set of smooth functions in the space of functions of bounded p-variation. *Math. Notes*, 1995, vol. 57, iss. 2, pp. 148–157.

5. Lorentz G. G. Metric entropy and approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1966, vol. 72, no. 6, pp. 903–927.

6. Edwards R. *Fourier Series: A modern introduction. Vol. 1.* New York, Springer, 1982, 234 p.

7. Ibragimov I. I. On best approximation of a function whose s-th derivative has bounded variation on segment $[-1, 1]$. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 90, no. 1. pp. 13–15 (in Russian).

8. DeVore R., Lorentz G. G. *Constructive approximation*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1993, 449 p.

9. Korneichuk N. P. *Exact Constants in Approximation Theory*, 2009, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 468 p.

10. Nasibov F. G. On the order of best approximations of functions havong fractional derivative in Riemann – Liouville sense. *Izv. AN Azerb. SSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1962, no. 3, pp. 51–57 (in Russian).

11. Clements G. F. Entropies of several sets of real valued functions. *Pacific J. Math.*, 1963, vol. 13, no. 4, pp. 1085–1095.

УДК 517.97

ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ

А. В. Фоминых

Аспирант кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, alexfomster@mail.ru

В статье рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ. Эта задача сводится к вариационной задаче минимизации некоторого функционала на всём пространстве. Для данного функционала выписываются необходимые условия минимума. На основании этих условий описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приводятся численные примеры реализации этих методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Ключевые слова: вариация, задача Коши, квадратичный функционал, градиент Гато, метод наискорейшего спуска, метод сопряжённых направлений.

ВВЕДЕНИЕ

Существует много методов решения задачи Коши, например, метод последовательных приближений Пикара, метод ломаных Эйлера, серия методов Рунге – Кутты. В работе [1] задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к вариационной задаче минимизации некоторого строго выпуклого функционала на всём пространстве. В данной статье этот подход распространяется на нелинейную систему ОДУ. Для поиска стационарных точек функционала используются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений, которые относятся к прямым методам вариационного исчисления.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

с заданным начальным условием

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, $x(t)$ — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, где $C_n^1[0, T]$ — пространство n-мерных вектор-функций, непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$, $f(x, t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, x_0 — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (1), которое удовлетворяет начальному условию (2). Будем считать, что для (1), (2) выполнены условия теоремы Пикара. Тогда решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно.

© Фоминых А. В., 2014

2. СВЕДЕНИЕ К ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Положим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0,T]$, где $C_n[0,T]$ — пространство n-мерных вектор-функций, непрерывных на $[0,T]$. Тогда с учётом (2) $x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau$. Требуется найти такую вектор-функцию $z(t)$, которая удовлетворяет системе

$$z(t) = f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, t\big). \tag{3}$$

Введём в рассмотрение функционал

$$I(z) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(\varphi(z,t), \varphi(z,t)\big)\,dt, \tag{4}$$

где

$$\varphi(z,t) = z(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, t\big).$$

Нетрудно видеть, что функционал (4) не отрицателен для всех $z \in C_n[0,T]$ и обращается в ноль в точке z^* тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи Коши (1), (2) или (3).

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ МИНИМУМА

Рассмотрим дифференциальные свойства функционала $I(z)$. Заметим, что из выполнения условий теоремы Пикара следуют существование и непрерывность матрицы $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ частных производных.

Лемма 1. *Функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато, и его «градиент» в точке z выражается по формуле*

$$\nabla I(z) = z(t) - f(z,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(z,\tau)\big)\,d\tau, \tag{5}$$

где «$'$» означает операцию транспонирования.

Доказательство. Рассмотрим классическую вариацию функционала (4). Пусть $v \in C_n[0,T]$, $\alpha > 0$. Вычислим

$$I(z+\alpha v) = \frac{1}{2}\int_0^T \Big(z(t) + \alpha v(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, t\big),$$
$$z(t) + \alpha v(t) - f\big(x_0 + \int_0^t z(\tau) + \alpha v(\tau)d\tau, t\big)\Big)\,dt =$$
$$= I(z) + \alpha \int_0^T \Big(z(t) - f(z,t), v(t) - \frac{\partial f(z,t)}{\partial x}\int_0^t v(\tau)d\tau\Big)\,dt + o(\alpha),$$

где $\dfrac{o(\alpha)}{\alpha} \downarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$. Далее, имеем:

$$I'(z,v) = \lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{I(z+\alpha v) - I(z)}{\alpha} = \int_0^T \big(z(t) - f(z,t), v(t)\big)dt -$$
$$- \int_0^T \Big(\int_t^T \Big(\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z(\tau) - f(z,\tau)\big)d\tau, v(t)\Big)dt = \int_0^T \big(\nabla I(z), v(t)\big)dt,$$

и формула (5) доказана.

