1 (см. [1]). *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $f \in V_p[a,b]$. *Тогда справедливо неравенство* $\omega(f,\delta)_{V_p[a,b]} \le 2\omega_{1-1/p}(f,\delta)_{[a,b]}$.

Лемма 2 (см. [4]). *Пусть* l^1_N *есть пространство* N*-мерных векторов* $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ *с нормой* $\|x\|_{l^1_N} = \sum\limits_{i=1}^n |x_i|$, *а* K_N *есть множество из* 2^N *точек пространства* l^1_N *с координатами* 0 *или* 1. *Если* $M(N,d)$ *— мощность максимальной* d*-цепи для* K_N *в метрике* l^1_N, *то при* $d = [N/k]$, $k > 2$, *и* $N > N_0(k)$ *справедливо неравенство* $M(N,d) \ge C^N$, $C > 1$.

Рассмотрим теперь банахово пространство $X[a,b]$ и $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность таких элементов из $X[a,b]$, что их линейные комбинации плотны в $X[a,b]$ и любое конечное подмножество Φ линейно независимо. Пусть последовательность $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^\infty$ убывает к нулю, а $E^\Phi_n(f)_X = \inf\{\|f - \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k\|_X : a_k \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ($E^\Phi_0(f)_X = \|f\|_X$). Тогда по определению $A(\Delta,\Phi)_X = \{f \in X[a,b]; E^\Phi_n(f)_X \le \delta_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$. В частности, множество $A(\Delta,\Phi)_X$ ограниченно в $X[a,b]$, более того, оно компактно в $X[a,b]$. Следующая лемма доказана в [5] и является важным вкладом в теорию приближений.

Лемма 3. Пусть $\Delta = \{\delta_i\}_{i=0}^\infty$ убывает к нулю. Тогда верно неравенство $H_\varepsilon(A(\Delta,\Phi)_X) \le C\sum\limits_{i=1}^j N_i$, где $N_i = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \delta_k \le M^{-i}\}$ при $i \in \mathbb{N}$, $M > 1$ — любое фиксированное число, а j определяется из неравенств $M^{-(j-1)} < \varepsilon \le M^{-(j-2)}$ при $\varepsilon < \varepsilon_0(M)$.

Следующая лемма установлена в [4, следствие 1] и позволяет без лишних вычислений применять оценку леммы 3.

Лемма 4. *Пусть* $\omega \in \Omega \cap B \cap N^\alpha$ *для некоторого* $\alpha > 0$ *и* $\delta_n = \omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для* N_i *и* j, *определенных согласно лемме 3, справедливо неравенство* $\sum\limits_{i=1}^j N_i \le C\omega^{-1}(\varepsilon)$.

Лемма 5 является аналогом известного неравенства для сверток 2π-периодических функций (см. [6, гл. 3]).

Лемма 5. *Пусть* $a < b$ *и* $\psi(x) = \int_a^b g(x-t)\varphi(t)dt$, *где* $g(t) \in L^1[a-b, b-a]$, $x \in [a,b]$, $\varphi \in X[a,b]$. *Тогда*

$$\|\psi\|_{X[a,b]} \le C_1 \|g\|_{L^1[a-b,b-a]} \|\varphi\|_{X[a,b]},$$

причем $C_1 = 1$ *для* $X = L^p$ *и* C, $C_1 = 3^{1/p}$ *для* $X = C_p$.

