

# МЕХАНИКА

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОМ СЛОЕ

Н. С. Анофрикова<sup>1</sup>, Н. В. Сергеева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anofrikovans@info.sgu.ru

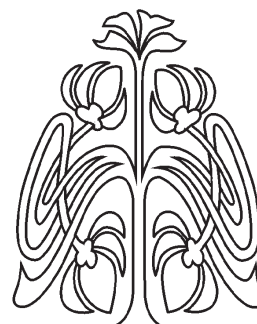
<sup>2</sup>Старший преподаватель кафедры теории вероятностей, математической статистики и управления стохастическими процессами, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, knickknack@bk.ru

Работа посвящена исследованию гармонических волн в наследственно-упругом слое, свойства материала которого описываются уравнениями состояния в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора выбрана дробно-экспоненциальная функция Работнова. Рассмотрены два случая: случай симметричного и антисимметричного по нормальной координате напряженно-деформированного состояния (НДС). При изучении собственных колебаний исследованы свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону. Для обоих случаев выведены дисперсионные уравнения, которые решены численно. Также получены асимптотики корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот. Анализ полученных решений позволил сделать выводы о влиянии наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых. Проведен сравнительный анализ численных решений и их асимптотик.

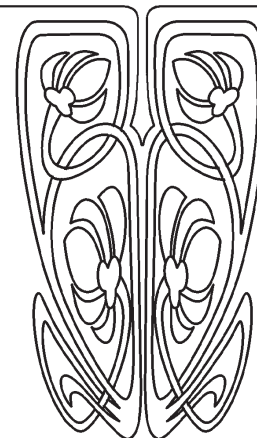
*Ключевые слова:* дисперсионные уравнения, напряженно-деформированное состояние, наследственно-упругий слой, асимптотики.

### ВВЕДЕНИЕ

История исследований, посвященных изучению процессов распространения гармонических волн в упругих волноводах, насчитывает уже более 130 лет. За это время появилось огромное число публикаций, в которых всесторонне исследованы упругие волноводы различной геометрии. Обзору основных моментов данной истории и наиболее ярких публикаций посвящена, например, статья [1]. Тем не менее, подобные задачи до сих пор вызывают интерес исследователей всего мира. Но колебательным процессам подвержены не только упругие конструкции. В последние десятилетия не меньший интерес вызывает поведение различных конструкций, выполненных из неупругих материалов, в том числе наследственно-упругих. В отличие от упругих волноводов, проблемам распространения гармонических волн в наследственно-упругих телах посвящено не так много работ, при этом авторы прибегают исключительно к численным методам решения поставленных задач. Известно, что большую часть информации о поведении волновода предоставляет дисперсионное уравнение. Асимптотики решений указанных уравнений делают более удобным качественный анализ наследственно-упругого поведения, а также позволяют использовать их при решении задач о вынужденных колебаниях соответствующих волноводов. В работе



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





проведен как численный, так и асимптотический анализы дисперсионных уравнений, полученных при исследовании процесса распространения гармонических волн в наследственно-упругом слое.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном наследственно-упругом слое, ограниченном плоскостями  $z = \pm h$  в декартовой системе координат (рис. 1). Плоскость  $Oxy$  совместим со срединной поверхностью слоя. Будем рассматривать распространение волн в направлении оси  $x$ .

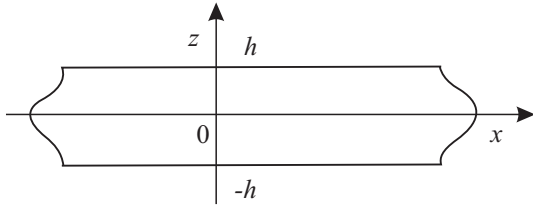


Рис. 1. Бесконечный наследственно-упругий слой, ограниченный плоскостями  $z = \pm h$

Динамическое НДС слоя будем описывать уравнениями движения для случая плоской задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

и уравнениями состояния для наследственно-упругого материала.

