5. Lapwood F. R., Usami T. *Free Oscilations of the Earth*. Cambridge, Cambridge University Press, 1981.
6. Gasymov M. G. Determination of Sturm – Liouville equation with a singular point from two spectra. *Sov. Math. Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 396–399.
7. Yurko V. A. Inverse problem for differential equations with a singularity. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, pp. 1100–1107.
8. Yurko V. A. On higher-order differential operators with a regular singularity. *Sb. Math.*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 901–928. DOI: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000048.
9. Yurko V. A. Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval. *Integral Transforms and Special Functions*, 1997, vol. 5, no. 3–4, pp. 309–322.
10. Gorbunov O., Shieh C.-T., Yurko V. Spectral analysis of the Dirac system with a singularity in an interior point. arXiv:1410.2020v1 [math.SP], 17 p.

УДК 517.984

Системы дифференциальных уравнений на оси с регулярными особенностями

О. Б. Горбунов[1], Ч.-Т. Шие[2], В. А. Юрко[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, GorbunovOB@gfm.ru

[2]Профессор, Тамканский университет, г. Тайбэй, Тайвань, ctshieh@mail.tku.edu.tw

[3]Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, yurkova@info.sgu.ru

Исследуются несамосопряженные дифференциальные системы второго порядка на оси с неинтегрируемой регулярной особенностью. Построены специальные фундаментальные системы решений с указанными аналитическими и асимптотическими свойствами. Получена асимптотика соответствующих множителей Стокса.

Ключевые слова: дифференциальные системы, сингулярность, спектральный анализ.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (*проект* № 1.1436.2014K) *и при поддержке РФФИ* (*проект* № 13-01-00134).

Библиографический список

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
2. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht : VSP, 2002.
3. *Литвиненко О. Н., Сошников В. И.* Неоднородные линии и их приложения в радиотехнике. М. : Радио, 1964.
4. *Freiling G., Yurko V. A.* Reconstructing parameters of a medium from incomplete spectral information // Results. Math. 1999. Vol. 35. P. 228–249.
5. *Lapwood F. R., Usami T.* Free Oscilations of the Earth. Cambridge : Cambridge University Press, 1981.
6. *Гасымов М. Г.* Определение уравнения Штурма – Лиувилля с особенностью по двум спектрам // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. С. 274–276.
7. *Юрко В. А.* Обратная задача для дифференциальных уравнений с особенностью // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1355–1362.
8. *Юрко В. А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 133–160.
9. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with differential operators having singularities inside the interval // Integral Transforms and Special Functions. 1997. Vol. 5, № 3–4. P. 309–322.
10. *Gorbunov O., Shieh C.-T., Yurko V.* Spectral analysis of the Dirac system with a singularity in an interior point. arXiv:1410.2020v1 [math.SP]. 17 p.

УДК 517.9

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ И МАТРИЦАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Ю. Дуплищева

Аспирантка кафедры математических методов исследования операций, Воронежский государственный университет, dupl_ayu@mail.ru

Изучаются дифференциальные операторы второго порядка. Приводятся условия их обратимости. Основные результаты получены на основе сопоставления исследуемому оператору операторной матрицы второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, обратимый оператор, ядро оператора, образ оператора.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\mathrm{End}\,X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X с нормой $\|B\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Bx\|$, $x \in X$, $B \in \mathrm{End}\,X$. Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset X \to X$ называется обратимым, если его ядро $\mathrm{Ker}\,A = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ нулевое и образ $\mathrm{Im}\,A = \{Ax, x \in D(A)\}$ оператора A совпадает со всем пространством X.

Далее введем в рассмотрение следующие пространства:

$C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство непрерывных и ограниченных на промежутке $\mathbb{R}$ функций со значениями в банаховом пространстве X;

$L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1,\infty)$ — банахово пространство суммируемых со степенью $p \in [1,\infty)$ на промежутке $\mathbb{R}$ классов функций со значениями в банаховом пространстве X и нормой $\|x\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p\,dt\right)^{1/p}$;

$L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство существенно ограниченных на промежутке $\mathbb{R}$ классов функций со значениями в банаховом пространстве X и нормой $\|x\|_\infty = \mathrm{vrai}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|$;