Доказательство. С помощью простой замены переменных получаем:

$$\int_a^b g(x-t)\varphi(t)dt = \int_{x-b}^{x-a} g(t)\varphi(x-t)dt.$$

Отсюда в случае $X[a,b] = C[a,b]$ сразу имеем:

$$\|\psi\|_{C[a,b]} \le \|\varphi\|_{C[a,b]} \|g\|_{L^1[a-b,b-a]}. \tag{2}$$

В случае $X = L^p$ или $X = C_p$ рассмотрим функцию $\varphi_1(t)$, равную $\varphi(t)$ на $[a,b]$ и обращающуюся в нуль вне этого отрезка. Тогда

$$\int_{x-b}^{x-a} g(t)\varphi(x-t)\,dt = \int_{a-b}^{b-a} g(t)\varphi_1(x-t)\,dt. \tag{3}$$

Так как $x \in [a,b]$, $x-t$ пробегает отрезок $[2a-b, 2b-a]$. Применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем для $X = L^p$:

$$\|\psi\|_{L^p[a,b]} \le \int_{a-b}^{b-a} |g(t)| \left\{ \int_{a-2b}^{2b-a} |\varphi_1(\tau)|^p d\tau \right\}^{1/p} dt \le \|\varphi\|_{L^p[a,b]} \|g\|_{L^1(a-b,b-a)}.$$

В случае $X = C_p$ из (3) следует $(q = p/(p-1))$

$$|\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})| = \left| \int_{a-b}^{b-a} g(t)(\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t))dt \right| \le$$

$$\le \int_{a-b}^{b-a} |g(t)|^{1/p+1/q} |\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t)| dt \le$$

$$\le \|g\|_{L^1[a-b,b-a]}^{1/q} \left(\int_{a-b}^{b-a} |g(t)| |\varphi_1(x_i - t) - \varphi_1(x_{i-1} - t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Для любого разбиения $\xi = \{x_i\}_0^n$ отрезка $[a,b]$ с помощью суммирования получаем:

$$\sum_{i=1}^n |\psi(x_i) - \psi(x_{i-1})|^p \le ||g||_{L^1[a-b,b-a]}^p V_p^p(\varphi_1, [a-2b, 2b-a]).$$

Очевидно, что за счет доопределения нулем p-вариация в p-й степени не могла измениться более чем на $2\|\varphi\|_\infty^p \le 2\|\varphi\|_{V_p[a,b]}^p$, поэтому

$$V_p(\varphi_1, [a-2b, 2b-a]) \le 3^{1/p} \|\varphi\|_{V_p[a,b]}.$$

Объединяя полученное неравенство с (2), доказываем лемму для $X = C_p$. Лемма доказана.

Лемма 6 (см. [7]). *Если $V_s(x-c,a,b) = (a(x-c) + b(|x-c|))|x-c|^s$, $|c| < 1$, $s > -2$, $a, b \in \mathbb{R}$, то справедливо неравенство*

$$E_n(V_s(x-c,a,b))_{L^1(-1,1)} \le C(s,a,b) n^{-s-2}.$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Через $W_p^r[a,b]$ обозначим множество функций f таких, что $f, f', \dots, f^{(r)}$ абсолютно непрерывны на $[a,b]$, причем $f^{(r)} \in L^p[a,b]$. Через W_∞^r мы обозначим пространство r раз непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$.

Лемма 7 (см. [8, гл. 6, § 2]). *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $f \in L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, или $f \in C[0,1]$ $(p = \infty)$. Тогда для любого $h \in (0,1)$ существует функция $g_{h,r}(f) \in W_p^r[0,1]$ такая, что $\|f - g_{h,r}(f)\|_p \le C_1 \omega_r(f,h)_p$ и $\|(g_{h,r}(f))^{(r)}\|_p \le C_2 h^{-r} \omega_r(f,h)_p$.*

Лемма 8. *Пусть $f \in C_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Тогда существует $g_h(f)$ такая, что $(g_h(f))'$ существует всюду и принадлежит $C_p[0,1]$, причем*

$$\|f - g_h(f)\|_{C_p} \le C_1 \omega_{1-1/p}(f,h) \qquad и \qquad \|(g_h(f))'\|_{C_p} \le C_2 h^{-1} \omega_{1-1/p}(f,h).$$