В настоящей работе уравнения состояния берем в интегральной операторной форме

$$\begin{cases} \tilde{E} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \sigma_{11} - \tilde{\nu}(\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ \tilde{E} \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sigma_{33} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ 0 = \sigma_{22} - \tilde{\nu}(\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ \frac{1}{2} \tilde{E} \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = (1 + \tilde{\nu})\sigma_{13}. \end{cases} \quad (2)$$

В (1) и (2) приняты следующие обозначения:  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $v_i$  — компоненты вектора перемещений,  $\rho$  — плотность материала,  $t$  — время,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{\nu}$  — интегральные операторы, определяемые формулами

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \Gamma^*, \quad \Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \mathfrak{E}_{-1/2}(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

$E$ ,  $\nu$  — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона,  $k$ ,  $\beta$  — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора будем использовать дробно-экспоненциальную функцию Работнова [2]

$$\mathfrak{E}_{-1/2}(-\beta, t) = t^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma((n+1)/2)},$$

где  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy$  — гамма-функция.

При изучении собственных колебаний будем исследовать свойства тех мод<sup>1</sup>, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения (1), уравнениям состояния (2) и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (4)$$

Решение для перемещений  $v_i$  будем искать в виде

$$v_i = V_i(z) \exp(i\omega t - (\delta + i\chi)x), \quad \delta > 0, \quad (5)$$

где  $\omega$  — частота,  $\delta$  — коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты  $x$ ,  $\chi$  — волновое число.

<sup>1</sup>Под модами понимаются частные решения уравнений движения в перемещениях, удовлетворяющие однородным граничным условиям на лицевых поверхностях.



## 2. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

С учетом (3) и (5) уравнения состояния (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} EE^F \frac{\partial v_1}{\partial x} = \sigma_{11} - \nu^F (\sigma_{22} + \sigma_{33}), \\ EE^F \frac{\partial v_3}{\partial z} = \sigma_{33} - \nu^F (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ 0 = \sigma_{22} - \nu^F (\sigma_{11} + \sigma_{33}), \\ \frac{1}{2} EE^F \left( \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) = (1 + \nu^F) \sigma_{13}, \end{cases}$$

где

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}.$$

Введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad t_* = \frac{c_2 t}{h},$$

где  $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ .

Рассмотрим случай симметричного по нормальной координате НДС. В этом случае перемещение  $v_1$  и напряжения  $\sigma_{11}, \sigma_{33}$  являются четными по нормальной координате функциями, а  $v_3, \sigma_{13}$  — нечетными. В результате стандартной процедуры приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} - a^2 \tilde{\chi}^2 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) = 0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \kappa_F^2 \Omega_*^2, & b^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \Omega_*^2, & \kappa_F^2 &= \frac{1 - 2\nu_*^F}{2 - 2\nu_*^F}, & \gamma^2 &= \tilde{\chi}_*^2 - \frac{\Omega_*^2}{2}, \\ \Omega_*^2 &= \omega_*^2 \frac{1 + \nu_*^F}{E_*^F (1 + \nu)}, & \omega_* &= \frac{h}{c_2} \omega, & i\tilde{\chi}_* &= -\delta_* - i\chi_*, & \delta_* &= h\delta, & \chi_* &= h\chi, \\ E_*^F &= 1 - \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & \nu_*^F &= \nu + \frac{1 - 2\nu}{2} \frac{k_*}{\beta_* + \sqrt{i\omega_*}}, & \beta_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}} \beta, & k_* &= \sqrt{\frac{h}{c_2}} k. \end{aligned}$$

В дальнейшем звездочки у безразмерных величин опускаем.

В случае антисимметричного по нормальной координате НДС, когда  $v_1, \sigma_{11}, \sigma_{33}$  являются нечетными по  $\zeta$ , а  $v_3, \sigma_{13}$  — четными, приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \frac{\sinh(a)}{a} \cosh(b) - b^2 \tilde{\chi}^2 \cosh(a) \frac{\sinh(b)}{b} = 0, \quad (7)$$

где все величины, входящие в уравнение (7), имеют тот же смысл, что и ранее.

Формально дисперсионные уравнения (6) и (7) имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого слоя [3], но, в отличие от последних, левая часть каждого из уравнений в наследственно-упругом случае является комплексно-значной функцией.

Дисперсионные уравнения (6) и (7) были решены численно. Использовались два метода: метод математического микроскопа [4] и метод продолжения решения по параметру [5]. Результаты, полученные этими методами, совпадают.

## 3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

На рис. 2,  $a$ - $g$  изображены проекции дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  для некоторых значений параметров материала в случае симметричного НДС. На рис. 2,  $a$ - $g$  знак «+» над номером ветки соответствует значениям  $\delta < 0$ , а знак «-» — значениям  $\delta > 0$ .

