



The Problem of a Longitudinal Crack with a Filler in a Strip

N. N. Antonenko

Antonenko Nina Nikolayevna, Zaporozhye National Technical University, 64, Zhukovsky st., 69063, Zaporizhzhya, Ukraine, antonenkonina@i.ua

The method of the solution the problem of the central longitudinal crack with a filler in a strip is proposed. It is assumed that the jumps of the components of displacement vector is proportional to the corresponding stresses at its upper edge. Fourier's method of integral transformation is used. The problem is reduced to a system of integro-differential equations. The effects of influence of thickness, mechanical properties of a strip and a filler of the crack on Mode I and Mode II stresses intensity factors (SIFs) are examined. The following conclusions are made: increase the width of a strip and the coefficient that characterizes a filler leads to reduction of SIFs; increase of shear modulus and Poisson's ratio of a strip leads to the increase of SIF.

Key words: strip, crack, filler, stress intensity factors, method of Fourier integral transformation, integro-differential equation.

References

1. Fichter W. B. *Stresses at the tip of a longitudinal crack in a plate strip*. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1967, 55 p.
2. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. Equilibrium crack in a thin layer. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], vol. 29, iss. 4, 1965, pp. 926–929.
3. Smetanin B. I. *Nekotorye zadachi o shheljah v uprugom kline i sloe* [Some of the problem of cracks in an elastic wedge and layer]. *Inzh. zh. MTT*, 1968, iss. 2, pp. 115–122 (in Russian).
4. Savruk M. P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlia tel s treshchinami* [Solution of two-dimensional problems of the theory of elasticity for bodies with cracks]. Kiev, Nauk. dumka, 1981, 324 p. (in Russian).
5. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I. A longitudinal crack in a prestressed thin elastic layer with free boundaries. *J. Appl. Math. Mech.* [Prikl. Mat. Mekh.], 2005, vol. 69, iss. 1, pp. 141–150.
6. Alexandrov V. M. Longitudinal crack in an orthotropic elastic strip with free faces. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2006, vol. 41, iss. 1, pp. 88–94.
7. Pozharskiy D. A., Molchanov A. A. Asymptotic solutions of mixed problems for elastic strip and wedge. *Vestnik of DSTU* [Vestnik of DSTU]. 2010, vol. 10, pp. 447–454 (in Russian).
8. Murakami Y. *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, 1987, vol. 1, 1566 p.
9. Antonenko N.N. Modelirovanie mezhfaznoi treshchiny s napolnitelem na granitse uprugoi polosy i uprugoi poluploskosti [Modeling of a crack with a filler on the elastic strip-half-plane interface] *Visnik Donets'kogo natsional'nogo universitetu. Ser. A : Prirodnichi nauki*. 2013, no. 1, pp. 23–27 (in Russian).
10. Tkachenko I. G. Dvumirna mishana zadacha termopruzhnosti dlia bagatosharovoi osnovi [A two-dimensional mixed thermoelasticity problem for a multilayer foundation] *Prikladni problemi mehaniki i matematiki* [Applied problems of mechanics and mathematics]. 2005, vol. 3, pp. 70–78 (in Ukrainian).
11. Alexandrov V. M., Pozharskii D. A. To the problem of a crack on the elastic strip-half-plane interface. *Mech. Solids* [Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela], 2001, vol. 36, iss. 1, pp. 70–76.

УДК 532.591

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. Ю. Басинский

Басинский Константин Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет, kbasinsky@mail.ru

Рассмотрена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины в плоском случае. С помощью метода малого параметра данная нелинейная задача раскладывается на задачи в первых двух приближениях, которые последовательно разрешаются. Получены нелинейные выражения для компонент вектора скорости, динамического давления и формы свободной поверхности. Изучается движение частиц вязкой жидкости, вызванное распространением волны по свободной поверхности. Установлено, что вязкость жидкости



оказывает существенное влияние на форму траекторий жидких частиц, которое проявляется как в уменьшении амплитуды колебаний с течением времени, так и в отличии траекторий вблизи свободной поверхности и при заглублении. Исследован нелинейный эффект Стокса, который заключается в наличии приповерхностного течения.