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (4), необходимо [2] выполнение соотношения

$$z^*(t) - f(z^*,t) - \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z^*,\tau)}{\partial x}\Big)'\big(z^*(\tau) - f(z^*,\tau)\big)\,d\tau = 0_n \qquad \forall\ t \in [0,T], \tag{6}$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $C_n[0,T]$.

4. МЕТОД НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Опишем вначале следующий метод наискорейшего спуска [3] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6), то z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) + \gamma_k G(z_k,t), \tag{7}$$

где $G(z_k,t)$ представляет собой антиградиент функционала $I(z)$ в точке z_k, который с учётом (5) находится по формуле

$$G(z_k,t) = -z_k(t) + f(z_k,t) + \int_t^T \Big(\frac{\partial f(z_k,\tau)}{\partial x}\Big)' \big(z_k(\tau) - f(z_k,\tau)\big)\, d\tau, \tag{8}$$

а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma \geqslant 0} I(z_k + \gamma G(z_k,t)) = I(z_k + \gamma_k G(z_k,t)). \tag{9}$$

В силу (9) $I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то благодаря непрерывности $G(z_k,t)$ как функции z описанный метод сходится [4] в следующем смысле

$$||G(z_k,t)|| = \sqrt{\int_0^T G^2(z_k,t)dt} \to 0,\ k \to \infty.$$

Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя её точка является стационарной точкой функционала $I(z_k)$ по построению.

5. МЕТОД СОПРЯЖЁННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Опишем теперь следующий метод сопряжённых направлений [5] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$.

Фиксируем произвольное $z_1 \in C_n[0,T]$. Пусть уже построено $z_k \in C_n[0,T]$. Если выполнено необходимое условие минимума (6), то z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$, и процесс прекращается. В противном случае положим

$$z_{k+1}(t) = z_k(t) + \gamma_k W(z_k,t), \tag{10}$$
$$W(z_0,t) = G(z_0,t), \qquad W(z_k,t) = G(z_k,t) + \beta_k W(z_{k-1},t),$$

где $G(z_k,t)$ определяется формулой (8), а γ_k является решением следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma \geqslant 0} I(z_k + \gamma W(z_k,t)) = I(z_k + \gamma_k W(z_k,t)). \tag{11}$$

Величину β_k можно искать по-разному. Для нахождения β_k наиболее распространены правило Флетчера – Ривса:

$$\beta_k = \frac{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_k,t), G(z_k,t)\big)\ dt}{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_{k-1},t), G(z_{k-1},t)\big)\ dt}$$

и правило Полака – Райбера:

$$\beta_k = \frac{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_k,t), G(z_k,t) - G(z_{k-1},t)\big)\, dt}{\displaystyle\int_0^T \big(G(z_{k-1},t), G(z_{k-1},t)\big)\, dt}.$$

В силу (11) $I(z_{k+1}) \leqslant I(z_k)$. Из (7) и (10) видно, что на первой итерации метод сопряжённых направлений и метод наискорейшего спуска совпадают. Метод сопряжённых направлений обычно оказывается более эффективным, чем метод наискорейшего спуска. Например, при минимизации выпуклых квадратичных функций в конечномерных задачах метод сопряжённых направлений сходится за конечное число итераций, в отличие от метода наискорейшего спуска, который в общем случае сходится лишь в пределе.

6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Для иллюстрации метода наискорейшего спуска рассмотрим следующий пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\dot{x} = -x^2, \qquad x(0) = 1.$$

Зададим $T = 1$. Аналитическое решение имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{t+1}.$$

В табл. 1 приведены результаты вычислений с помощью метода наискорейшего спуска. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = 0$, а тогда $x(t) = 1$. Из табл. 1 видно, что на 3 итерации погрешность не превышает величины 2×10^{-5}.

Таблица 1

k	$I(z_k)$	$\|z^* - z_k\|$	$\|x^* - x_k\|$	$\|G(z_k)\|$
1	0.5	0.54006	0.3372	1.0408
2	0.00318	0.07374	0.01472	0.04325
3	0.0000153	0.0048	0.00087	0.00036

Для иллюстрации метода сопряжённых направлений рассмотрим ещё один пример. Пусть требуется решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2, \end{cases}$$
$$x_1(0) = 3, \qquad x_2(0) = 1.$$

Такие системы встречаются при моделировании жизнедеятельности популяций и описывают взаимодействие хищников с жертвами. Приведённая система уравнений является одной из самых известных для описания динамики взаимодействующих популяций и носит название модели Вольтерра – Лотка [6]. Здесь x_1 — количество жертв, x_2 — количество хищников. Коэффициенты a, b, c, d — положительны, a — скорость размножения жертв в отсутствии хищников, b характеризует сокращение количества жертв из-за хищников, c — скорость вымирания хищников в отсутствии жертв, d характеризует компенсацию количества хищников за счёт жертв. Зададим: $T = 1$, $a = b = c = d = 1$.

В табл. 2 приведены результаты вычислений с помощью метода сопряжённых направлений. В качестве начального приближения взята точка $z(t) = [t, t]$, а тогда $x(t) = [3 + t^2/2, 1 + t^2/2]$. Из табл. 2 видно, что на 6 итерации погрешность не превышает величины 3×10^{-2}.

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	6
$I(z_k)$	2.9974	1.6008	1.2617	0.4419	0.0591	0.0207
$\|G(z_k)\|$	4.6257	2.1201	1.3691	0.6875	0.7836	0.1608

7. ДОПОЛНЕНИЕ

Дополнительно исследуем задачу Коши, когда система ОДУ не разрешена относительно производных, то есть рассмотрим задачу

$$g(x, \dot{x}, t) = 0_n, \qquad t \in [0, T], \tag{12}$$
$$x(0) = x_0. \tag{13}$$

Здесь T — некоторый фиксированный момент времени, $x(t)$ — искомая вектор-функция фазовых координат, $x \in C_n^1[0, T]$, $g(x, \dot{x}, t)$ — заданная вещественная n-мерная вектор-функция, x_0 — заданный вектор. Требуется найти такое решение системы (12), которое удовлетворяет начальному условию (13). Предполагаем $g(x, \dot{x}, t)$ непрерывно дифференцируемой по x и $\dot{x}$ и непрерывной по всем трём аргументам. Будем считать, что решение задачи Коши (12), (13) существует и единственно. Так же, как и в задаче (1), (2), положим: $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in C_n[0, T]$.

Введём в рассмотрение функционал

$$J(z) = \frac{1}{2}\int_0^T \big(g(z,t), g(z,t)\big)dt, \tag{14}$$

где $g(z,t) = g\big(x_0 + \int_0^t z(\tau)d\tau, z(t), t\big)$.

Нетрудно видеть, что функционал (14) не отрицателен для всех $z \in C_n[0,T]$ и обращается в ноль в точке z^* тогда и только тогда, когда z^* — решение задачи Коши (12), (13).

Можно показать, что для задачи (12), (13) справедлива лемма, аналогичная лемме 1 для задачи (1), (2).

Лемма 2. *Функционал $J(z)$ дифференцируем по Гато, и его «градиент» в точке z выражается по формуле*

$$\nabla J(z) = \int_t^T \Big(\frac{\partial g(z,t)}{\partial x}\Big)' g(z,t)d\tau + \Big(\frac{\partial g(z,t)}{\partial z}\Big)' g(z,t).$$

Отсюда заключаем, что для того чтобы вектор-функция z^* была точкой минимума функционала (14), необходимо [2] выполнение соотношения

$$\int_t^T \Big(\frac{\partial g(z^*,\tau)}{\partial x}\Big)' g(z^*,\tau)d\tau + \Big(\frac{\partial g(z^*,t)}{\partial z}\Big)' g(z^*,t) = 0_n \ \forall t \in [0,T].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной статье задача Коши с нелинейной системой (1) и начальным условием (2) сводится к минимизации функционала (4) на всём пространстве. Для этого функционала выписан градиент Гато, найдены необходимые условия минимума. На основании условий минимума описываются метод наискорейшего спуска и метод сопряжённых направлений для рассматриваемой задачи. Приведены численные примеры реализации описанных методов. Дополнительно исследуется задача Коши с системой, не разрешённой относительно производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проекты №* 12-01-00752, 14-01-31521 мол_а), *гранта Санкт-Петербургского государственного университета* (*проект №* 9.38.205.2014).

Библиографический список

1. *Тамасян Г. Ш.* Градиентные методы решения задачи Коши // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 4. С. 224–230.
2. *Васильев Л. В., Демьянов В. Ф.* Недифференцируемая оптимизация. М. : Наука, 1981. 384 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М. : Наука, 1977. 741 с.
4. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. М. : Высш. шк., 2005. 335 с.
5. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М. : Факториал Пресс, 2002. 824 с.
6. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями : пер. с англ. М. : Мир, 1986. 243 с.