На рис. 3,  $a$ - $g$  изображены проекции дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  для тех же значений параметров материала в случае антисимметричного НДС.

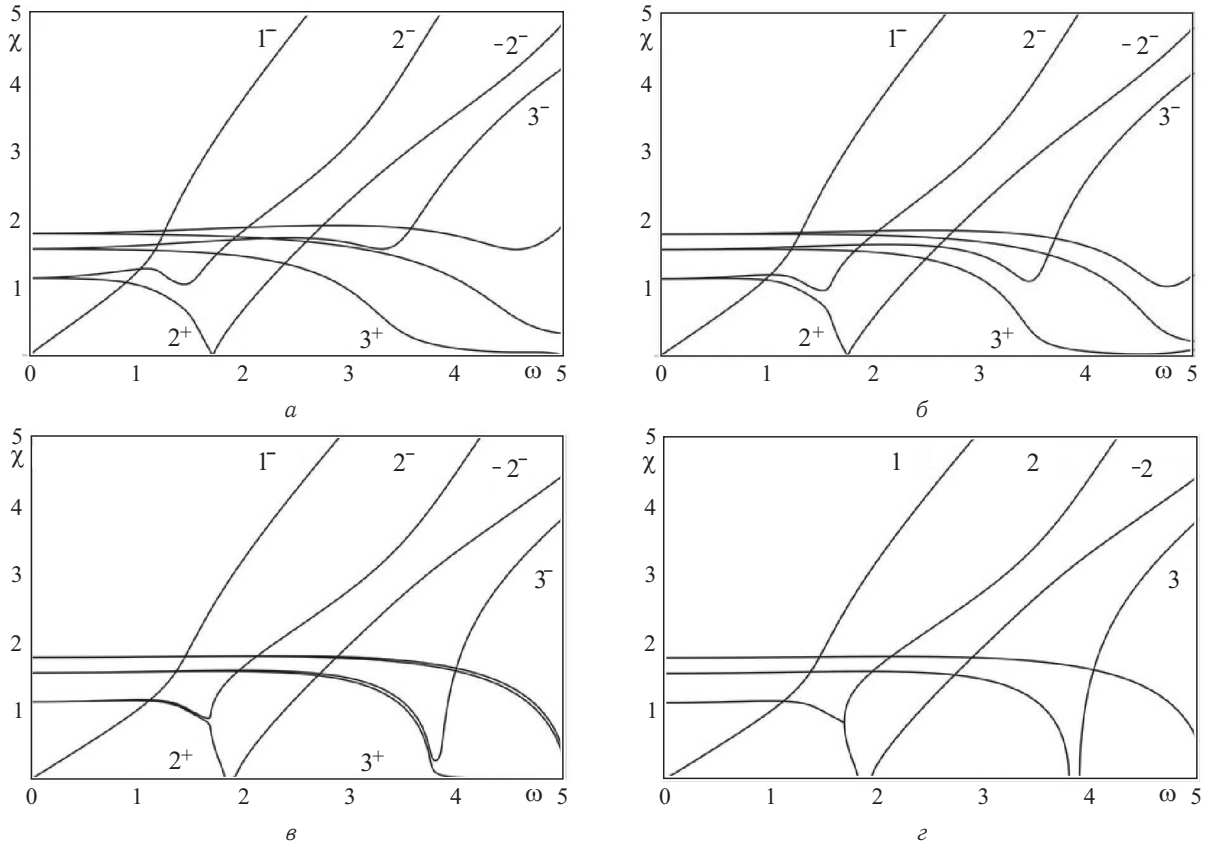


Рис. 2. Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  (симметричный случай): а – при  $k = 0.53, \beta = 1$ ; б – при  $k = 0.53, \beta = 2$ ; в – при  $k = 0.05, \beta = 1$ ; г – при  $k = 0$