Ключевые слова: волновые возмущения, вязкость, траектории частиц.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-322-329

ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слоя идеальной жидкости приведено в работах [1, 2]. В работе [2] также найдены нелинейные траектории жидких частиц. Для вязкой жидкости известно решение линейной задачи [3–5], а нелинейная задача решена только для приближения слабовязкой жидкости [6]. Данная работа посвящена определению нелинейных выражений для скорости, давления и формы свободной поверхности при волновом движении вязкой жидкости, а также определению траекторий жидких частиц.

1. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Декартова система координат задана так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, а ось z^* противоположно направлена к вектору силы тяжести \mathbf{g} . Движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой, где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Пусть в положительном направлении оси распространяется волна длины λ . Длина волны много больше ее высоты ($\lambda \gg \xi_{\max}^*$). В области, занятой жидкостью выполняются уравнения неразрывности и движения:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^*. \quad (1)$$

Здесь $p^* = P - P_a + \rho g z^*$ — динамическое давление, ρ — плотность, P — давление, μ — коэффициент динамической вязкости.

На свободной поверхности $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ задаются кинематическое и динамическое условия:

$$v^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad (2)$$

$$p_{nn} = -P_a, \quad p_{n\tau} = 0.$$

При бесконечном заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполнено условие

$$\mathbf{u}^* \rightarrow 0, \quad z^* \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Система уравнений (1) и граничных условий (2), (3) является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения характеристик волнового движения.

Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u}, \quad p^* = \varepsilon \rho c_0^2 p, \quad \xi^* = \varepsilon \xi / k, \quad \nu_0 = \mu k / \rho c_0,$$

$$t = k c t^*, \quad x = k x^*, \quad z = k z^*, \quad \alpha = c / c_0 = \omega / \omega_0, \quad c_0^2 = g / k,$$

где c_0 и ω_0 — фазовая скорость и частота волны линейной задачи для идеальной жидкости соответственно, c и ω — фазовая скорость и частота волны, $\varepsilon = k \xi_{\max}^*$ — малый волновой параметр, $k = 2\pi / \lambda$ — волновое число.

В безразмерных переменных задача (1)–(3) принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (4)$$

$$v - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$



$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \left(\xi - p - 2\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad z = \varepsilon\xi,$$

$$\nu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(1 - \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right) = -4\nu_0 \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon\xi,$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

В силу малости волнового параметра ε граничные условия на свободной поверхности $z = \varepsilon\xi$ разложением в ряд Маклорена входящих в них функций, сводятся к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Решение задачи находим в виде рядов по параметру ε :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_n = (u_i, 0, v_i), \quad p = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} p_i, \quad \xi = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \xi_i.$$

Подставляя эти ряды в уравнения (4) и разложенные в окрестности нуля граничные условия и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим задачи в первых двух приближениях.

В первом приближении задача имеет вид при ε^0

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1, \quad (5)$$

$$v_1 = \alpha \frac{\partial \xi_1}{\partial t}, \quad p_1 - \xi_1 - 2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

для второго приближения: при ε^1

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 - (\mathbf{u}_1 \nabla) \mathbf{u}_1, \quad (6)$$

$$v_2 = \alpha \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \xi_1), \quad p_2 - \xi_2 - 2\nu_0 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(2\nu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} - p_1 \right), \quad z = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 4 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad z = 0,$$

$$\mathbf{u}_2 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Решение линейной задачи (5) имеет вид [5]

$$u_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} [e^z \cos(x-t) + (aV_1 + bV_2) \cos(x-t) + (aV_2 - bV_1) \sin(x-t)], \quad (7)$$

$$v_1 = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ e^z \sin(x-t) + V_1 \cos(x-t) + V_2 \sin(x-t) \},$$

$$p_1 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + \beta \sin \chi), \quad \xi_1 = \frac{A}{\alpha^2 + s^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + s \sin \chi),$$

$$V_1(z) = e^{bz} (B_1 \cos az - B_2 \sin az), \quad V_2(z) = e^{bz} (B_2 \cos az + B_1 \sin az),$$

$$B_1 = -2\nu_0 \alpha A / (\alpha^2 + s^2), \quad B_2 = -2\nu_0 s A / (\alpha^2 + s^2).$$