The Gradient Methods for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear ODE System

A. V. Fominyh

Saint Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russia, alexfomster@mail.ru

The article considers the Cauchy problem for a nonlinear system of ODE. This problem is reduced to the variational problem of minimizing some functional on the whole space. For this functional necessary minimum conditions are presented. On the basis of these conditions the steepest descent method and the method of conjugate directions for the considered problem are described. Numerical examples of the implementation of these methods are presented. The Cauchy problem with the system which is not solved with respect to derivatives is additionally investigated.

Key words: variation, Cauchy problem, square functional, Gato gradient, steepest descent method, conjugate directions method.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*projects no.* 12-01-00752, 14-01-31521 mol_a), *grant St. Petersburg State University* (*projects no.* 9.38.205.2014).

References

1. Tamasyan G. Sh. The gradient methods for solving the Cauchy problem. *Vestnik St. Petersburg University*. Ser. 10, 2009, iss. 4, pp. 224–230 (in Russian).
2. Vasilyev L. V., Demyanov V. F. *Nedifferenciruemaja optimizacija* [Nondifferentiable optimization]. Moscow, Nauka, 1981. 384 p. (in Russian).
3. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1977. 741 p. (in Russian).
4. Demyanov V. F. *Usloviya ekstremuma i variacionnoe ischislenie* [Extremum conditions and variation calculus]. Moscow, Vysshaya shkola, 2005. 335 p. (in Russian).
5. Vasilyev F. P. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. Moscow, Faktorial Press, 2002. 824 p. (in Russian).
6. Arrowsmith D. K., Place C. M. *Ordinary differential equations. A qualitative approach with applications*. London, Chapman and Hall, 1982. 243 p.

УДК 512.5

НОВЫЕ СВОЙСТВА ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЭКСПОНЕНТЫ ДВА

О. В. Шулежко

Аспирантка кафедры алгебро-геометрических вычислений, Ульяновский государственный университет, ol.shulezhko@gmail.com

В данной работе исследуются числовые характеристики почти нильпотентного многообразия экспоненты два, впервые построенного в статье [1]. Основным результатом данной работы является нахождение точных значений кратностей неприводимых модулей, входящих в разложение полилинейной части многообразия. В качестве следствия получены формулы для коразмерности и кодлины изучаемого многообразия.

Ключевые слова: многообразие, экспонента многообразия, коразмерность, кодлина.

Совокупность алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, называется многообразием. Многообразие будем называть почти нильпотентным, если оно само не является нильпотентным, но каждое собственное его подмногообразие нильпотентно. Основой для работы послужила статья [1], в которой впервые был построен пример почти нильпотентного многообразия, рост которого экспоненциален. Более точно было доказано, что асимптотически последовательность коразмерностей этого многообразия ведет себя как 2^n, т. е. так называемая, экспонента этого многообразия равна двум. Целью данной работы является вычисление основных числовых характеристик этого многообразия. Заметим, что так как в рассматриваемых алгебрах не предполагается выполнения тождества ассоциативности, то в произведениях следует следить за расстановкой скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, например, $xyz = (xy)z$.

Обозначим через Φ основное поле, которое на протяжении всей работы имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые понятия можно найти в книге [2]. Для удобства читателей приведем определения основных понятий, которые используются в данной работе. В свободной алгебре многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ рассмотрим множество полилинейных элементов степени n от $x_1, x_2, \dots, x_n$. Они образуют векторное пространство $P_n(\mathbf{V})$, называемое полилинейной компонентой степени n относительно свободной алгебры. Размерность этого пространства обозначим $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$ Хорошо известно, что полилинейную компоненту степени n можно рассматривать как модуль над групповым кольцом ΦS_n симметрической группы S_n, задавая действие перестановки на индексах образующих. Известно, что с точностью до изоморфизма неприводимые ΦS_n модули можно описывать на языке разбиений и диаграмм Юнга. Разбиением числа n называют набор целых положительных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, при этом $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$ и $n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Разбиение λ числа n обозначают следующим образом: $\lambda \vdash n$. Для каждого такого разбиения λ строится диаграмма Юнга, состоящая из k строк, причем строка с номером i должна содержать λ_i клеток.

Так как характеристика основного поля равна нулю, то по теореме Машке полилинейную часть степени n можно разложить в прямую сумму неприводимых подмодулей. Строение модуля $P_n(\mathbf{V})$ можно представить на «языке характеров». Рассмотрим разложение характера модуля $P_n(\mathbf{V})$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(\mathbf{P_n}(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash \mathbf{n}} \mathbf{m}_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \tag{1}$$

© Шулежко О. В., 2014