$C^l(\mathbb{R}) = C^l(\mathbb{R}, X)$ — банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве X, у которых ограничены все производные порядка l и ниже, с нормой $\|x\|_{C^l} = \sum\limits_{|k|\leq l} \|x^k\|_{C_b}$;

$W_p^l(\mathbb{R}) = W_p^l(\mathbb{R}, X)$ — пространство Соболева, $W_p^l(\mathbb{R}) = \{x \in C^{l-1}(\mathbb{R}) : x^{l-1}$ — абсолютно непрерывна, $x^l \in L_p(\mathbb{R})\}$. Норма функции $f \in W_p^l(\mathbb{R})$ определяется при помощи равенства $\|f\|_{W_p^l(\mathbb{R})} = \sum\limits_{|k|\leq l} \|f^k\|_{L_p(\mathbb{R})}$.

Рассмотрим в пространстве L_p дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + B_1(t)\dot{x} + B_2(t)x = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in W_p^2, \qquad p \in [1,\infty], \qquad f \in L_\infty(\mathbb{R}, X), \tag{1}$$

где $B_i \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{End}\,X)$, $i = 1, 2$.

Далее путем замены

$$y_1(t) = x(t), \qquad y_2(t) = \dot{x}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

дифференциальное уравнение вида (1) сводится к уравнению вида

$$\dot{y} + \mathbb{B}(t)y = \tilde{f}(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad y \in W_p^1(\mathbb{R}, X \times X), \qquad p \in [1,\infty], \qquad \tilde{f} \in L_\infty(\mathbb{R}, X \times X), \tag{3}$$

где функция $\mathbb{B} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathrm{End}\,(X \times X))$ имеет вид

$$(\mathbb{B}y)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Из способа задания уравнения (3) по уравнению (1) следует

Теорема 1. *Функция $x \in L_p$ является решением уравнения* (1) *тогда и только тогда, когда $y \in L_p(\mathbb{R}, X \times X)$, построенная по правилу* (2), *является решением уравнения* (3).

Используя операторный подход, уравнение (1) запишем в виде

$$\mathscr{D}x = f,$$

где оператор $\mathscr{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \to L_p(\mathbb{R}, X)$ определяется формулой

$$\mathscr{D}x = \ddot{x} + \tilde{B}_1\dot{x} + \tilde{B}_2 x.$$

Операторы $\tilde{B}_1, \tilde{B}_2 \in \mathrm{End}\,W_p^2$ есть операторы умножения в W_p^2 на операторные функции $B_1, B_2 : \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,X$ соответственно, т. е.

$$(\tilde{B}_k x)(t) = B_k(t)x(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in W_p^2.$$

Уравнение (3) также запишем в операторном виде:

$$\mathbb{D}y = \tilde{f},$$

где $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L}_p \to \widetilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X)$ представим в виде $\mathbb{D}y = \dot{y} + \mathbb{B}y$, где $\dot{y} = (\dot{y_1}, \dot{y_2})$, если $y = (y_1, y_2) \in W_p^1(\mathbb{R}, X \times X)$, и оператор $\mathbb{B} \in \operatorname{End} L_p(\mathbb{R}, X \times X)$ определяется равенствами:

$$(\mathbb{B}x)(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2(t) & B_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Естественным образом возникает вопрос об одновременной обратимости операторов $\mathscr{D}$ и $\mathbb{D}$. Следующая теорема является одним из основных результатов статьи.

Теорема 2. *Оператор $\mathscr{D} \in W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \to L_p(\mathbb{R}, X)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{D} \in W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L}_p \to \widetilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X)$.*

Для линейных операторов и, более того, для линейных отношений в статьях [1–5] было введено понятие состояний обратимости, которое характеризует определенные свойства ядер и образов линейных операторов (их размерность, дополняемость и т. д.). В данном случае, следуя указанным статьям, можно также доказать (получить) совпадение множества состояний обратимости рассматриваемых операторов.

1. АБСТРАКТНЫЙ СЛУЧАЙ

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство. Рассмотрим более общую задачу: $A : D(A) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве $\mathscr{X}$, C_1, C_2 — операторы из алгебры $\operatorname{End} \mathscr{X}$. По ним построим оператор вида

$$\mathscr{A} = A^2 + C_1 A + C_2 : D(\mathscr{A}) \subset \mathscr{X} \to \mathscr{X},$$

где $D(\mathscr{A}) = D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$.

Наряду с оператором $\mathscr{A}$ рассмотрим оператор $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X} \times \mathscr{X}$, заданный в $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ матрицей $\begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}$, т. е. $\mathbb{A}x = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2)$, где $x = (x_1, x_2) \in D(\mathbb{A}) = D(A) \times D(A) \subset \mathscr{X} \times \mathscr{X}$.

В дальнейшем, как правило, для задания оператора $\mathbb{A}$ будем использовать запись

$$\mathbb{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A}).$$

Отметим, что верна следующая

Теорема 3. *Оператор $\mathscr{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\mathbb{A}$.*

Обратимся сначала к доказательству инъективности операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 1. *Ядра операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляет оператор*

$$J : \operatorname{Ker} \mathscr{A} \to \operatorname{Ker} \mathbb{A}, \qquad Jx = (x, Ax), \qquad x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Поскольку $\mathbb{A}(x, Ax) = (0, \mathscr{A}x) = (0, 0)$, то $(x, Ax) \in \operatorname{Ker} \mathbb{A}$, т. е. оператор J определен корректно. Очевидно, что он инъективен. Установим его сюръективность. Пусть $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} \mathbb{A}$. Тогда $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (Ax_1 - x_2, C_2 x_1 + Ax_2 + C_1 x_2) = (0, 0)$. Таким образом, $x_2 = Ax_1$. Поэтому $\mathscr{A}x_1 = C_2 x_1 + A^2 x_1 + C_1 A x_1 = 0$ и, следовательно, $Jx_1 = (x_1, x_2) = (x_1, Ax_1)$, $x_1 \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. $\square$

В следующей лемме используется другой подход, основанный на использовании сопряженных к $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$ операторов. Сопряженный к $\mathscr{A}$ оператор A^* имеет вид

$$\mathscr{A}^* = (A^*)^2 + (A^* B_1^* + B_2^*) : D(\mathscr{A}^*) \subset \mathscr{X}^* \to \mathscr{X}^*,$$

где $D(\mathscr{A}^*) = D((A^*)^2) = \{x \in D(A^*) : A^*x \in D(A^*)\}$. Для описания сопряженного оператора к $\mathbb{A}$ сопряженное $(\mathscr{X} \times \mathscr{X})^*$ к $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ пространство канонически отождествляется с пространством $\mathscr{X}^* \times \mathscr{X}^*$ ($(\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) = \xi_1(x_1) + \xi_2(x_2)$, $(x_1, x_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$, $(\xi_1, \xi_2) = \xi \in \mathscr{X}^* \times \mathscr{X}^*$). Сопряженный к $\mathbb{A}$ оператор $\mathbb{A}^* \in \mathrm{End}\,(\mathscr{X}^* \times \mathscr{X}^*)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} A^* & B_2^* \\ -I & A^* + B_1^* \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Ядра* $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$, $\mathrm{Ker}\,\mathbb{A}^*$ *операторов* $\mathscr{A}^*, \mathbb{A}^*$ *изоморфны. Изоморфизм осуществляет оператор*

$$J_1 : \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^* \to \mathrm{Ker}\,\mathbb{A}^*, \qquad J_1\xi = ((A + B_1)\xi, \xi), \qquad \xi \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$. Поскольку $\mathbb{A}^*((A^* + B_1^*)\xi, \xi) = (0, 0)$, то $J_1\xi \in \mathrm{Ker}\,\mathbb{A}^*$. Таким образом, оператор J_1 корректно определен. Поскольку оператор J_1 инъективен, то осталось доказать его сюръективность. Пусть $(\xi_1, \xi_2) \in \mathrm{Ker}\,\mathbb{A}^*$, и поэтому

$$\mathbb{A}^*(\xi_1, \xi_2) = (A^*\xi_1 + B_2^*\xi_2, \qquad -\xi_1 + (A^* + B_1^*)\xi_2) = (0, 0).$$

Следовательно, $\xi_1 = (A^* + B_1)\xi_2$ и $\mathscr{A}^*\xi_2 = 0$, т. е. $\xi_2 \in \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$. Из этих равенств получаем, что $J_1\xi_1 = (\xi_1, \xi_2) = ((A^* + B_1^*)\xi_1, \xi_1)$. □

В двух следующих леммах отражены вспомогательные утверждения для доказательства одновременной замкнутости образа рассматриваемых операторов.

Лемма 3. *Произвольный элемент* $z \in \mathscr{X}$ *принадлежит образу оператора* $\mathscr{A}$ *тогда и только тогда, когда пара* $(0, z) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ *принадлежит образу оператора* $\mathbb{A}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $z \in \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$, т. е. найдется элемент $x \in \mathscr{X}$ такой, что $z = \mathscr{A}x = (A^2 + C_1A + C_2)x$. Имеют место равенства:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Ax \\ C_2x + (A + C_1)Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Следовательно, устанавливаем, что пара $(0, z)$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что пара $(0, z) \in \mathrm{Im}\,\mathbb{A}$. Тогда найдется пара $(x_1, x_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ такая, что

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Откуда ясно, что $\mathscr{A}x_1 = z$, т. е. z принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$. □

Лемма 4. *Пара* $(y_1, y_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ *принадлежит образу оператора* $\mathbb{A}$ *тогда и только тогда, когда вектор* $y_2 + (A + C_1)y_1$ *принадлежит образу оператора* $\mathscr{A}$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим произвольную пару (y_1, y_2) из образа оператора $\mathbb{A}$. Тогда найдется такая пара $(x_1, x_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X}$, что выполнены равенства:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 - x_2 \\ C_2x_1 + (A + C_1)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_2 = Ax_1 - y_1$, и поэтому $\mathscr{A}x_1 = y_2 + (A + C_1)y_1$, т. е. образ оператора $\mathscr{A}$ представим в требуемом виде.

Достаточность. Пусть пара (y_1, y_2) такова, что $y_2 + (A + C_1)y_1$ принадлежит образу оператора $\mathscr{A}$, т. е. найдется некоторый элемент $x \in \mathscr{X}$, что выполняется равенство: $\mathscr{A}x = y_2 + (A + C_1)y_1$. Докажем, что пара (y_1, y_2) принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$, т. е. найдется такая пара (x_1, x_2) из пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$, что $\mathbb{A}(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. В качестве пары (x_1, x_2) возьмем пару $(x, Ax - y_1)$ из пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$. Рассмотрим цепочку равенств:

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -I \\ C_2 & A + C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ Ax - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax - Ax + y_1 \\ C_2 x + (A + C_1)(Ax - y_1) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} y_1 \\ \mathscr{A}x - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + (A + C_1)y_1 - (A + C_1)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Обратимся теперь к доказательству одновременной замкнутости операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$.

Лемма 5. *Образ оператора $\mathscr{A}$ замкнут тогда и только тогда, когда замкнут образ оператора $\mathbb{A}$.*

Доказательство. *Необходимость.* Для доказательства, воспользуемся результатами леммы 3 и леммы 4. Пусть образ оператора $\mathscr{A}$ замкнут. Рассмотрим последовательность (u_n, v_n), $n \geq 1$, принадлежащую образу оператора $\mathbb{A}$ и сходящуюся к элементу (u_0, v_0) из пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$. Покажем, что (u_0, v_0) принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$. В силу леммы 4 последовательность $v_n + (A + C_1)u_n$ принадлежит образу оператора $\mathscr{A}$. В силу замкнутости образа оператора $\mathscr{A}$ и сходимости $(u_n, v_n) \to (u_0, v_0)$ получаем, что $v_0 + (A + C_1)u_0$ принадлежит образу оператора $\mathscr{A}$. Используя вновь результаты леммы 4, устанавливаем, что пара (u_0, v_0) принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$, что и доказывает замкнутость образа оператора $\mathbb{A}$.

Достаточность. Предположим, что образ оператора $\mathbb{A}$ — замкнутое подпространство из $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$. Докажем замкнутость образа оператора $\mathscr{A}$. Пусть произвольная последовательность $z_n = \mathscr{A}x_n, n \geq 1, x_n \in \mathscr{X}$ сходится к $z_0 \in \mathscr{X}$. Тогда пара $(0, z_n)$ принадлежит образу оператора $\mathbb{A}$ и сходится к элементу $(0, z_0)$, принадлежащему образу оператора $\mathbb{A}$. В силу леммы 3 ясно, что z_0 принадлежит образу оператора $\mathscr{A}$. $\square$

Лемма 6. *Операторы $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$ одновременно обратимы.*

Доказательство. Из сюръективности одного из операторов $\mathscr{A}$, $\mathbb{A}$, из леммы 5 следует замкнутость образа второго. Докажем, что он сюръективен. Для любого линейного подпространства M из $\mathscr{X}$ символом $M^{\perp}$ обозначим (замкнутое) подпространство из $\mathscr{X}^*$ вида: $\{\xi \in \mathscr{X}^* : \xi(x) = 0$ для любого $x \in M\}$. Следовательно, из равенств [6, теорема 4.12]

$$(\operatorname{Im}\mathbb{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathbb{A}^*, \ (\operatorname{Im}\mathscr{A})^{\perp} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$$

следует сюръективность другого оператора. $\square$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

В силу одновременной инъективности и сюръективности операторов $\mathscr{A}$ и $\mathbb{A}$ верно утверждение об их одновременной обратимости, сформулированное в теореме 3. Кроме того, если оператор $\mathscr{A}$ обратим, то непосредственной проверкой убеждаемся в том, что обратный к оператору $\mathbb{A}$ определяется матрицей:

$$\begin{pmatrix} \mathscr{A}^{-1}(A + C_1) & \mathscr{A}^{-1} \\ A\mathscr{A}^{-1}(A + C_1) - I & A\mathscr{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим оператор $\mathscr{L}_p : W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \to L_p(\mathbb{R}, X)$, $\mathscr{L}_p x = \ddot{x} + A(t)\dot{x} + B(t)x$, $x \in W_p^2$, $p \in [1, \infty]$, и поставим ему в соответствие оператор

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \widetilde{\mathscr{L}_p} = \frac{d}{dt} - \widetilde{A} : W_p^1 \times W_p^1 \subset \widetilde{L}_p \to \widetilde{L}_p = L_p(\mathbb{R}, X) \times L_p(\mathbb{R}, X),$$

где операторнозначная функция $\widetilde{A} : \mathbb{R} \to \operatorname{End}(X \times X)$ задаётся с помощью матричной функции:

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ A(t) & B(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Операторы* $\mathscr{L}_p : W_p^2 \subset L_p \to L_p$, $\widetilde{\mathscr{L}_p} : W_p^1 \times W_p^1 \subset L_p \times L_p \to L_p \times L_p$, $p \in [1, \infty]$, *обратимы одновременно.*

В частном случае, когда X — конечномерное пространство, а операторнозначные функции A и B почти периодичны, утверждение теоремы 4 приведено в монографии [7].

Отмечу вышедшую из печати статью [8], в которой в качестве оператора A рассматривается оператор сдвига в пространстве двусторонних ограниченных последовательностей векторов. В отличие от данной статьи удается рассмотреть значительно большее число свойств разностного оператора. При этом существенно использовались результаты статьи [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты* № 13-01-00378, № 14-01-31196).

Библиографический список

1. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // УМН. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128. DOI: 10.4213/rm9505.
2. *Баскаков А. Г.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73, № 2. С. 3–68. DOI: 10.4213/im2643.
3. *Диденко В. Б.* О непрерывной обратимости и фредгольмовости дифференциальных операторов с многозначными импульсными воздействиями // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77, № 1. С. 5–22. DOI: 10.4213/im7800.
4. *Диденко В. Б.* О состояниях обратимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными периодическими коэффициентами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 2. С. 5–22.
5. *Дуплищева А. Ю.* Матрицы второго порядка в исследовании операторных уравнений // Научные ведомости БелГУ. Матем., физ. 2014. Вып. 34, № 5(176). С. 12–16.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М. : Мир, 1975. 449 с.
7. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. М. : Наука, 1970. 352 с.
8. *Баскаков А. Г., Дуплищева А. Ю.* Разностные операторы и операторные матрицы второго порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79, № 2. С. 3–20.
9. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190. DOI: 10.4213/mzm10285.

About Differential Operators and Matrices of the Second Order

A. Yu. Duplishcheva

Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., 304006, Voronezh, Russia, dupl_ayu@mail.ru

Differential operators of the second order are studied. Conditions of their invertibility are obtained. The main results are obtained on the comparison of the operator matrix of the second order with the researching operator.

Key words: differential operator, invertible operator, kernel of the operator, image of the operator.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*projects no.* 13-01-00378, *no.* 14-01-31196).

References

1. Baskakov A. G. Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Russ. Math. Surv.* [UMN], 2013, vol. 68, no. 1, pp. 69–116. DOI: 10.1070/RM2013v068n01ABEH004822.
2. Baskakov A. G. Spectral analysis of differential operators with unbounded operatorvalued coefficients, difference relations and semigrouos of difference relations. *Izv. Math.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 215–278. DOI: 10.1070/IM2009v073n02ABEH002445.
3. Didenko V. B. On the continuous invertibility and the Fredholm property of differential operators with multivalued impulse effects. *Izv. Math.*, 2013, vol. 77, no. 1, pp. 3–19. DOI: 10.1070/IM2013v077n01ABEH002626.
4. Didenko V. B. About reversibility states of linear differential operators with periodic unbounded operator coefficients. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–22 (in Russian).
5. Duplishcheva A. Yu. Second order matrices at the researching of operator equations. *Nauchniye vedomosty BelGU. Matem., phis.* [Belgorod State University Scienti-

fic Bulletin. Mathematics & Physics], 2014, iss. 34, no. 5(176), pp. 12–16 (in Russian).
6. Rudin U. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973, 424 p. (Rus. ed. : Rudin U. Functional analysis. Moscow, Mir, 1975, 449 p.)
7. Krasnoselsky M. A., Burd V. Sh., Kolesov Yu. S. *Nelineyniye pochty periodicheskiye kolebaniya* [Nonlinear almost periodic fluctuations]. Moscow, Nauka, 1970, 352 p. (in Russian).
8. Baskakov A. G., Duplishcheva A. Yu. Difference operators and operator matrices of the second order. *Izv. RAN. Ser. Matem.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 3–20 (in Russian).
9. Baskakov A. G. Harmonic and Spectral Analysis of Power Bounded Operators and Bounded Semigroups of Operators on Banach Spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.1134/S0001434615010198.

УДК 511.3

ОБОБЩЁННЫЕ ХАРАКТЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ И АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ Н. Г. ЧУДАКОВА

В. А. Матвеев[1], О. А. Матвеева[2]

[1]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com
[2]Аспирантка кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

В случае числовых характеров известная гипотеза Н. Г. Чудакова, высказанная им в 1950 году, предполагает, что конечнозначный числовой характер $h(n)$, удовлетворяющий условиям: 1) $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p; 2) $S(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n) = \alpha x + O(1)$, является характером Дирихле. Числовой характер, удовлетворяющий условиям гипотезы Н. Г. Чудакова, получил название *обобщённого характера*: главного в случае $\alpha \neq 0$ и неглавного, в противном случае. Для главных обобщённых характеров гипотеза Н. Г. Чудакова была доказана в 1964 году; для неглавных обобщённых характеров эта гипотеза остаётся открытой и по настоящее время. В работе даётся определение обобщённого характера в случае характеров числовых полей, высказывается аналог гипотезы Н. Г. Чудакова и приводится доказательство этого предположения в случае главных обобщённых характеров.

Ключевые слова: гипотеза Чудакова, обобщённые числовые характеры.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, а χ — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов поля $\mathbb{K}$.

Определение 1. Характер χ будем называть *обобщённым характером*, если выполняются следующие условия:
1) $\chi(\mathfrak{p}) \neq 0$ почти для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ поля $\mathbb{K}$;
2) $S(x) = \sum\limits_{\substack{\mathfrak{a},\\ N(\mathfrak{a}) \le x}} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$.

При этом обобщённый характер χ будем называть главным обобщённым характером, если $\alpha \neq 0$, и неглавным, в противном случае.

Замечание 1. В общем случае даже для характеров Дирихле числовых полей известна [1] только оценка вида

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a},\\ N(\mathfrak{a}) \le x}} \chi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi \neq \chi_0, \\ \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi = \chi_0, \end{cases}$$

где γ — некоторое натуральное число.

В данной работе мы укажем класс числовых полей, для которых существуют обобщённые характеры, выскажем аналог гипотезы Н. Г. Чудакова [2–4] о том, что такие характеры являются характерами Дирихле, и докажем это предположение для главных обобщённых характеров.