Доказательство. Пусть $g_h(f)(x) = h^{-1} \int_x^{x+h} f^*(t)\,dt$, где $f^*(t)$ равна $f(t)$ на $[0,1]$ и $f^*(t) = f(1)$ при $t \ge 1$. Аналогично [9, добавление 2] показывается, что для упомянутых выше пространств X

$$\|f - g_h(f)\|_X \le \omega_1(f^*, h)_{X[0,1+h]}, \qquad \|(g_h(f))'\|_X \le h^{-1} \omega_1(f^*, h), \qquad h \in (0,1). \tag{4}$$

Но по лемме 1 имеем: $\omega_1(f^*, h)_{C_p[0,1+h]} \le 2\omega_{1-1/p}(f^*, h)_{[0,1+h]}$. С другой стороны, для любого разбиения $\xi_1 = \{x_i\}_{i=0}^\infty$ отрезка $[0, 1+h]$ диаметра не больше h пусть $x_{j-1} < 1 \le x_j$. Тогда для разбиения $\xi = \{x_i\}_{i=0}^{j-1} \cup \{1\}$ имеем равенство: $æ_{\xi_1}^p(f) = æ_\xi^p(f)$, т. е.

$$\omega_{1-1/p}(f^*, h)_{[0,1+h]} = \omega_{1-1/p}(f,h).$$

Подставляя полученные оценки в (4), доказываем лемму 8.

2. ПРЯМЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ РИМАНА – ЛИУВИЛЛЯ

Следующая теорема для случая $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, доказана Ф. Г. Насибовым [10].

Теорема 1. Пусть $r > 0$, $f(x) = (I_0^r \varphi)(x)$ и $\varphi \in X[0,1]$. Тогда $E_n(f)_X \le C_2(r)\|\varphi\|_X/n^r$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \int_0^1 D_{r-1}(x-t)\varphi(t)dt/\Gamma(r), \tag{5}$$

где $D_{r-1}(t) = (|t|^{r-1} + t|t|^{r-2})/2$. Для этого достаточно разбить интеграл справа в (5) на два: от 0 до x и от x до 1. По определению второй равен нулю, первый же совпадает с интегралом Римана – Лиувилля. Согласно лемме 6 существует многочлен $p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$ такой, что $\|D_{r-1}(x) - p_{n-1}(x)\|_{L^1(-1,1)} \le C_1 n^{-r}$. Полагая $V_{n-1}(f,x) = \Gamma^{-1}(r)\int_0^1 \varphi(t)p_{n-1}(x-t)\,dt$ (тогда $V_{n-1}(f) \in \mathscr{P}_{n-1}$), имеем благодаря лемме 5

$$\|f(x) - V_{n-1}(f,x)\|_X \le \frac{C_2\|\varphi\|_X}{\Gamma(r)} \int_{-1}^1 |p_{n-1}(x) - D_{r-1}(x)|dx \le C_3\|\varphi\|_X/n^r.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f(x) \in I_{*,0}^r(\varphi)(x)$, $\varphi(t) \in L^p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, *или* $\varphi(t) \in C[0,1]$ $(p = \infty)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\mathscr{E}_{n,k+r}(f)_X \le C\omega_k(\varphi, 1/n)_p/n^r.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g_{h,k}(\varphi)$ из леммы при $h = 1/n$. Тогда

$$g_{h,k}(\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_{h,k}^{(j)}(\varphi)(0)x^j}{j!} + I_0^k(g_{h,k}^{(k)}(\varphi))(x).$$

Поскольку $I_0^r(q_\alpha) = q_{r+\alpha}$, где $q_\alpha(x) = \Gamma^{-1}(\alpha+1)x^\alpha$, то согласно теореме 2.5 в [2, гл. 1] имеем

$$I^r(g_{h,k}(\varphi))(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g_{h,k}^{(j)}(\varphi)(0)x^{j+r}}{(j+r+1)!} + I_0^{r+k}(g_{h,k}^{(k)}(\varphi))(x).$$