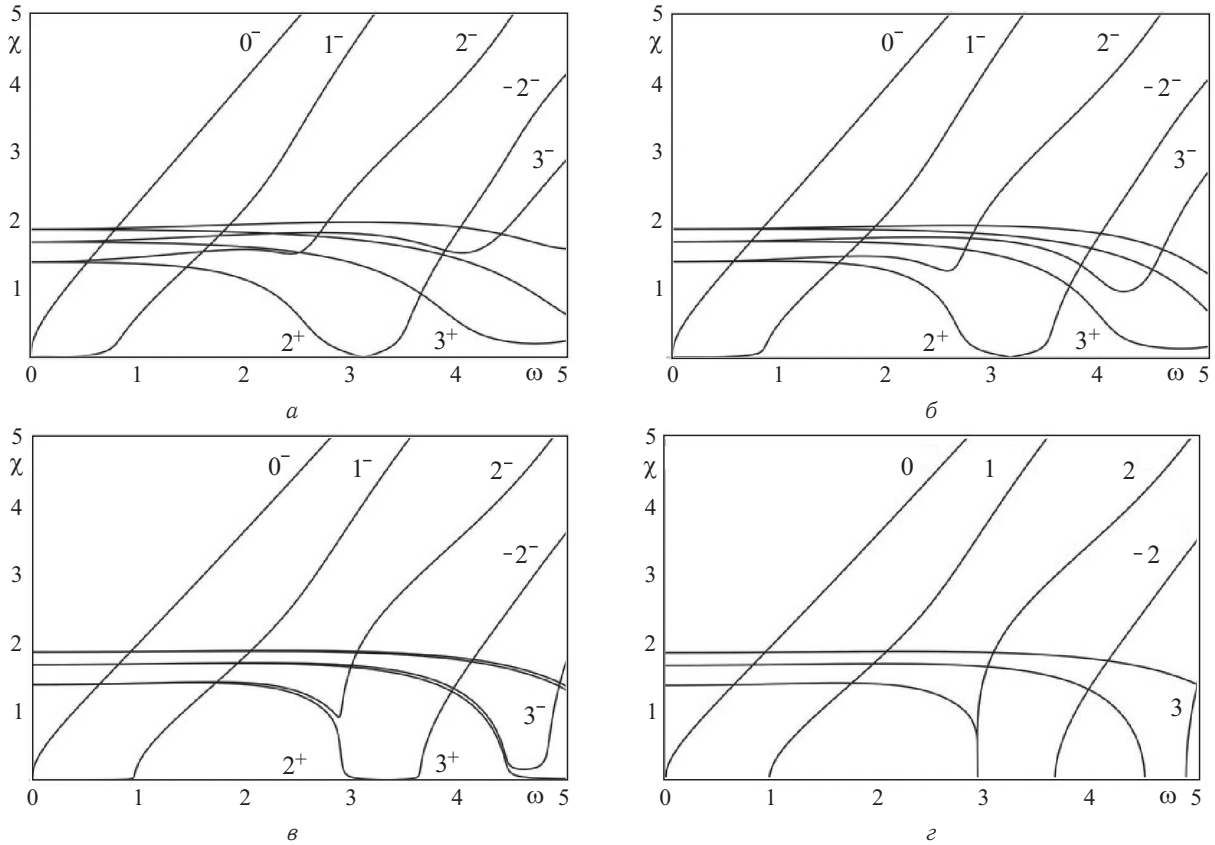


Рис. 3. Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  (антисимметричный случай): а – при  $k = 0.53, \beta = 1$ ; б – при  $k = 0.53, \beta = 2$ ; в – при  $k = 0.05, \beta = 1$ ; г – при  $k = 0$



- Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений позволяет сделать следующие выводы:
- существует симметрия дисперсионных кривых при замене  $\tilde{\chi}$  на  $-\tilde{\chi}$ ;
  - чем больше значение  $k$  и (или) меньше значение  $\beta$ , тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые с положительной и отрицательной мнимой частью  $\tilde{\chi}$ ;
  - при уменьшении значений  $k$  и (или) при увеличении значений  $\beta$  поведение дисперсионных кривых стремится к упругому случаю (рис. 2, з, 3, з);
  - дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с положительной мнимой частью  $\tilde{\chi}$ , что определяет затухание решение по координате;
  - для наследственно-упругого спектра теряет смысл понятие частоты запираания, так как  $\tilde{\chi} = 0$  и  $\omega > 0$  не являются корнями дисперсионных уравнений;
  - в окрестностях частот запираания упругого спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют наибольшую кривизну. Увеличение значений  $k$ , как и уменьшение значений  $\beta$ , ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. Таким образом, упругий спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при  $k \rightarrow 0$ ,  $\beta \gg 1$ . Качественно вид дисперсионных кривых соответствует результатам, описанным в работах [6, 7].

