



If  $\omega$  is a modulus of continuity on  $[0, \pi]$  such that  $\delta \int_{\delta}^{\pi} t^{-2} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$ ,  $1 < p < \infty$  and  $f \in C_p$  satisfies two properties 1)  $\omega_2(f, t)_{C_p} \leq C\omega(t)$ ; 2)  $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1} \|\varphi_x(t) - \varphi_x(t + 2\pi/(n+1))\|_{C_p} dt = O(\omega(1/n))$ , where  $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$ , then  $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leq C\omega(1/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Some applications to the approximation in Hölder type metrics are given.

*Key words:* functions of bounded  $p$ -variation,  $p$ -absolutely continuous functions, Euler means, best approximation, modulus of continuity.

## References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded  $p$ -variation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
3. Hardy G. H. *Divergent series*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
4. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, New York, MacMillan, 1963.
5. Golubov B. I. On the best approximation of  $p$ -absolutely continuous functions. *Some Questions of Function Theory and Functional Analysis*, vol. 4, Tbilisi, Izd. Tbilisi Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of  $p$ -absolutely continuous functions. *Analysis Math.*, 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
8. Tyuleneva A.A. Approximation of bounded  $p$ -variation periodic functions by generalized Abel-Poisson means and logarithmic means. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pt. 1, pp. 25–32 (in Russian).
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means. *J. Approxim. Theory*, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 24–38.
10. Rempulska I., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spaces *Proc. of A. Razmadze Math. Institute*, 2006, vol. 140, pp. 141–153.

УДК 519.642.8

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

А. А. Хромов<sup>1</sup>, Г. В. Хромова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи об определении плотности тепловых источников в стержне, в котором установилась стационарная температура, если эта температура задана приближенно. В математической постановке это задача нахождения равномерных приближений к правой части обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда заданы равномерное приближение к решению и величина погрешности. На базе так называемого разрывного оператора Стеклова сначала строятся семейства операторов, дающих устойчивые равномерные приближения к функции и ее производным 1 и 2 порядков, а затем на их основе — метод решения поставленной задачи. На некотором классе решений приводится оценка погрешностей приближенного решения.

*Ключевые слова:* обратная задача, оператор Стеклова, регуляризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины  $l$ , в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.



Обозначим:  $u(x) \in C^2[0, l]$  — температура в сечении с абсциссой  $x$ ,  $f(x)$  — плотность тепловых источников,  $k(x)$  — коэффициент теплопроводности,  $q(x)$  — коэффициент теплообмена. Считаем, что  $k(x) \in C^1[0, l]$ ,  $q(x) \in C[0, l]$  — известные функции.

Требуется найти равномерные приближения к  $f(x)$  в случае, когда  $u(x)$  задана нам приближенно, т. е. вместо  $u(x)$  известна  $u_\delta(x)$  такая, что  $\|u_\delta - u\|_{C[0, l]} \leq \delta$ .

В математической постановке эта задача сводится к определению правой части уравнения

$$k(x)u''(x) + k'(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x),$$

где  $u(0) = u(l) = 0$ , по известной  $u(x)$ .

Если  $u(x)$  — точная температура, то  $f(x)$  находится тривиально. Если же  $u(x)$  задана приближенно, то в силу неустойчивости операции дифференцирования для нахождения приближений к  $f(x)$  требуется привлечение методов регуляризации [1].

В [2] применялась регуляризация с помощью разностных формул численного дифференцирования. При этом приближенное решение получалось на внутренних из  $[0, l]$  отрезках, границы которых должны быть увязаны с шагом разностных формул.

В данной работе этот недостаток устраняется: получены равномерные приближения к  $f(x)$  на всем отрезке с помощью семейств интегральных операторов с разрывными ядрами.

**1.** Рассмотрим сначала семейство операторов:

$$T_\alpha u = \begin{cases} T_{\alpha 2} u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1} u, & x \in [l/2, l], \end{cases}$$

где

$$T_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha^2} \left[ - \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x u(t) dt \right], \quad T_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha^2} \left[ - \int_x^{x+\alpha} u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} u(t) dt \right]. \quad (1)$$

Согласно [3]  $T_{\alpha 1} u \equiv DS_{\alpha 1}^2 u$ ,  $T_{\alpha 2} u = DS_{\alpha 2}^2 u$ , где  $S_{\alpha 1} u = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x u(t) dt$ ,  $S_{\alpha 2} u = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} u(t) dt$ ,  $D$  — оператор дифференцирования.