В силу определения $\mathscr{E}_{n,r}$ и теоремы 1 получаем:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{n,r+k}(f)_p = \mathscr{E}_{n,r+k}(I_0^r(\varphi))_p &\le \mathscr{E}_{n,r+k}(I_0^r(\varphi - g_{h,k}(\varphi)))_p + \mathscr{E}_{n,r+k}(I_0^r(g_{h,k}(\varphi)))_p \le \\ &\le E_n(I_0^r(\varphi - g_{h,k}(\varphi)))_p + E_n(I_0^{r+k}(g_{h,k}^{(k)}(\varphi)))_p \le \\ &\le C_1(n^{-r}\|\varphi - g_{h,k}(\varphi)\|_p + n^{-r-k}h^{-k}\omega_k(\varphi,h)_p) \le C_2 n^{-r}\omega_k(\varphi, 1/n).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Для $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, $r > 0$ и $k = 2$ аналог теоремы 2 доказан Ф. Г. Насибовым [10] на отрезке $[a,b] \subset (0,1)$.

Теперь получим аналог теоремы 2 для функций ограниченной p-вариации на отрезке.

Теорема 3. *Пусть* $r > 0$, $1 < p < \infty$, $\varphi(t) \in C_p[0,1]$, $f(x) \in I_{*,0}^r(\varphi)$. *Тогда верно неравенство*

$$\mathscr{E}_{n,r+1}(f)_{C_p} \le C\omega_{1-1/p}(\varphi, 1/n)/n^r, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2, используя функцию $g_h(\varphi)$ из леммы 8, находим, что

$$g_h(\varphi)(x) = g_h(\varphi)(0) + \int_0^x (g_h(\varphi))'(t)\,dt = g_h(\varphi)(0) + I_0^1(g_h'(\varphi))(x),$$

откуда

$$I_0^r(g_h(\varphi))(x) = x^r g_h(\varphi)(0)/\Gamma(r+1) + I_0^{r+1}(g_h'(\varphi))(x)$$

также по теореме 2.5 из [2, гл. 1]. В итоге при $h = 1/n$ получаем по теореме 1

$$\mathscr{E}_{n,r+1}(f)_{C_p} = \mathscr{E}_{n,r+1}(I_0^r(\varphi))_{C_p} \le \mathscr{E}_{n,r+1}(I_0^r(\varphi - g_h(\varphi)))_{C_p} + \mathscr{E}_{n,r+1}(I_0^r(g_h(\varphi)))_{C_p} \le$$

$$\le E_n(I_0^r(\varphi - g_h(\varphi)))_{C_p} + E_n(I_0^{r+1}((g_h(\varphi))'))_{C_p} \le$$
$$\le C_1(n^{-r}\|\varphi - g_h(\varphi)\|_{C_p} + n^{-r-1}h^{-1}\omega_{1-1/p}(\varphi, h)) \le C_2 n^{-r}\omega_{1-1/p}(\varphi, 1/n).$$

Теорема доказана.

Применим теорему 2 к оценке ε-энтропии некоторых компактов дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля функций. Напомним, что $A(\varepsilon) \asymp B(\varepsilon)$ означает, что $C_1A(\varepsilon) \le B(\varepsilon) \le C_2A(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon > 0$, где $0 < C_1 < C_2$.

Теорема 4. Пусть $r > 0$, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le q \le \infty$ (при $q = \infty$ вместо $L^\infty[0,1]$ рассматриваем $C[0,1]$). Тогда имеет место порядковое равенство:

$$H_\varepsilon(W^rH^\alpha(M, N, [0,1]), L^q[0,1]) \asymp (1/\varepsilon)^{1/(r+\alpha)}.$$

Доказательство. Отметим сразу, что если $f(x) \in W^rH^\alpha(M, N, [0,1])$, то

$$f(x) = (I_0^r(\varphi(t) - \varphi(0)))(x) + I_0^r(\varphi(0)) + \sum_{k=1}^{[r]} c_k x^{r-k} = (I_0^r(\varphi(t) - \varphi(0)))(x) + \sum_{k=0}^{[r]} c_k x^{r-k},$$