Здесь β — безразмерный декремент затухания ($\beta\omega_0$ — размерный), A — амплитудный параметр, $s = 2\nu_0 - \beta$. Параметры a и b связаны соотношениями $a^2 = b^2 - 1 + \beta/\nu_0$, $2ab = \alpha/\nu_0$.

Частота волны через декремент затухания выражается следующим образом:

$$\alpha^2 = 1 + s^2 - 4\nu_0^3/s.$$

Для декремента затухания получено уравнение

$$s^6 + s^4 - 4\nu_0^4 s^2 - 4\nu_0^6 = 0,$$

аналитическое решение которого найдено, но не приведено здесь из-за своей громоздкости.



Подставив выражения (7) в задачу (6), получим систему линейных неоднородных уравнений и граничных условия для определения неизвестных функций u_2 , v_2 , p_2 и ξ_2 , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} u_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ e^{2z} D_2 + 1/2 [a_1 V_3 + b_1 V_4 + a V_5 + (b+1) V_6] \right\} \cos(2x-2t) + \\ &\quad + \left\{ -e^{2z} D_1 + 1/2 [a_1 V_4 - b_1 V_3 + a V_6 - (b+1) V_5] \right\} \sin(2x-2t), \\ v_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left[(e^{2z} D_1 + V_3 + V_5) \cos(2x-2t) + (e^{2z} D_2 + V_4 + V_6) \sin(2x-2t) \right], \\ p_2 &= e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t} \left\{ [e^{2z} (\beta D_1 + \alpha D_2) + V_7] \cos(2x-2t) + [e^{2z} (\beta D_2 - \alpha D_1) + V_8] \times \right. \\ &\quad \times \sin(2x-2t) - e^z A V_2 + A B_2 + A^2 [(2\nu_0 - \beta s)/(\alpha^2 + s^2) - e^{2z}]/2 + (B_1^2 + B_2^2) (1 - e^{2z})/2 \left. \right\}, \\ \xi_2 &= \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ [\alpha (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) - \beta (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \cos(2x-2t) - \right. \\ &\quad \left. - [\beta (D_2 + B_4 + K_2 - Q_2) + \alpha (D_1 + B_3 + K_1 + Q_1)] \sin(2x-2t) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_3(z) &= e^{b_1 z} (B_3 \cos a_1 z - B_4 \sin a_1 z), & V_4(z) &= e^{b_1 z} (B_4 \cos a_1 z + B_3 \sin a_1 z), \\ V_5(z) &= e^{(b+1)z} (K_1 \cos az - K_2 \sin az), & V_6(z) &= e^{(b+1)z} (K_2 \cos az + K_1 \sin az), \\ V_7(z) &= e^{(b+1)z} (G_1 \cos az - G_2 \sin az), & V_8(z) &= e^{(b+1)z} (G_2 \cos az + G_1 \sin az), \\ a_1^2 &= b_1^2 - 4 + 2\beta/\nu_0, & a_1 b_1 &= \alpha/\nu_0, \\ K_1 &= \{[(b+1)R_1 + aR_2]C_1 - [aR_1 - (b+1)R_2]C_2\}/\Delta_1, & \Delta_1 &= (C_1^2 + C_2^2)/2, \\ K_2 &= \{[aR_1 - (b+1)R_2]C_1 + [(b+1)R_1 + aR_2]C_2\}/\Delta_1, \\ G_1 &= \{[\alpha a + \beta(b-1)]K_1 - [\alpha(1-b) + \beta a]K_2 + 2R_2\}/4, \\ G_2 &= \{[\alpha(1-b) + \beta a]K_1 + [\alpha a + \beta(b-1)]K_2 + 2R_1\}/4, \\ C_1 &= [4a\nu_0^2 - \alpha(\beta + 2\nu_0)]/(2\nu_0), & C_2 &= [8b\nu_0^2 - \alpha_0^2 + \beta_0^2 - 4\nu_0 s]/(4\nu_0), \\ R_1 &= A[(2b\nu_0 - s)B_1 + (\alpha - 2a\nu_0)B_2]/(2\nu_0), \\ R_2 &= A[(\alpha - 2a\nu_0)B_1 - (2b\nu_0 - s)B_2]/(2\nu_0), \\ B_3 &= \nu_0[s_1(L_2 - 4D_1) + \alpha(L_1 - 4D_2)]/\Delta_2, & \Delta_2 &= s_1^2 + \alpha^2, \\ B_4 &= \nu_0[s_1(L_1 - 4D_2) - \alpha(L_2 - 4D_1)]/\Delta_2, & s_1 &= 4\nu_0 - \beta, \\ L_1 &= A^2 \{a[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] + \alpha b[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] - 3\alpha + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_2 - \alpha K_1]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, & \Delta_3 &= s^2 + \alpha^2, \\ L_2 &= A^2 \{b[4\nu_0^2(\alpha^2 - s^2)/\Delta_3 - s - K_1] - \alpha a[1 - K_2 + 8\nu_0 s/\Delta_3] + 3s + \\ &\quad + [(\beta - 6\nu_0)K_1 + \alpha K_2]/(2\nu_0)\}/\Delta_3, \\ D_1 &= (F_1 J_1 + F_2 J_2)/\Delta_4, & D_2 &= (F_1 J_2 - F_2 J_1)/\Delta_4, & \Delta_4 &= J_1^2 + J_2^2, \\ J_1 &= [8\nu_0^2(\alpha a_1 + s_1 b_1) - s_1/\Delta_2] - s_1, & J_2 &= [8\nu_0^2(\alpha b_1 - s_1 a_1) - \alpha/\Delta_2] + \alpha, \\ F_1 &= A^2 [2\nu_0(\alpha - s)/\Delta_3 + 1] [2\nu_0(\alpha + s)/\Delta_3 - 1]/2 + I_1 K_1 + I_2 K_2 - G_1 + H_1 L_1 + \\ &\quad + H_2 L_2 + (\beta Q_1 - \alpha Q_2)/(2\Delta_5), & \Delta_5 &= (\alpha^2 + \beta^2), \\ F_2 &= 2\alpha\nu_0 A^2 (1 - 2s\nu_0/\Delta_3)/\Delta_3 + I_2 K_1 - I_1 K_2 + G_2 - H_2 L_1 + H_1 L_2 + (\beta Q_2 + \alpha Q_1)/(2\Delta_5), \\ I_1 &= 2b\nu_0 + (4\nu_0 - \beta/\Delta_5)/2, & I_2 &= -2a\nu_0 + \alpha/(2\Delta_5), \\ H_1 &= [2\alpha\nu_0^2 b_1 - 2s_1\nu_0^2 a_1 + \alpha\nu_0^2 s/\Delta_5]/\Delta_3, \\ H_2 &= [2\alpha\nu_0^2 a_1 + 2s_1\nu_0^2 b_1 + (\beta s_1 - \alpha^2)/\Delta_5]/\Delta_3. \end{aligned}$$



2. ВОЛНОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ

Физические координаты частицы $x^*(t^*)$, $z^*(t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx^*}{dt^*} = u^*, \quad \frac{dz^*}{dt^*} = v^*.$$

Физическое время необходимо обезразмерить частотой колебания жидкой частицы σ , так как для нелинейных волн даже в идеальной жидкости σ не совпадает с частотой волны [2].