В [3] показано, что

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty[0, l]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (2)$$

для любой  $u(x) \in C^1[0, l]$  (в [3]  $l = 1$ ). Здесь

$$\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0, l/2]}, \|\cdot\|_{C[l/2, l]}\}. \quad (3)$$

Теперь на базе операторов  $T_\alpha$  построим семейство операторов:

$$T_\alpha^{(2)} u = \begin{cases} T_{\alpha 2}^{(2)} u, & x \in [0, l/2], \\ T_{\alpha 1}^{(2)} u, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$

**Лемма 1.** Для любой  $u(x) \in C^2[0, l]$  выполняется сходимость:

$$\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty[0, l]} \rightarrow 0, \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Справедливо равенство

$$T_\alpha^{(2)} = S_\alpha^{(4)}, \quad (4)$$

где

$$S_\alpha^{(4)} = \begin{cases} S_{\alpha 2}^4, & x \in [0, l/2], \\ S_{\alpha 1}^4, & x \in [l/2, l]. \end{cases}$$



Действительно, из очевидного равенства  $DS_{\alpha j}u = S_{\alpha j}Du$ ,  $j = 1, 2$ , вытекает:

$$DS_{\alpha j}^2u = DS_{\alpha j}(S_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}DS_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2Du,$$

т. е.  $T_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2Du$ , а отсюда следует:

$$T_{\alpha j}^2u = T_{\alpha j}(T_{\alpha j}u) = S_{\alpha j}^2DT_{\alpha j}u = S_{\alpha j}^2DS_{\alpha j}^2Du = S_{\alpha j}^4D^2u,$$

т. е.  $T_{\alpha j}^2u = S_{\alpha j}^4u''$ .

Но  $S_{\alpha j}^4\varphi \rightarrow \varphi$  при  $\alpha \rightarrow 0$  для любой непрерывной  $\varphi(x)$  (сходимость в равномерной метрике). Отсюда и из (3) следует утверждение леммы.

**Лемма 2.** Для операторов  $T_{\alpha j}^2$ ,  $j = 1, 2$ , справедливы представления:

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4} \left[ \int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (4\alpha - 3(t-x))u(t) dt + \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} (-8\alpha + 3(t-x))u(t) dt + \int_{x+3\alpha}^{x+4\alpha} (4\alpha - (t-x))u(t) dt \right], \quad (5)$$

$$T_{\alpha 1}^2u = \alpha^{-4} \left[ \int_{x-4\alpha}^{x-3\alpha} (4\alpha - (x-t))u(t) dt + \int_{x-3\alpha}^{x-2\alpha} (3(x-t) - 8\alpha)u(t) dt + \int_{x-2\alpha}^{x-\alpha} (4\alpha - 3(x-t))u(t) dt + \int_{x-\alpha}^x (x-t)u(t) dt \right]. \quad (6)$$

**Доказательство.** Имеем:

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4} \left\{ - \int_x^{x+\alpha} \left[ - \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau + \int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau \right] dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} \left[ - \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau + \int_{t+\alpha}^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau \right] dt \right\}$$

или

$$T_{\alpha 2}^2u = \alpha^{-4}[I_1 + I_2 + I_3 + I_4], \quad (7)$$

где

$$I_1 = \int_x^{x+\alpha} \int_t^{t+\alpha} u(\tau) d\tau dt, \quad I_2 = - \int_x^{x+\alpha} \int_t^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau dt,$$

$$I_3 = - \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} \int_t^{t+2\alpha} u(\tau) d\tau dt, \quad I_4 = -I_2|_{x \rightarrow x_1 = x+\alpha}.$$

Далее,

$$I_1 = \int_x^{x+\alpha} (t-x)u(t) dt + \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} (2\alpha - (t-x))u(t) dt$$

(см. [3, лемма 1]).

Сделав соответствующие замены в остальных интегралах, приходим к выражениям:

$$I_2 = - \int_{x+\alpha}^{x+2\alpha} ((t-x) - \alpha)u(t) dt - \int_{x+2\alpha}^{x+3\alpha} (3\alpha - (t-x))u(t) dt, \quad I_3 = I_2.$$

Подставим полученные выражения в формулу (7), соберем слагаемые, содержащие интегралы с одинаковыми пределами интегрирования, получим представление (5).

Представление (6) получается из (5) при замене  $x$  на  $x - 4\alpha$ .



Подсчитаем нормы  $\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]}$  и  $\|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]}$ . Справедлива

**Лемма 3.** *Имеют место формулы:*

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = 2\alpha^{-1}, \quad \|T_\alpha^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = \frac{8}{3}\alpha^{-2}.$$

**Доказательство.** Имеем:

$$\|T_\alpha\|_{C[0,l] \rightarrow L_\infty[0,l]} = \max\{\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]}, \|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}\}.$$

Далее,

$$\|T_{\alpha 2}\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]} = \max_{0 \leq x \leq l/2} \int_0^l |T_{\alpha 2}(x, t)| dt,$$

где  $T_{\alpha 2}(x, t)$  — ядро интегрального оператора  $T_{\alpha 2}$ , и аналогичная формула справедлива для  $\|T_{\alpha 1}\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}$ . Так же вычисляются нормы  $\|T_{\alpha 2}^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow C[0,l/2]}$  и  $\|T_{\alpha 1}^{(2)}\|_{C[0,l] \rightarrow C[l/2,l]}$ . Учитываем, что вычисление норм для  $T_{\alpha 1}$  и  $T_{\alpha 1}^{(2)}$  сводится к вычислению соответствующих норм операторов с индексом 2. Тогда из (1) получаем первое утверждение леммы 3, а из леммы 2 — второе.  $\square$

Введем в рассмотрение величины:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta, T_\alpha, u') &= \sup\{\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_C \leq \delta\}, \\ \Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') &= \sup\{\|T_\alpha^{(2)} u_\delta - u''\|_{L_\infty} : \|u_\delta - u\|_C \leq \delta\}. \end{aligned}$$

По аналогии с теоремой 3 в [3] из (2) и лемм 1, 3 следует

**Теорема 1.** *Для сходимости  $\Delta(\delta, T_\alpha, u') \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$  необходимо и достаточно выполнения согласования  $\alpha = \alpha(\delta)$ , удовлетворяющего условиям: 1)  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  и 2)  $\delta(\alpha(\delta))^{-1} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Для сходимости  $\Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$  необходимо и достаточно выполнения согласования  $\alpha = \alpha(\delta)$ , удовлетворяющего условию 1) и условию 3)  $\delta(\alpha(\delta))^{-2} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .*

**2.** Теперь построим приближенное решение нашей задачи с помощью операторов  $T_\alpha$  и  $T_\alpha^{(2)}$ . Рассмотрим функции  $f_\delta^\alpha(x) = k(x)T_\alpha^{(2)}u_\delta(x) + k'(x)T_\alpha u_\delta(x) - q(x)u_\delta(x)$ .

**Теорема 2.** *При согласовании  $\alpha = \alpha(\delta)$ , удовлетворяющем условиям 1) и 3), указанным в теореме 1, имеет место сходимость*

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - f(x)\|_{L_\infty[0,l]} \rightarrow 0, \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Очевидна оценка

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq K\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} + K_1\|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} + Q\delta, \quad (8)$$

где  $K = \|k(x)\|_{C[0,l]}$ ,  $K_1 = \|k_1(x)\|_{C[0,l]}$ ,  $Q = \|q(x)\|_{C[0,l]}$ .

Поскольку

$$\|T_\alpha^{(2)}u_\delta - u''\|_{L_\infty} \leq \Delta(\delta, T_\alpha^{(2)}, u'') \quad \text{и} \quad \|T_\alpha u_\delta - u'\|_{L_\infty} \leq \Delta(\delta, T_\alpha, u'),$$

а согласование  $\alpha = \alpha(\delta)$  из условия 3) теоремы 1 обеспечивает и согласование из условия 2), то отсюда вытекает утверждение теоремы.  $\square$

Таким образом, приближенное решение поставленной задачи строится по следующей схеме:

- 1) вычисляются функции  $v_\delta^\alpha(x) = T_\alpha u_\delta$  и  $w_\delta^\alpha(x) = T_\alpha v_\delta^\alpha$ ;
- 2) выбирается согласование  $\alpha = \alpha(\delta)$  по теореме 2;
- 3) составляется функция  $f_\delta \equiv f_\delta^{\alpha(\delta)}(x) = k(x)w_\delta^{\alpha(\delta)}(x) + k'(x)v_\delta^{\alpha(\delta)}(x) - q(x)u_\delta(x)$ .



**3.** При наличии дополнительных условий на функцию  $u(x)$  укажем конкретную формулу для выбора  $\alpha = \alpha(\delta)$  и получим оценку погрешности приближенного решения.

Обозначим

$$M = \max_{0 \leq x \leq l} |u''(x)|$$

и будем считать, что эта константа нам известна и что, кроме того,  $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$ . Тогда справедлива

**Лемма 4.** При каждом фиксированном  $\alpha$  выполняются оценки:

$$\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} \leq 2M\alpha, \quad \|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} \leq 4M_1\alpha.$$

Доказательство первой оценки вытекает из леммы 5 в [3], второй – из равенства (4).

Запишем оценку (8) в виде

$$\begin{aligned} \|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq & K[\|T_\alpha^{(2)} u - u''\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha^{(2)}\|_{C \rightarrow L_\infty}] + \\ & + K_1[\|T_\alpha u - u'\|_{L_\infty} + \delta\|T_\alpha\|_{C \rightarrow L_\infty}] + Q\delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Из этой оценки и лемм 3 и 4 вытекает

**Теорема 3.** Если  $M = \|u''(x)\|_{C[0,l]}$  и  $u''(x) \in Lip_{M_1} 1$ , то справедлива оценка:

$$\|f_\delta^{\alpha(\delta)} - f\|_{L_\infty} \leq C_1\delta^{1/3} + C_2\delta^{2/3} + Q\delta, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) &= C\delta^{1/3}, \\ C &= \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3} (2KM_1 + K_1M)^{-1/3}, \\ C_1 &= 4(2KM_1 + K_1M)^{2/3} \left(\frac{4}{3}K\right)^{1/3}, \quad C_2 = K_1(6K)^{1/3}(2KM_1 + K_1M)^{1/3}. \end{aligned} \quad (11)$$

**Доказательство.** Подставим в оценку (9) равенства для норм из леммы 3 и оценки из леммы 4. Получим:

$$\|f_\delta^\alpha - f\|_{L_\infty} \leq 2(2KM_1 + K_1M)\alpha + \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2} + 2K_1\delta\alpha^{-1} + Q\delta, \quad (12)$$

Теперь сделаем конкретный выбор  $\alpha = \alpha(\delta)$  из разумных соображений, а именно из равенства

$$2(2KM_1 + K_1M)\alpha = \frac{8}{3}K\delta\alpha^{-2}.$$

Отсюда получим формулу (11).

Подставив (11) в (12), получим оценку (10).  $\square$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).*

#### Библиографический список

1. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. 206 с.
3. Хромов А. А. Приближение функции и её производных с помощью модифицированных операторов Стеклова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 4, ч. 2. С. 593–597.



## The Solution of the Problem of Determining the Density of Heat Sources in a Rod

A. A. Khromov<sup>1</sup>, G. V. Khromova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Khromov Aleksandr Avgustovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

<sup>2</sup>Khromova Galina Vladimirovna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KhromovAP@info.sgu.ru

We give a solution of a problem of determining the density of heat sources in the bay, which is set to a fixed temperature, if the temperature is given approximately. Mathematically it is the problem of finding uniform approximations to the right-hand side of the ordinary differential equation when uniform approximations to the solution and values of error are known. First using the so-called discontinuous Steklov operator we construct families of operators which give stable uniform approximations to a function and its first and second derivatives, and then with their help we propose the method of solving the formulated problem. For a certain class of solutions error estimations are given.

*Key words:* inverse problem, Steklov operator, regularization.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 13-01-00238).*

### References

1. Ivanov V. K., Vasimn V. V., Tanana V. P. *Teoriia lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniia* [The theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978, 206 p. (in Russian).
2. Denisov A. M. *Vvedenie v teoriuu obratnykh zadach* [Introduction to the theory of inverse problems]. Moscow, Moscow Univ. Press, 1994, 206 p. (in Russian).
3. Khromov A. A. Approximation of Function and Its Derivative by the Modified Steklov Operator. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 4, pt. 2, pp. 593–597 (in Russian).