где $\varphi \in Lip(\alpha)$, т. е. $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le M|x-y|^\alpha$, $x, y \in [0,1]$. Пусть $\Phi = \{x^{k-r}\}_{k=0}^{[r]} \bigcup \{x^n\}_0^\infty$. По теореме 2 при $k = 1$ получаем:

$$\mathscr{E}_{n,r+1}(f)_\infty = E^\Phi_{n+[r]+1}(f)_\infty \le C_1 n^{-r-\alpha} \le C_1(r+1)^{r+\alpha}(n+[r]+1)^{-r-\alpha},$$

т. е. $f \in A(\Delta, \Phi)_C$, где $\delta_n = C_2 n^{-r-\alpha}$. Ясно, что $\omega(\delta) = \delta^{r+\alpha}$ принадлежит $B \cap N^{r+\alpha}$. Поэтому по леммам 3 и 4 имеем: $H_\varepsilon(W^rH^\alpha(M, N, [0,1]), C[0,1])) \le C_3\varepsilon^{-1/(r+\alpha)}$.

Для оценки снизу введем функции, использовавшиеся в [3] для доказательства в случае $r \in \mathbb{N}$. Пусть

$$\varphi(y) = \begin{cases} a(1+y)^{r+\alpha}(1-y)^{r+\alpha}, & |y| \le 1, \\ 0, & |y| > 1. \end{cases}$$

Для $\varphi(y)$ при $|y| \le 1$ нетрудно вывести формулу $\varphi^{(k)}(y) = ap_k(y)(1-y^2)^{r+\alpha-k}$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \le r+\alpha$, p_k — многочлен k-й степени. Отсюда, пользуясь тем, что многочлен принадлежит классу $Lip(1)$, а $(1 \pm y)^\beta$ — классу $Lip(\beta)$, легко вывести, что $\varphi^{([r+\alpha])} \in Lip(\{r+\alpha\})$ при $r+\alpha$ не целом (здесь $[x]$ обозначает целую часть x, а $\{x\}$ – дробную часть x), а при целом $r+\alpha$ верно, что $\varphi^{(r+\alpha-1)} \in Lip(1)$. Другими словами, в обозначениях книги [2] $\varphi \in H^{r+\alpha}$. Следуя [3], расположим в [0,1] точки вида $x_m = (1+2m)\tau$, $m = 0, \ldots, s = [1/2\tau]$, $\tau = (\varepsilon/a)^{1/(r+\alpha)}$. Рассмотрим теперь набор G из 2^s функций g вида

$$g(x) = \sum_{k=0}^{s-1} \gamma_k \tau^{r+\alpha}\varphi((x - x_k)/\tau), \qquad \gamma_k = \pm 1. \tag{6}$$

Очевидно, что все производные $g \in G$, вплоть до $[r+\alpha]$-й, обращаются в нуль в нуле и сами $g \in G$ принадлежат классу $H_0^{r+\alpha}[0,1]$. Он определяется как $\{f \in H^{r+\alpha}[0,1] : f(0) = 0, \ldots, f^{([r+\alpha])}(0) = 0\}$ при $r+\alpha$ не целом и как $\{f \in H^{r+\alpha}[0,1] : f(0) = 0, \ldots, f^{([r+\alpha]-1)}(0) = 0\}$ при $r+\alpha$ целом. Поэтому по теореме 3.2 из [2, гл. 1] $I_0^{n-r}g \in H^{n+\alpha}$ для $g \in G$, $n = [r]+1$. В самом деле, либо $n+\alpha$ — не целое, либо, в противном случае, n и α — целые, и можно применять теорему 3.2. Тогда по определению производные порядка r от $g \in G$ принадлежат $Lip(\alpha)$, т. е. эти функции при достаточно малом a принадлежат $W^rH^\alpha(M, N, [0,1])$ (см. [2, гл. 1, теорема 2.3]).