Учитывая, что

$$x^* = ct^* + x/k, \quad z^* = z/k, \quad t^* = t/\sigma, \quad \mathbf{u}^* = \varepsilon c_0 \mathbf{u},$$

уравнения, описывающие движение частицы в волне можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon \left(\frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' u - \left(t \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)', \quad \frac{dz}{dt} = \varepsilon \left(\frac{t}{\alpha} \cdot \frac{ck}{\sigma} \right)' v. \quad (8)$$

Положим

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i, \quad z = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i z_i, \quad \frac{kc}{\sigma} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i. \quad (9)$$

Подставляя ряды (8) и выражения для компонент скорости в уравнения движения (9) для определения первых трех коэффициентов, получим следующие уравнения:

$$\frac{dx_0}{dt} = -1, \quad \frac{dz_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + aV_1(z_0) + bV_2(z_0)] \cos x_0 + [aV_2(z_0) - bV_1(z_0)] \sin x_0 \} - (t\gamma_1)',$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{A}{\alpha} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} \{ [e^{z_0} + V_1(z_0)] \cos x_0 + V_2(z_0) \sin x_0 \},$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ \{ e^{2z_0} D_2 + 1/2 [a_1 V_3(z_0) + b_1 V_4(z_0) + aV_5(z_0) + (b+1)V_6(z_0)] \} \cos 2x_0 +$$

$$+ \{ -e^{2z_0} D_1 + 1/2 [a_1 V_4(z_0) - b_1 V_3(z_0) + aV_6(z_0) - (b+1)V_5(z_0)] \} \sin 2x_0 \} - (t\gamma_2)' +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ \{ Az_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1)V_1(z_0) - [(a^2 - b^2)z_1 - ax_1]V_2(z_0) \} \cos x_0 +$$

$$+ \{ -Ax_1 e^{z_0} + b(2az_1 - x_1)V_2(z_0) + [(a^2 - b^2)z_1 - ax_1]V_1(z_0) \} \sin x_0 \},$$

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ (e^{2z_0} D_1 + V_3(z_0) + V_5(z_0)) \cos 2x_0 + (e^{2z_0} D_2 + V_4(z_0) + V_6(z_0)) \sin 2x_0 \} +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\alpha} \{ [Ax_1 e^{z_0} + bz_1 V_1(z_0) + (x_1 - az_1)V_2(z_0)] \cos x_0 + [Az_1 e^{z_0} + bz_1 V_2(z_0) - (x_1 - az_1)V_1(z_0)] \sin x_0 \}.$$

Разрешая последовательно данные уравнения, получим следующие выражения:

$$x_0 = x_L - t, \quad z_0 = z_L, \quad \gamma_1 = 0,$$

$$x_1 = \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\Delta_5} \{ [-\beta A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a)V_1(z_L) + (\alpha a - \beta b)V_2(z_L)] \cos(x_L - t) +$$

$$[-\alpha A e^{z_L} - (\alpha b + \beta a)V_2(z_L) - (\alpha a - \beta b)V_1(z_L)] \sin(x_L - t) \},$$

$$z_1 = \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha} t}}{\Delta_5} \{ (\alpha A e^{z_L} - \beta V_1(z_L) + \alpha V_2(z_L)) \cos(x_L - t) + (-\beta A e^{z_L} - \beta V_2(z_L) - \alpha V_1(z_L)) \sin(x_L - t) \},$$

$$x_2 = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha} t}}{2\Delta_5} \{ -(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1)V_3(z_L)/2 + (\alpha a_1 - \beta b_1)V_4(z_L)/2 +$$



$$\begin{aligned}
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_1(z_L) + \\
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
 & - [\alpha(b+1) + \beta a] V_5(z_L)/2 + [\alpha a - \beta(b+1)] V_6(z_L)/2 \cos(2x_L - t) + \\
 & + \{(\beta D_1 - \alpha D_1) e^{2z_L} - (\beta a_1 + \alpha b_1) V_4(z_L) - (\alpha a_1 - \beta b_1) V_3(z_L) + \\
 & + Ae^{z_L} [(2\alpha\beta a + \alpha^2 b - \beta^2 b)/\Delta_5 - \beta/(2\nu_0) + (\alpha^2 - \beta^2)/\Delta_5] V_2(z_L) - \\
 & - Ae^{z_L} [(2\alpha\beta b - \alpha^2 a + \beta^2 a)/\Delta_5 + \alpha/(2\nu_0) - 2\alpha\beta/\Delta_5] V_1(z_L) - \\
 & - [\alpha(b+1) + \beta a] V_6(z_L)/2 - [\alpha a - \beta(b+1)] V_5(z_L)/2 \} \sin(2x_L - t), \\
 z_2 = & \frac{e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{2\Delta_5} \{[(\alpha D_2 - \beta D_1) e^{2z_L} + \alpha V_4(z_L) - \beta V_3(z_L) + \alpha V_6(z_L) - \beta V_5(z_L)] \times \\
 & \times \cos(2x_L - 2t) + [-(\alpha D_1 + \beta D_2) e^{2z_L} - \alpha V_3(z_L) - \beta V_4(z_L) - \alpha V_5(z_L) - \beta V_6(z_L)] \times \\
 & \times \sin(2x_L - 2t) + Ae^{z_L} [aV_1(z_L) + (b+1)V_2(z_L) + A^2] + be^{bz_L} (B_1^2 + B_2^2) \}, \\
 \gamma_2 = & \frac{1 - e^{-\frac{2\beta}{\alpha}t}}{4\beta\nu_0\Delta_5 t} [2\alpha\nu_0 A^2 e^{2z_L} + Ae^{z_L} (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha a\nu_0) V_1(z_L) + 2\alpha Ae^{z_L} \times \\
 & \times (\nu_0 + b\nu_0 - \beta) V_2 + \alpha e^{2bz_L} (B_1^2 + B_2^2) (2a^2\nu_0 + 2\nu_0 - 3\beta),
 \end{aligned}$$

где x_L, z_L — лагранжевы координаты.

Величина $u_s = c - \sigma/k$ представляет собой переносную скорость вдоль горизонтальной оси. Ее приближенное выражение имеет вид

$$u_s = c \left(1 - \frac{\sigma}{ck}\right) = c \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \gamma_2}\right) \approx \varepsilon^2 c \gamma_2. \quad (10)$$

Для примера построены траектории движения жидких частиц при малом (рис. 1) и большом (рис. 2) значении коэффициента кинематической вязкости. Видно, что частицы вблизи поверхности движутся быстрее, чем частицы на глубине, что обусловлено наличием приповерхностного течения Стокса, которое характеризуется переносной скоростью (10). С увеличением вязкости амплитуда волновых возмущений и переносная скорость убывают быстрее. Кроме того, вблизи поверхности при большой вязкости траектории наклонены в верхней точке в сторону движения, что не наблюдается на заглублении. Это можно объяснить влиянием вязких касательных напряжений на свободной поверхности.

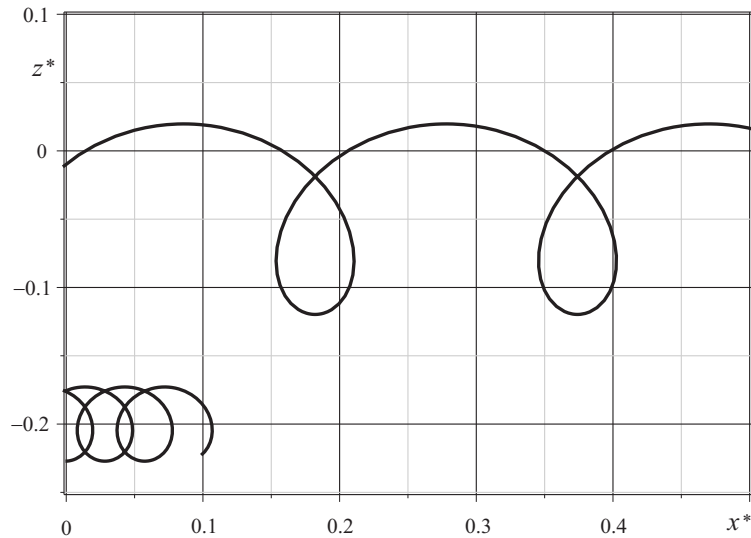


Рис. 1. Траектории частиц жидкости при $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

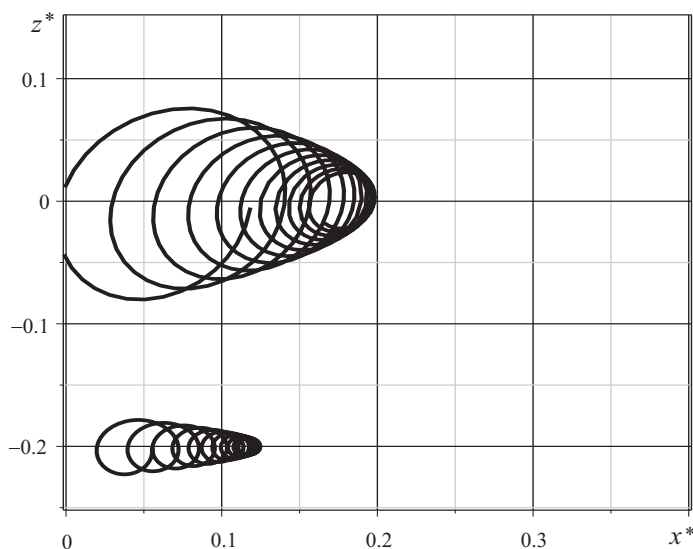


Рис. 2. Траектории частиц жидкости при $\nu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, получено асимптотическое решение нелинейной задачи с точностью до членов второго порядка по малому амплитудному параметру. Получены выражения для траекторий частиц жидкости, а также для скорости приповерхностного течения Стокса.

Библиографический список

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М. : Наука, 1977. 816 с.
2. Алешков Ю. З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 196 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Л. : Гостехиздат, 1947. 928 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М. : Наука, 1986. 735 с.
5. Баринов В. А. Распространение волн по свободной поверхности вязкой жидкости // Вестн. С.-Петербур. ун-та. 2010. Сер. 10. Вып. 2. С. 18–31.
6. Баринов В. А., Басинский К. Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. С.-Петербур. ун-та. 2011. Сер. 10. Вып. 2. С. 9–16.

Nonlinear Wave on the Surface Layer of a Viscous Liquid

K. Yu. Basinsky

Basinsky Konstantin Yurjevich, Tyumen State University, 10, Semakova st., 625003, Tyumen, Russia, kbasinsky@mail.ru

The nonlinear problem of the propagation of waves on the free surface of the layer of viscous incompressible fluid of infinite depth in the plane case. Using small parameter method, this nonlinear problem is decomposed into problems in the first two approximations that consistently allowed. Nonlinear expressions for the components of the velocity vector, the dynamic pressure and the shape of the free surface. The motion of particles of the viscous fluid caused by the spread of the wave of the free surface. It is found that the viscosity has a significant effect on the shape of the trajectories of liquid particles which is manifested as a decrease in the amplitude of oscillation over time, and in contrast to the paths near the free surface and penetration. The nonlinear effect of Stokes, which is the presence of near-surface currents.

Key words: wave disturbances, viscosity, particle trajectories.



References

1. Sretenskiy L. N. *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti* [Theory of wave motions of fluid]. Moscow, Nauka, 1977, 816 p. (in Russian).
2. Aleshkov Yu. Z. *Teoriya voln na poverkhnosti tyazheloy zhidkosti* [The theory of waves on the surface of a heavy liquid]. Leningrad, Leningrfd Univ. Press, 1981, 196 p. (in Russian).
3. Lamb G. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Leningrad, Gostekhizdat, 1947, 928 p. (in Russian).
4. Landau L. D., Lifshits E. M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka, 1986, 735 p. (in Russian).
5. Barinov V. A. Wave propagation on the free surface of a viscous fluid *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 18–31 (in Russian).
6. Barinov V. A., Basinsky K. Yu. The solution of the problem of nonlinear waves on the surface of the low-viscosity fluid. *Vestn. S.-Peterb. un-ta*, 2011, vol. 10, no. 2, pp. 9–16 (in Russian).