#### 4. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения задач с конкретно заданными граничными условиями на торцах удобно иметь аналитическое решение дисперсионных уравнений. В силу сложности уравнений (6) и (7) получить точное аналитическое решение невозможно, но мы можем получить приближенные аналитические формулы для корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот с помощью асимптотических методов.

Анализ уравнения (6) и численного решения показывает, что асимптотики корней при  $\omega \rightarrow 0$  можно искать в виде

$$\chi_1^s = \sum_{m=2}^{\infty} c_{1m}^s \omega^{m/2}, \quad \delta_1^s = \sum_{m=1}^{\infty} d_{1m}^s \omega^{m/2}, \quad (8)$$

$$\chi_n^s = c_{n0}^s + \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}^s \omega^{m/2}, \quad \delta_n^s = d_{n0}^s + \sum_{m=1}^{\infty} d_{nm}^s \omega^{m/2}, \quad n > 1. \quad (9)$$

Для нахождения коэффициентов формул (8) и (9) подставляем их в дисперсионное уравнение (6) и раскладываем функции  $a$ ,  $b$ , гиперболические синусы и косинусы от них в степенные ряды по степеням  $\sqrt{\omega}$ , группируем элементы с одинаковыми степенями  $\omega$ . Поскольку получившиеся степенные ряды по  $\sqrt{\omega}$  тождественно равны нулю только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем две бесконечные системы зацепляющихся уравнений для определения искомых коэффициентов разложения. Решая полученные системы, находим асимптотики корней в окрестности нулевой частоты.

Асимптотика корней для первой моды имеет вид

$$\chi_1^s = c_{12}^s \omega + c_{13}^s \omega^{3/2} + O(\omega^2), \quad \delta_1^s = d_{13}^s \omega^{3/2} + O(\omega^2), \quad (10)$$

где  $c_{12}^s$ ,  $c_{13}^s$ ,  $d_{13}^s$  — функции, зависящие от параметров  $\nu$ ,  $k$ ,  $\beta$ . В частности, коэффициент  $c_{12}^s$  выражается следующим образом:

$$c_{12}^s = \sqrt{\frac{\left(1 - \nu - \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right) \left(1 + \nu + \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right)}{2 \left(1 - \frac{k}{\beta}\right) (1 + \nu)}}.$$

При  $n > 1$  получаем выражения

$$\chi_n^s = c_{n0}^s + c_{n1}^s \omega^{1/2} + O(\omega), \quad \delta_n^s = d_{n0}^s + d_{n1}^s \omega^{1/2} + O(\omega), \quad (11)$$



где  $c_{n0}^s = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1) - \pi)$ ,  $d_{n0}^s = -\frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2 \ln(4\pi(n-1) - \pi)}{4\pi(n-1) - \pi}\right) + \pi(n-1)$ ,  $n \in N$ ,  $c_{n1}^s, d_{n1}^s$  — функции, зависящие от параметров  $\nu, k, \beta$ , причем  $c_{n1}^s \ll 1, d_{n1}^s \ll 1$ .

Аналогично получим асимптотики корней дисперсионного уравнения в случае антисимметричного по нормальной координате НДС в окрестности нулевой частоты.

Для  $n = 0, 1$  имеем:

$$\begin{aligned} \chi_0^a &= c_{01}^a \omega^{1/2} + c_{02}^a \omega + c_{03}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), & \delta_0^a &= d_{02}^a \omega + d_{03}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), \\ \chi_1^a &= c_{12}^a \omega + c_{13}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), & \delta_1^a &= d_{11}^a \omega^{1/2} + d_{12}^a \omega + d_{13}^a \omega^{3/2} + O(\omega^2), \end{aligned} \tag{12}$$

где  $c_{01}^a, c_{02}^a, c_{03}^a, d_{02}^a, d_{03}^a, c_{12}^a, c_{13}^a, d_{11}^a, d_{12}^a, d_{13}^a$  — функции, зависящие от параметров  $\nu, k, \beta$ .

В частности, коэффициенты  $c_{01}^a$  и  $d_{11}^a$  выражаются следующим образом:

$$c_{01}^a = d_{11}^a = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \sqrt[4]{\frac{\left(1 - \nu - \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right) \left(1 + \nu + \frac{(\frac{1}{2} - \nu)k}{\beta}\right)}{\left(1 - \frac{k}{\beta}\right) (1 + \nu)}}.$$

Асимптотики корней при  $n > 1$  имеют вид

$$\chi_n^a = c_{n0}^a + c_{n1}^a \omega^{1/2} + O(\omega), \quad \delta_n^a = d_{n0}^a + d_{n1}^a \omega^{1/2} + O(\omega), \tag{13}$$

где  $c_{n0}^a = \frac{1}{2} \ln(4\pi(n-1) + \pi)$ ,  $d_{n0}^a = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2 \ln(4\pi(n-1) + \pi)}{4\pi(n-1) + \pi}\right) + \pi(n-1)$ ,  $c_{n1}^a, d_{n1}^a$  — функции, зависящие от параметров  $\nu, k, \beta$ .

На рис. 4, а, б представлены проекции дисперсионных кривых (симметричный случай) на плоскости  $(\omega, \chi)$  и  $(\omega, \delta)$ , построенных по результатам численных расчетов и по асимптотическим формулам (10) и (11) для нескольких первых мод для случая  $\nu = 0.3, k = 0.53, \beta = 1$ . Дисперсионные кривые, соответствующие численным расчетам, изображены сплошными линиями, а асимптотическим формулам — пунктирными.

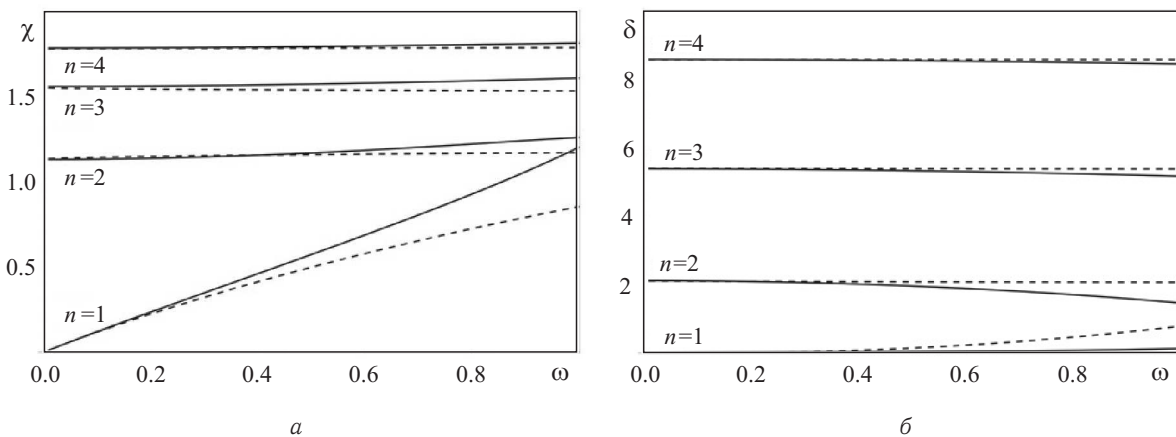


Рис. 4. Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  (а) и  $(\omega, \delta)$  (б) при  $k = 0.53, \beta = 1$  (симметричный случай)

На рис. 5, а, б представлены проекции дисперсионных кривых (антисимметричный случай) на плоскости  $(\omega, \chi)$  и  $(\omega, \delta)$ , построенных по результатам численных расчетов и по асимптотическим формулам (12) и (13) для нескольких первых мод для случая  $\nu = 0.3, k = 0.53, \beta = 1$ .

Из графиков видно, что решения, полученные с помощью численных и асимптотического методов, хорошо совпадают на интервале  $0 \leq \omega \leq 0.1$ , а с увеличением номера  $n$  наблюдается расширение интервала совпадения асимптотического решения с численным.

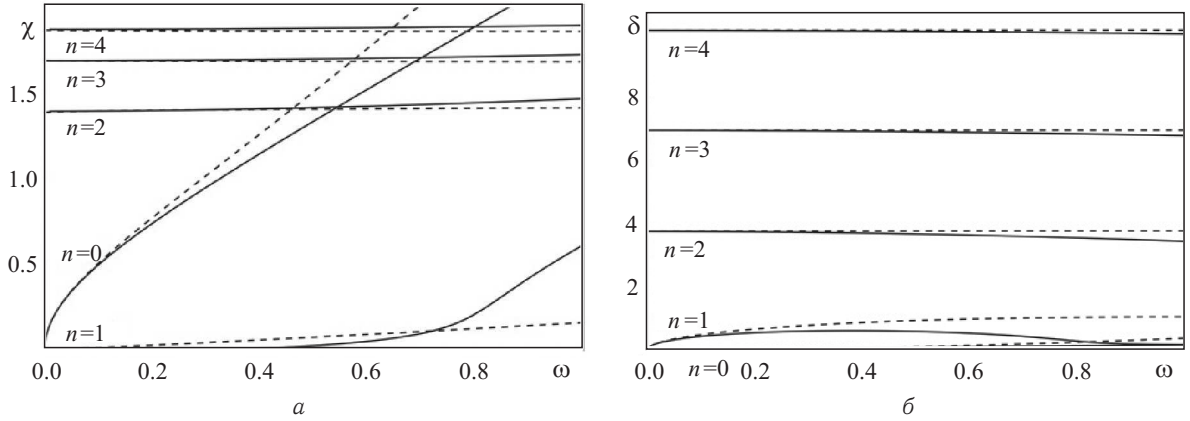


Рис. 5. Проекция дисперсионных кривых на плоскость  $(\omega, \chi)$  (а) и  $(\omega, \delta)$  (б) при  $k = 0.53, \beta = 1$  (антисимметричный случай)

Следует отметить, что при  $k = 0$  асимптотики корней дисперсионных уравнений для первой моды в симметричном случае и нулевой моды в антисимметричном случае совпадают с соответствующими асимптотиками, полученными в [3] для случая упругого слоя.

Найдем асимптотики корней дисперсионных уравнений для больших значений частот.

Анализ численного решения показал, что при  $\omega \rightarrow \infty \chi(\omega) = O(\omega)$ . Следовательно, асимптотику корней при большом значении  $\omega$  ищем в виде

$$\chi_n = c_{n2}^{(\infty)}\omega + c_{n1}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + c_{n0}^{(\infty)} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{n,-m}^{(\infty)}\omega^{-m/2}, \quad \delta_n = d_{n2}^{(\infty)}\omega + d_{n1}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + d_{n0}^{(\infty)} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{n,-m}^{(\infty)}\omega^{-m/2}. \quad (14)$$

Рассмотрим дисперсионное уравнение (6) при больших значениях  $\omega$ . В этом случае уравнение (6) можно заменить приближенным уравнением

$$\gamma^4 - ab\tilde{\chi}^2 = 0. \quad (15)$$

Подставляем разложение (14) в уравнение (15) и раскладываем функции  $a, b$  в степенные ряды по обратным степеням  $\sqrt{\omega}$ , группируем элементы с одинаковыми степенями  $\omega$ . Поскольку полученный степенной ряд по  $\sqrt{\omega}$  тождественно равен нулю только в том случае, когда равны нулю все его коэффициенты, то получаем бесконечную систему зацепляющихся уравнений для определения искомого разложения. Решая полученную систему, находим следующие асимптотики корней для первой моды при  $\omega \rightarrow \infty$  с точностью  $O(\omega^{-1})$ :

$$\chi_1 = c_{12}^{(\infty)}\omega + c_{11}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + \frac{c_{1,-1}^{(\infty)}}{\sqrt{\omega}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \delta_1 = d_{11}^{(\infty)}\sqrt{\omega} + d_{10}^{(\infty)} + \frac{d_{1,-1}^{(\infty)}}{\sqrt{\omega}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad (16)$$

где

$$c_{12}^{(\infty)} = \frac{1}{6}\sqrt{3p - 48(\nu^2 + \nu - 1)p^{-1} - 12(\nu - 2)},$$

$$p = \sqrt[3]{-64\nu^3 + 96\nu^2 - 12\nu + 44 + 12\sqrt{-96\nu^4 + 144\nu^3 - 111\nu^2 + 78\nu - 15}},$$

$c_{11}^{(\infty)}, d_{11}^{(\infty)}$  — функции, зависящие от  $\nu, k$ ;  $c_{1,-1}^{(\infty)}, d_{10}^{(\infty)}, d_{1,-1}^{(\infty)}$  — функции, зависящие от  $\nu, k, \beta$ .

Для антисимметричного случая асимптотика корней для первой моды совпадает с асимптотикой (16), поскольку дисперсионное уравнение (7) при больших значениях  $\omega$  также можно заменить приближенным уравнением (15).

При построении дисперсионных кривых по формулам (16) и методом математического микроскопа выявлено их совпадение для значений  $\omega > 85$ .

Наличие интервалов совпадения решений, полученных с помощью численных и асимптотического методов, качественное совпадение результатов с результатами, полученными другими авторами [6, 7] для наследственно-упругих материалов, а также совпадение результатов численных расчетов и



асимптотик в упруго-подобном случае ( $k = 0$ ,  $\beta \gg 1$ ) с соответствующими результатами для упругого слоя, приведенными в работе [3], подтверждают достоверность полученных в настоящей работе результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-08-00644а).

### Библиографический список

1. Мелешко В. В., Бондаренко А. А., Довгий С. А., Трофимчук А. Н., Хейст Г. Я. Ф. ван. Упругие волноводы : история и современность // Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т. 51, № 2. С. 86–104.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М. : Наука, 1977. 384 с.
3. Кожанова Т. В., Коссович Л. Ю. Дисперсионные уравнения Релея – Лэмба. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1990. 21 с.
4. Березин В. Л., Харитоновна К. Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений // Проблемы точной механики и управления : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2004. С. 119–122.
5. Барышев А. А., Лысункина Ю. В. О применении метода продолжения решения по параметру к анализу дисперсионных уравнений в системе Mathematica // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2013. Вып. 15. С. 108–111.
6. Червинко О. П., Сенченков И. К. Гармонические волны в слое и бесконечном цилиндре // Прикладная механика. 1986. Т. 22, № 12. С. 31–37.
7. Tanaka K., Kon-No A. Harmonic Waves in Linear Viscoelastic Plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 176. P. 185–193.

## Investigation of Harmonic Waves in the Viscoelastic Layer

N. S. Anofrikova, N. V. Sergeeva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, anofrikovans@info.sgu.ru, knickknack@bk.ru

The paper deals with the study of harmonic waves in the viscoelastic layer. The properties of the material are described by the constitutive equations in the integral form. The fractional exponential function of Rabotnov is chosen as a kernel of integral operator. Two cases are considered: symmetric stress-strain state (SSS) and asymmetric SSS. The properties of modes which change in time harmonically are investigated for the purpose of studying of the free vibrations. Dispersion equations for both cases are derived. The numerical solutions of dispersion equations are obtained. Asymptotics of the roots of the dispersion equations for small and large values of frequencies are obtained. Analysis of the solutions is done. The influence of viscosity factors on the behavior of the dispersion curves is established. Comparative analysis of numerical solutions and asymptotics of the roots of dispersion equations are made.

**Key words:** dispersion equations, stress-strain state, viscoelastic layer, asymptotics.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-08-00644a).*

### References

1. Meleshko V. V., Bondarenko A. A., Dovgiy S. A., Trofimchuk A. N., Heijst G. J. F. van. Uprugie volnovody : istoriya i sovremennost [The elastic waveguides: the history and the present-day]. *Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya* [Mathematical methods and physico-mechanical fields], 2008, vol. 51, no. 2, pp. 86–104 (in Russian).
2. Rabotnov Yu. N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Nauka, 1977, 384 p. (in Russian).
3. Kozhanova T. V., Kossovich L. Yu. *Dispersionnye uravneniya Releya – Lamba* [Dispersion equations of Rauleigh-Lamb]. Saratov, Saratov Univ. Press, 1990, 21 p. (in Russian).
4. Berezin V. L., Kharitonova K. Yu. *Primenenie metoda matematicheskogo mikroskopa pri reshenii transtcendentnykh uravneniy* [Application of the method of mathematical microscope for solving transcendental equations]. *Problemy tochnoi mekhaniki i upravleniya* [Problems of precise mechanics and control]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, pp. 119–122 (in Russian).
5. Baryshev A. A., Lysunkina Yu. V. *O primeneniya metoda prodolzheniya resheniya po parametru k analizu dispersionnykh uravneniy v sisteme Mathematica* [On the application of parameter continuation method to the analysis of dispersion equations in Mathematica]. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2013, iss. 15, pp. 108–111 (in Russian).
6. Chervinko O. P., Senchenkov I. K. *Garmonicheskie volny v sloe i beskonechnom tsilindre* [Harmonic viscoelastic waves in a layer and in an infinite cylinder]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1986, vol. 22, iss. 12, pp. 31–37 (in Russian).
7. Tanaka K., Kon-No A. *Harmonic Waves in Linear Viscoelastic Plate*. *Bull. JSME*, 1980, vol. 23, no. 176, pp. 185–193.