Итак, мы имеем 2^s таких функций g и любые две из них имеют разные знаки хотя бы в одной точке x_k, и в этой точке разность между ними по модулю равна $2a\tau^{r+\alpha} = 2\varepsilon > \varepsilon$. Таким образом, множество G является ε-цепью для $W^rH^\alpha(M, N, [0,1])$ в пространстве $C[0,1]$, в нем 2^s элементов и $s \ge C_1\varepsilon^{-1/(r+\alpha)}$ (см. определения s и τ выше). В силу неравенства (1) получаем оценку ε-энтропии $W^rH^\alpha(M, N, [0,1])$ снизу при $q = \infty$.

Применим теперь те же самые функции (6) для построения $c\varepsilon$-цепи в пространстве $L^1[0,1]$. Тем самым оценка снизу будет установлена для всех $q \in [1, \infty)$. Заметим, что если в точке x_k знаки функций g_1 и g_2 вида (6) различны, то

$$\int_0^1 |g_1(x) - g_2(x)|\,dx \ge 2\int_{x_k-\tau}^{x_k+\tau} |g_1(x)|\,dx = 2a\tau\tau^{r+\alpha}\int_{-1}^1 (1-y^2)^{r+\alpha}\,dy = C_2\varepsilon\tau.$$

Чтобы $\int_0^1 |g_1 - g_2|\,dx$ было больше $c\varepsilon$ при некоторой постоянной $c > 0$, достаточно, чтобы число таких точек x_k, где знаки g_1 и g_2 различны, было не менее $[s/k]$, $k > 2$. Согласно же лемме 2, при достаточно больших s, можно выбрать не менее C^s, $C > 1$, наборов из s плюсов и минусов так, что для любых двух наборов число различных знаков в одинаковых разрядах не менее $[s/k]$. Таким образом, существует не менее C^s функций вида (6) так, что для любых двух функций g_1 и g_2 из этого подмножества $\|g_1 - g_2\|_L \geq c\varepsilon$. Мы построили $c\varepsilon/2$-цепь для $W^r H^\alpha(M, N, [0,1])$ в $L^1[0,1]$ и, как и выше, получаем отсюда нижнюю оценку для ε-энтропии.

Замечание 2. Как отмечено при доказательстве, при $r \in \mathbb{N}$ и $q = \infty$ асимптотическое равенство теоремы 4 установлено А. Н. Колмогоровым и В. М. Тихомировым в [3]. Для $r \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q < \infty$ утверждение теоремы 4 доказано в [11].

Теорема 5. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega \bigcap N^{1-1/p}$. Тогда верно порядковое равенство* $(1 < p < \infty)$

$$H_\varepsilon(W^r H^\omega_{1-1/p}(M, N, [0,1]), C_p[0,1]) \asymp \frac{1}{\tilde{\omega}^{-1}(\varepsilon)}, \tag{7}$$

где $\tilde{\omega}(\delta) = \omega(\delta)\delta^r$. При $r > 0$, $r \in \mathbb{N}$, верна соответствующая оценка сверху из (7).

Доказательство. Оценка снизу в (7) доказывается аналогично доказательству теоремы 1 из [4]. Оценка сверху устанавливается с помощью теоремы 3 аналогично доказательству соответствующей части теоремы 4.

Библиографический список

1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной p-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.

3. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множества в функциональном пространстве // УМН. 1959. Т. 14, вып. 2. С. 3–86.

4. *Волосивец С. С.* Асимптотические характеристики одного компакта гладких функций в пространстве функций ограниченной p-вариации // Мат. заметки. 1995. Т. 57, вып. 2. С. 214–227.

5. *Lorentz G. G.* Metric entropy and approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 72, № 6. P. 903–927.

6. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1985. 264 с.

7 *Ибрагимов И. И.* О наилучшем приближении в среднем функции, s-я производная которой имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-1, 1]$ // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 1. С. 13–15.

8. *DeVore R., Lorentz G.G.* Constructive approximation. Berlin; Heidelberg : Springer, 1993. 449 p.

9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. М. : Наука, 1987. 424 с.

10. *Насибов Ф. Г.* О порядке наилучших приближений функций, имеющих дробную производную в смысле Римана – Лиувилля // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1962. № 3. С. 51–57.

11. *Clements G. F.* Entropies of several sets of real valued functions // Pacific J. Math. 1963. Vol. 13, № 4. P. 1085–1095.

Approximation of the Riemann – Liouville Integrals by Algebraic Polynomials on the Segment

A. A. Tyleneva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, aatuleneva@km.ru

The direct approximation theorem by algebraic polynomials is proved for Riemann – Liouville integrals of order $r > 0$. As a corollary, we obtain asymptotic equalities for ε-entropy of the image of a Hölder type class under Riemann – Liouville integration operator.

Key words: p-variation metric, L^p space, Riemann – Liouville integral, best approximation, algebraic polynomials, ε-entropy.

References

1. Terekhin A. P. Approximation of bounded p-variation functions. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).

2. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, New York, Gordon and Breach Science, 1993. 1006 p.

3. Kolmogorov A. N., Tikhomirov V. M. ε-entropy and ε-capacity of a set in the functional space. *Uspehi mat. nauk*, 1959, vol. 14, iss. 2, pp. 3–86 (in Russian).

4. Volosivets S. S. Asymptotic properties of one compact

set of smooth functions in the space of functions of bounded p-variation. *Math. Notes*, 1995, vol. 57, iss. 2, pp. 148–157.

5. Lorentz G. G. Metric entropy and approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 72, no. 6, pp. 903–927.

6. Edwards R. *Fourier Series: A modern introduction. Vol. 1.* New York, Springer, 1982, 234 p.

7. Ibragimov I. I. On best approximation of a function whose s-th derivative has bounded variation on segment $[-1, 1]$. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 90, no. 1. pp. 13–15 (in Russian).

8. DeVore R., Lorentz G. G. *Constructive approximation*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1993, 449 p.

9. Korneichuk N. P. *Exact Constants in Approximation Theory*, 2009, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 468 p.

10. Nasibov F. G. On the order of best approximations of functions havong fractional derivative in Riemann – Liouville sense. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1962, no. 3, pp. 51–57 (in Russian).

11. Clements G. F. Entropies of several sets of real valued functions. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, no. 4, pp. 1085–1095.

УДК 517.97

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ

А. В. Фоминых

Аспирант кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, alexfomster@mail.ru

В статье рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ. Эта задача сводится к вариационной задаче минимизации некоторого функционала на всём пространстве. Для данного функционала выписываются необходимые условия минимума. На основании этих условий описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приводятся численные примеры реализации этих методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Ключевые слова: вариация, задача Коши, квадратичный функционал, градиент Гато, метод наискорейшего спуска, метод сопряжённых направлений.

ВВЕДЕНИЕ

Существует много методов решения задачи Коши, например, метод последовательных приближений Пикара, метод ломаных Эйлера, серия методов Рунге – Кутты. В работе [1] задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к вариационной задаче минимизации некоторого строго выпуклого функционала на всём пространстве. В данной статье этот подход распространяется на нелинейную систему ОДУ. Для поиска стационарных точек функционала используются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений, которые относятся к прямым методам вариационного исчисления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, $x(t)$ — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, где $C_n^1[0, T]$ — пространство n-мерных вектор-функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$, $f(x, t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, x_0 — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (1), которое удовлетворяет начальному условию (2). Будем считать, что для (1), (2) выполнены условия теоремы Пикара. Тогда решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно.