УДК 517.51

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ БЕРНШТЕЙНА – КАНТОРОВИЧА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Шах-Эмиров Таджидин Нурмагомедович, научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, tadgius@gmail.com

Пусть $E = [0,1]$, $1 \leqslant p(x)$ — измеримая и существенно ограниченная на E функция. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество измеримых на E функций f, для которых $\int_E |f(x)|^{p(x)}dx < \infty$. Исследуется сходимость последовательности операторов Бернштейна – Канторовича $\{K_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции f в пространствах Лебега с переменным показателем $L^{p(x)}(E)$. Получены условия на переменный показатель, при которых указанная последовательность равномерно ограничена в этих пространствах и, как следствие, показано, что $K_n(f,x)$ при $n \to \infty$ сходится к функции f в метрике пространства $L^{p(x)}(E)$ определяемой нормой $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}$.

Ключевые слова: пространства Лебега с переменным показателем, операторы Бернштейна – Канторовича, полиномы Бернштейна.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что полиномы Бернштейна, определяемые формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad f \in C([0,1]), \qquad x \in [0,1],$$

где $p_{nk}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, равномерно сходятся в пространстве $C([0,1])$, однако они не подходят для аппроксимации разрывных функций. В работе [1] Л. В. Канторовичем (Kantorovich) были введены операторы, представляющие собой аналог полиномов Бернштейна для суммируемых функций. Для $f \in L^1([0,1])$ определим, следуя [1], оператор Бернштейна – Канторовича следующим образом:

$$K_n(f) = K_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt, \tag{1}$$

где $\Delta_{nk} = [\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$. В работе [2] доказано, что для произвольного постоянного показателя $p \geqslant 1$ и $f \in L^p([0,1])$ имеет место соотношение $\|f - K_n(f)\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$. В настоящей работе ставится задача получить аналогичный результат для функций из пространств Лебега с переменным показателем. Для точной формулировки полученного результата нам понадобятся некоторые обозначения.

Пусть E — измеримое подмножество числовой оси, $p = p(x)$ – измеримая и существенно ограниченная на E функция. Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество измеримых на E функций f, для которых $\int_E |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty$. Из [3] известно, что если переменный показатель $1 \leqslant p(x)$ существенно ограничен на E, то $L^{p(x)}(E)$ можно превратить в банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf\left\{\alpha > 0 : \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\right\}. \tag{2}$$

При этом отметим (см. [4]), что если $1 \leqslant p(x) \leqslant q(x) \leqslant \bar{q}(E) < \infty$, то имеет место неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leqslant r_{p,q} \|f\|_{q(\cdot)}(E), \tag{3}$$

в котором

$$r_{p,q} = \max\left\{1/\underline{\beta}(E) + \mu(E)/\underline{\beta}(E), 1\right\}, \qquad \beta(x) = q(x)/p(x),$$

где $\bar{g}(M) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} g(x)$, $\underline{g}(M) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in M} g(x)$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть φ — выпуклая функция, заданная на промежутке $A \subset \mathbb{R}$, неотрицательные числа $q_1, \ldots, q_n$ таковы, что $\sum_{k=0}^{n} q_k = 1$. Тогда имеет место неравенство Йенсена:

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} q_k \varphi(x_k), \tag{4}$$

для любых $x_k \in A$. Если $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемые на промежутке $B \subset \mathbb{R}$ функции, $a \leqslant f(x) \leqslant b$ $(a, b \in A)$, $g(x) \geqslant 0$, при $x \in B$, и $\int_B g(x)dx = 1$. Тогда выполняется следующее неравенство Йенсена для интегралов:

$$\varphi\left(\int\limits_B g(x)f(x)\,dx\right) \leqslant \int\limits_B g(x)\varphi(f(x))\,dx \tag{5}$$

при условии существования правого интеграла в неравенстве (5).

Приведем также некоторые свойства функций $p_{nk}(x)$. Прежде всего, заметим, что для произвольного $x \in [0,1]$ имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) = 1. \tag{6}$$

Далее, пусть $x \in [0,1]$ и $\xi > 0$ — произвольное положительное число. Тогда (см. [5, лемма 2, с. 21])

$$\sum_{k, \left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \xi} p_{nk}(x) \leqslant \frac{1}{4n\xi^2}. \tag{7}$$

Отметим также, что

$$\int\limits_0^1 (n+1)p_{nk}(x)dx = 1. \tag{8}$$

В самом деле, используя бета-функцию

$$B(k+1, n-k+1) = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)},$$

находим

$$C_n^k = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} = \frac{1}{(n+1)B(k+1,n-k+1)},$$

откуда и следует (8).

2. О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ БЕРНШТЕЙНА – КАНТОРОВИЧА В $L^{p(x)}(E)$, $E = [0,1]$

Пусть $E = [0,1]$. Через $\mathscr{P}$ обозначим класс показателей $p(x) \geqslant 1$, для которых выполнено условие Дини – Липшица

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x-y|} \leqslant d, \qquad x, y \in E, \tag{9}$$

и существует число $0 < \delta \ll 1$ такое, что

$$p(x) = \begin{cases} q_1, & 0 \leqslant x \leqslant \delta, \\ q_2, & 1-\delta \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

где $q_1 \geqslant 1$, $q_2 \geqslant 1$. Для краткости записи введем обозначение

$$\zeta_{nk}(x) = \zeta_{nk}(f,x) = p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)\,dt.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть $p(x) \in \mathscr{P}$. Тогда последовательность операторов $\{K_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена в $L^{p(x)}(E)$. Другими словами, справедливо следующее неравенство:*

$$\|K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leqslant c(p)\|f\|_{p(\cdot)}.$$

Доказательство. Пусть

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leqslant 1. \tag{11}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_E |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx = \int\limits_0^{\delta} |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx + \int\limits_{\delta}^{1-\delta} |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx + \int\limits_{1-\delta}^{1} |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx \tag{12}$$

и покажем, что каждое из слагаемых в правой части равномерно ограничено относительно n. Пусть $0<\alpha<1/2$ и

$$p_0 = \min_{0\leqslant x\leqslant \delta+n^{-\alpha}+n^{-1}} p(x), \qquad p_1 = \min_{1-\delta-n^{-\alpha}-n^{-1}\leqslant x\leqslant 1} p(x).$$

Оценим первое слагаемое. Рассмотрим разность $p(x)-p_0$ на отрезке $[0,\delta]$. Возможны два случая. В первом случае $p_0=q_1$ и в силу (10) $p(x)-p_0=q_1-p_0=0$, во втором случае $p(x)>p_0$, тогда из (10) имеем $p(x)-p_0=q_1-p(x_0)=p(\delta)-p(x_0)$, где $\delta<x_0\leqslant \delta+n^{-\alpha}+n^{-1}$, $p(x_0)=p_0$. Следовательно, используя условие (9), приходим к оценке

$$p(x)-p_0 = p(\delta)-p(x_0) \leqslant \frac{d}{\ln\frac{1}{|\delta-x_0|}} \leqslant \frac{d}{\ln\frac{1}{n^{-\alpha}+n^{-1}}} \leqslant \frac{d}{\ln\frac{n^{\alpha}}{2}} \leqslant \frac{c(\alpha)}{\ln n}, \qquad n>2^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{13}$$

С учетом равенства (6) и оценки (13) получаем

$$\int\limits_0^{\delta} |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx = \int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)} dx = \int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)-p_0+p_0} dx \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p(x)-p_0} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p_0} dx \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int\limits_0^{\delta} \left(\int\limits_E |f(t)|dt\right)^{p(x)-p_0} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p_0} dx. \tag{14}$$

Легко видеть с учетом (3), (11) и (13), что

$$\left(\int\limits_E |f(t)|dt\right)^{p(x)-p_0} \leqslant r_{1,p}^{p(x)-p_0} \leqslant r_{1,p}^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}}. \tag{15}$$

Тогда, подставляя (15) в (14), получим следующую оценку для первого интеграла:

$$\int\limits_0^{\delta} |K_n(f,x)|^{p(x)}\,dx \leqslant r_{1,p}^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} (n+1)^{\frac{c(\alpha)}{\ln n}} \int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p_0} dx \leqslant c(p,\alpha) \int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p_0} dx. \tag{16}$$

В силу неравенства треугольника для нормы L^{p_0} имеем:

$$\left(\int\limits_0^{\delta} \left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant \left(\int\limits_0^{\delta} \Big|\sum_{k,\,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x)\Big|^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} +$$

$$+\left(\int\limits_0^{\delta} \Big|\sum_{k,\delta+n^{-\alpha}\leqslant\frac{k}{n}<1-\delta} \zeta_{nk}(x)\Big|^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} + \left(\int\limits_0^{\delta} \Big|\sum_{k,\,\frac{k}{n}\geqslant 1-\delta} \zeta_{nk}(x)\Big|^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} = I_{11}^{\frac{1}{p_0}} + I_{12}^{\frac{1}{p_0}} + I_{13}^{\frac{1}{p_0}}.$$

Пусть $\mu(x) = \sum\limits_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} p_{nk}(x)$. Применим к I_{11} неравенства (4) и (5)

$$I_{11} = \int\limits_0^\delta \left|\mu(x) \sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} \frac{p_{nk}(x)}{\mu(x)}(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\delta \mu^{p_0-1}(x) \sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} p_{nk}(x)\left|(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\delta \sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0}\,dt\,dx = \sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} \int\limits_0^\delta p_{nk}(x)(n+1)dx \int\limits_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0}\,dt. \tag{17}$$

Пусть $A_n = \{k : \Delta_{nk}\bigcap[0,\delta+n^{-\alpha}] \neq \varnothing\}$, $h_0(t) = \begin{cases} p_0,\ t\in\bigcup_{k\in A_n}\Delta_{nk}, \\ p(t),\ t\in([0,1]\setminus\bigcup_{k\in A_n}\Delta_{nk}). \end{cases}$

В силу (8) для правой части (17) справедлива оценка

$$\sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} \int\limits_0^\delta p_{nk}(x)(n+1)dx \int\limits_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0}\,dt \leqslant \sum_{k,\frac{k}{n}<\delta+n^{-\alpha}} \int\limits_{\Delta_{nk}} |f(t)|^{p_0}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^1 |f(t)|^{h_0(t)}\,dt = \int\limits_0^1 \|f\|_{h_0(\cdot)}^{h_0(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{h_0(\cdot)}}\right|^{h_0(t)} dt.$$

Из (3) и (11) получаем:

$$\int\limits_0^1 \|f\|_{h_0(\cdot)}^{h_0(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{h_0(\cdot)}}\right|^{h_0(t)} dt \leqslant r_{h_0,p}^{\bar{h}_0}. \tag{18}$$

Перейдем к оценке I_{12}. Пусть $\tau_{nk} = \frac{k}{n}$. Для оценки $p_{nk}(x)$ при

$$\delta + n^{-\alpha} \leqslant \tau_{nk} < 1-\delta \tag{19}$$

воспользуемся асимптотитеской формулой для гамма-функции при $x>0$

$$\ln\Gamma(x) = (x-\frac{1}{2})\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + R_0(x), \tag{20}$$

где $|R_0(x)| \leqslant \frac{w(x)}{12|x|}$, $w(x) = \sup\limits_{u\geqslant 0}\frac{x^2}{u^2+x^2}$. Из (20) для $p_{nk}(x)$ получаем:

$$\ln p_{nk}(x) = \ln n - \ln k - \ln(n-k) + \ln\Gamma(n) - \ln\Gamma(k) - \ln\Gamma(n-k) + k\ln x + (n-k)\ln(1-x) =$$
$$= n\ln n - k(\ln k - \ln x) - (n-k)(\ln(n-k) - \ln(1-x)) -$$
$$-\frac{1}{2}\ln 2\pi n\tau_{nk}(1-\tau_{nk}) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k) = -n\left(\tau_{nk}\ln\frac{\tau_{nk}}{x} + (1-\tau_{nk})\ln\frac{1-\tau_{nk}}{1-x}\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\ln(2\pi n\tau_{nk}(1-\tau_{nk})) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k). \tag{21}$$

Полагая $H(\tau) = \tau\ln\frac{\tau}{x} + (1-\tau)\ln\frac{1-\tau}{1-x}$ и замечая, что $H(x) = H'(x) = 0$, $H''(x) = \frac{1}{x(1-x)}$, применим к (21) формулу Тейлора

$$\ln p_{nk}(x) = -n\left(\frac{(\tau_{nk}-x)^2}{2x(1-x)} + r(\tau_{nk})\right) - \frac{1}{2}\ln(2\pi n\tau_{nk}(1-\tau_{nk})) + R_0(n) - R_0(k) - R_0(n-k). \tag{22}$$

Поскольку $|r(\tau_{nk})| \leqslant \frac{|\tau_{nk}-x|^3}{3x^2(1-x)^2}$ (см. [6, с. 118, теорема 5]), при $|\tau_{nk}-x| \leqslant \frac{1}{2}\min\{x,1-x\}$ из (22) и определения $R_0(x)$ для $|\tau_{nk}-x| \leqslant n^{-\alpha}$ легко получается оценка

$$p_{nk}(x) \leqslant ce^{-n\left[\frac{(\tau_{nk}-x)^2}{2x(1-x)} - \frac{|\tau_{nk}-x|^3}{3x^2(1-x)^2}\right] - \frac{1}{2}\ln(2\pi n\tau_{nk}(1-\tau_{nk}))}. \tag{23}$$

Отметим, что при условии (19) и $x \in [0, \tau_{nk}]$ функция $p_{nk}(x)$ возрастает. Заметим, что при $\tau_{nk} - x = n^{-\alpha}$

$$-n\left[\frac{(\tau_{nk}-x)^2}{2x(1-x)} - \frac{|\tau_{nk}-x|^3}{3x^2(1-x)^2}\right] \leqslant -n\left[2n^{-2\alpha} - \frac{n^{-3\alpha}}{3\delta^4}\right] = -n^{1-2\alpha}\left[2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4}\right].$$

Подставляя правую часть последнего неравенства в (23) и учитывая, что

$$\ln(2\pi n\tau_{nk}(1-\tau_{nk})) \geqslant \ln(2\pi n\delta^2),$$

приходим к оценке

$$p_{nk}(\tau_{nk} - n^{-\alpha}) \leqslant ce^{-n^{1-2\alpha}\left[2-\frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4}\right] - \frac{1}{2}\ln(2\pi n\delta^2)}, \tag{24}$$

верной также для всех $x \in [0, \delta]$ в силу возрастания $p_{nk}(x)$ на указанном отрезке. Воспользовавшись полученной оценкой, покажем, что $np_{nk}(x)$ равномерно ограничены по n при $\delta + n^{-\alpha} \leqslant \tau_{nk} < 1 - \delta$, $x \in [0, \delta]$. Действительно, в силу того что $n^{1-2\alpha} \geqslant \ln n$ при любом $0 < \alpha < 1/2$ и достаточно больших n

$$\ln n - n^{1-2\alpha}\left[2 - \frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4}\right] - \frac{1}{2}\ln(2\pi n\delta^2) < 0, \tag{25}$$

откуда и вытекает, что $np_{nk}(x) < c(\delta, \alpha)$, когда $\delta + n^{-\alpha} \leqslant \tau_{nk} \leqslant 1 - \delta$, $x \in [0, \delta]$. Тем самым,

$$I_{12} \leqslant c(p, \alpha)\int_0^\delta \left|\sum_{k, \delta + n^{-\alpha} \leqslant \frac{k}{n} < 1-\delta} \int_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant c(p, \alpha, \delta). \tag{26}$$

Покажем теперь равномерную ограниченность по n величины I_{13}. С учетом (7) получаем:

$$I_{13} = \int_0^\delta \left|\sum_{k, \frac{k}{n} \geqslant 1-\delta} p_{nk}(x)(n+1)\int_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant \int_0^\delta \left|\sum_{k, \frac{k}{n} \geqslant 1-\delta} \frac{n+1}{4n(1-2\delta)^2}\int_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{p_0}(1-2\delta)^{2p_0}}\int_0^\delta \left|\sum_{k, \frac{k}{n} \geqslant 1-\delta} \int_{\Delta_{nk}} |f(t)|dt\right|^{p_0} dx \leqslant c(p, \delta, \alpha)\int_0^\delta \left|\int_0^1 |f(t)|dt\right|^{p_0} dx \leqslant$$
$$\leqslant c(p, \delta, \alpha)\delta\|f\|_1^{p_0} \leqslant c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_0}\|f\|_{p(\cdot)}^{p_0} \leqslant c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_0}. \tag{27}$$

Равномерная ограниченность по n первого интеграла из (12) доказана. Перейдем к доказательству равномерной ограниченности по n третьего интеграла из (12). Для этого заметим, что почти дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к оценкам (13)–(16), получим

$$\left(\int_{1-\delta}^1 \left|\sum_{k=0}^n \zeta_{nk}(x)\right|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \left(\int_{1-\delta}^1 \left|\sum_{k, \frac{k}{n} \leqslant \delta} \zeta_{nk}(x)\right|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} +$$
$$+ \left(\int_{1-\delta}^1 \left|\sum_{k, \delta \leqslant \frac{k}{n} < 1-\delta-n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x)\right|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} + \left(\int_{1-\delta}^1 \left|\sum_{k, \frac{k}{n} \geqslant 1-\delta-n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x)\right|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} = I_{31}^{\frac{1}{p_1}} + I_{32}^{\frac{1}{p_1}} + I_{33}^{\frac{1}{p_1}}.$$

Легко видеть, что для I_{31} можно получить по аналогии с (27) следующую оценку:

$$I_{31} \leqslant c(p, \delta, \alpha)\delta\|f\|_1^{p_1} \leqslant c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_1}\|f\|_{p(\cdot)}^{p_1} \leqslant c(p, \delta, \alpha) r_{1,p}^{p_1}. \tag{28}$$

Поскольку для $p_{nk}(\tau_{nk} + n^{-\alpha})$ также справедлива оценка (24), то, учитывая (25) и убывание $p_{nk}(x)$ на $[\tau_{nk}, 1]$ ($\delta \leqslant \tau_{nk} < 1 - \delta - n^{-\alpha}$), получаем для I_{32} оценку

$$I_{32} \leqslant c(p, \alpha)\int_{1-\delta}^1 \left|\sum_{k, \delta \leqslant \frac{k}{n} < 1-\delta-n^{-\alpha}} \int_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_0} dx \leqslant c(p, \alpha, \delta). \tag{29}$$

Наконец, для I_{32} таким же путем, как и для I_{11}, выводится окончательная оценка вида

$$I_{32} \leqslant r_{h_1,p}^{\bar{h}_1}, \tag{30}$$

где $h_1(t) = \begin{cases} p_1,\ t \in \bigcup_{k\in B_n} \Delta_{nk}, \\ p(t),\ t \in ([0,1]\setminus \bigcup_{k\in B_n} \Delta_{nk}), \end{cases}$ $\qquad B_n = \{k : \Delta_{nk} \bigcap [1-\delta-n^{-\alpha}, 1] \neq \varnothing\}$.

Из (28)–(30) вытекает равномерная ограниченность по n третьего интеграла в (12).

Перейдем к доказательству равномерной ограниченности второго интеграла из (12). Пользуясь тем, что величина $\rho(f,g) = \left(\int_E |f(x)-g(x)|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}}}$ – метрика в $L^{p(x)}(E)$ (см. [3, с. 615] или [4, с. 11, лемма 1.2.1]), имеем:

$$\left(\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k=0}^{n}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}}} \leqslant \left(\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}}} +$$

$$+\left(\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,n^{-\alpha}\leqslant\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\frac{\delta}{2}}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}}} + \left(\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\frac{\delta}{2}}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)}dx\right)^{\frac{1}{\bar{p}}} = I_{21}^{\frac{1}{\bar{p}}} + I_{22}^{\frac{1}{\bar{p}}} + I_{23}^{\frac{1}{\bar{p}}}.$$

Из неравенств (3) и (7) имеем:

$$I_{23} \leqslant \frac{2^{\bar{p}}}{\delta^{2\bar{p}}}\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\int\limits_{0}^{1}|f(t)|dt\right|^{p(x)}dx \leqslant c(p,\delta)\|f\|_1^{\bar{p}} \leqslant c(p,\delta)r_{1,p}^{\bar{p}}\|f\|_{p(\cdot)}^{\bar{p}} \leqslant c(p,\delta)r_{1,p}^{\bar{p}}. \tag{31}$$

Учитывая, что $p_{nk}(x)$ возрастает на $[\delta,\tau_{nk}]$ и убывает на $[\tau_{nk}, 1-\delta]$, и пользуясь оценкой (24) для $p_{nk}(\tau_{nk}\pm n^{-\alpha})$, получаем:

$$I_{22} = \int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,n^{-\alpha}\leqslant\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\frac{\delta}{2}} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p(x)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,n^{-\alpha}\leqslant\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\frac{\delta}{2}} ce^{-n^{1-2\alpha}\left[2-\frac{n^{-\alpha}}{3\delta^4}\right]-\frac{1}{2}\ln(2\pi n\delta^2)}\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p(x)}dx \overset{(25)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,n^{-\alpha}\leqslant\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\frac{\delta}{2}} c(\delta,\alpha)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p(x)}dx \leqslant c_1^{\bar{p}}(\delta,\alpha)r_{1,p}^{\bar{p}}.$$

Пусть $N = [(1-2\delta)n^{\alpha}]$, $h = \frac{1-2\delta}{N} \geqslant n^{-\alpha}$, $\lambda_{nl} = [\delta+(l-1)h, \delta+lh]$, $\Lambda_{nl} = \lambda_{nl-1}\bigcup\lambda_{nl}\bigcup\lambda_{nl+1}$, $\Delta_n^l = \bigcup\limits_{k\in\mathfrak{K}_{nl}}\Delta_{nk}$, где $\mathfrak{K}_{nl} = \{k : \Delta_{nk}\bigcap\Lambda_{nl}\neq\varnothing\}$, $\kappa_l = (\delta+(l-1)h-n^{-\alpha}, \delta+lh+n^{-\alpha})$ и $p_l = \min\limits_{x\in\Delta_n^l} p(x)$. Займемся оценкой интеграла I_{21}

$$\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)}dx = \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}}\zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)-p_l+p_l}dx. \tag{32}$$

Пользуясь введенными обозначениями и (9), легко видеть, что

$$p(x)-p_l \leqslant \frac{d}{\ln\frac{1}{2h+(n+1)^{-1}}} \leqslant \frac{d}{\ln\frac{1}{2c(\delta,\alpha)n^{-\alpha}+n^{-1}}} \leqslant \frac{d}{\ln c(\delta,\alpha)n^{\alpha}}. \tag{33}$$

Далее из (33) получим оценку

$$\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p(x)-p_l} \leqslant$$

$$\leqslant (n+1)^{\frac{d}{\ln c(\delta,\alpha)n^{\alpha}}} \left|\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{\frac{d}{\ln c(\delta,\alpha)n^{\alpha}}} \leqslant c(\delta,\alpha) r_{1,p}^{\frac{d}{\ln c(\delta,\alpha)n^{\alpha}}} \|f\|_{p(\cdot)}^{\frac{d}{\ln c(\delta,\alpha)n^{\alpha}}} \leqslant c(\delta,\alpha,p)$$

и подставим ее в (32)

$$\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x)\right|^{p(x)} dx \leqslant c(\delta,\alpha,p)\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}} \zeta_{nk}(x)\right|^{p_l} dx. \tag{34}$$

Пусть $\mu(x)=\sum\limits_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}} p_{nk}(x)$. Из (34) с помощью неравенств (4), (5) находим

$$\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}\mu^{p_l}(x)\left|\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}}\frac{p_{nk}(x)}{\mu(x)}(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}} f(t)dt\right|^{p_l} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}\mu^{p_l-1}(x)\sum_{k,\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-\alpha}} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}}|f(t)|^{p_l}\,dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}\sum_{k,\frac{k}{n}\in\kappa_l} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}}|f(t)|^{p_l}\,dtdx = \sum_{l=1}^{N}\sum_{k,\frac{k}{n}\in\kappa_l}\int\limits_{\lambda_{nl}} p_{nk}(x)(n+1)\int\limits_{\Delta_{nk}}|f(t)|^{p_l}\,dtdx =$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\sum_{k,\frac{k}{n}\in\kappa_l}\int\limits_{\lambda_{nl}} p_{nk}(x)(n+1)dx\int\limits_{\Delta_{nk}}|f(t)|^{p_l}\,dt \overset{(8)}{\leqslant} \sum_{l=1}^{N}\sum_{k,\frac{k}{n}\in\kappa_l}\int\limits_{\Delta_{nk}}|f(t)|^{p_l}\,dt \leqslant \sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Delta_n^l}|f(t)|^{p_l}\,dt =$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\left(\int\limits_{\Lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt+\int\limits_{\Delta_n^l\setminus\Lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt\right)=\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt+\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Delta_n^l\setminus\Lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt=\mathfrak{S}_1+\mathfrak{S}_2.$$

Обозначим

$$s_i(t)=\begin{cases} p_l, & \text{при } t\in\lambda_{nl-2+i},\ i=1,2,3,\\ p(t), & \text{для остальных } t\in E,\end{cases}$$

и перейдем к оценке $\mathfrak{S}_1$

$$\mathfrak{S}_1=\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\Lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt=\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl-1}\bigcup\lambda_{nl}\bigcup\lambda_{nl+1}}|f(t)|^{p_l}\,dt=$$

$$=\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl-1}}|f(t)|^{p_l}\,dt+\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl}}|f(t)|^{p_l}\,dt+\sum_{l=1}^{N}\int\limits_{\lambda_{nl+1}}|f(t)|^{p_l}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\delta-h}^{1-\delta-h}|f(t)|^{s_1(t)}\,dt+\int\limits_{\delta}^{1-\delta}|f(t)|^{s_2(t)}\,dt+\int\limits_{\delta+h}^{1-\delta+h}|f(t)|^{s_3(t)}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{E}\left(|f(t)|^{s_1(t)}+|f(t)|^{s_2(t)}+|f(t)|^{s_3(t)}\right)dt. \tag{35}$$

Так как $s_i(t)\leqslant p(t)$, то с учетом (3) можно получить для (35) следующую оценку:

$$\int\limits_{E}\left(|f(t)|^{s_1(t)}+|f(t)|^{s_2(t)}+|f(t)|^{s_3(t)}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{E}\|f\|_{s_1(\cdot)}^{s_1(t)}\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_1(\cdot)}}\right|^{s_1(t)}dt+\int\limits_{E}\|f\|_{s_2(\cdot)}^{s_2(t)}\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_2(\cdot)}}\right|^{s_2(t)}dt+\int\limits_{E}\|f\|_{s_3(\cdot)}^{s_3(t)}\left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_3(\cdot)}}\right|^{s_3(t)}dt\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_E r_{p,s_1}^{s_1(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_1(\cdot)}}\right|^{s_1(t)} dt + \int\limits_E r_{p,s_2}^{s_2(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_2(\cdot)}}\right|^{s_2(t)} dt + \int\limits_E r_{p,s_3}^{s_3(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s_3(\cdot)}}\right|^{s_3(t)} dt \leqslant$$
$$\leqslant r_{s_1,p}^{\bar{s_1}(E)} + r_{s_2,p}^{\bar{s_2}(E)} + r_{s_3,p}^{\bar{s_3}(E)}. \tag{36}$$

Остается оценить $\mathfrak{S}_2$. Пусть $k_l^- = \min\{k : \Delta_{nk} \in \Delta_n^l\}$ и $k_l^+ = \max\{k : \Delta_{nk} \in \Delta_n^l\}$. Введем следующие обозначения:

$$\eta_{nl}^- = \Delta n k_l^- \backslash \lambda_{nl-1},\ \eta_{nl}^+ = \Delta n k_l^+ \backslash \lambda_{nl+1},$$

$$s^-(t) = \begin{cases} p_l \text{ при } t \in \eta_{nl}^-, \\ p(t) \text{ для остальных } t \in E, \end{cases} \qquad s^+(t) = \begin{cases} p_l & \text{при } t \in \eta_{nl}^+, \\ p(t) & \text{для остальных } t \in E. \end{cases}$$

Тогда $\Delta_n^l \backslash \Lambda_{nl} = \eta_{nl}^- \bigcup \eta_{nl}^+$ и из (3)

$$\mathfrak{S}_2 = \sum_{l=1}^N \int\limits_{\eta_{nl}^-} |f(t)|^{p_l}\, dt + \sum_{l=1}^N \int\limits_{\eta_{nl}^+} |f(t)|^{p_l}\, dt \leqslant \int\limits_E |f(t)|^{s^-(t)}\, dt + \int\limits_E |f(t)|^{s^+(t)}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_E \|f\|_{s^-(\cdot)}^{s^-(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s^-(\cdot)}}\right|^{s^-(t)} dt + \int\limits_E \|f\|_{s^+(\cdot)}^{s^+(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s^+(\cdot)}}\right|^{s^+(t)} dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_E r_{p,s^-}^{s^-(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s^-(\cdot)}}\right|^{s^-(t)} dt + \int\limits_E r_{p,s^+}^{s^+(t)} \left|\frac{f(t)}{\|f\|_{s^+(\cdot)}}\right|^{s^+(t)} dt \leqslant r_{s^-,p}^{\bar{s}^-(E)} + r_{s^+,p}^{\bar{s}^+(E)}. \tag{37}$$

Из (18), (26), (27), (31), (36) и (37) получаем равномерную ограниченность операторов Канторовича – Бернштейна на единичном шаре пространства $L^{p(x)}(E)$. □

Покажем теперь, что операторы Бернштейна – Канторовича сходятся в $L^{p(x)}(E)$. Сначала рассмотрим случай непрерывных функций. Пусть для $\xi > 0$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},\ |x' - x''| < \xi,\ x', x'' \in E,\ f \in C([0,1]). \tag{38}$$

Полагая $\zeta'_{nk}(x) = p_{nk}(x)(n+1)\int_{\Delta_{nk}}[f(x) - f(t)]dt$, из (6) имеем:

$$f(x) - K_n(f,x) = \sum_{k=0}^n \zeta'_{nk}(x)dt = \sum\nolimits_1 \zeta'_{nk}(x) + \sum\nolimits_2 \zeta'_{nk}(x),$$

где $\sum_1$ берется по k, для которых $|x - t| < \xi$, а $\sum_2$ — по остальным k. Поскольку из $|f(x)| < C$ $(x \in [0,1])$ следует, что $\|f\|_{p(\cdot)} < C$, то, воспользовавшись (38) и (7), приходим к оценке

$$\|f - K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leqslant \left\|\sum\nolimits_1 \zeta'_{nk}(*)\right\|_{p(\cdot)} + \left\|\sum\nolimits_2 \zeta'_{nk}(*)\right\|_{p(\cdot)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\xi^2},$$

где $M = \max\limits_{x\in E} f(x)$. Если n достаточно велико, то $\frac{M}{n\xi^2} < \varepsilon$ и

$$\|f - K_n(f)\|_{p(\cdot)} \leqslant \varepsilon,$$

что и доказывает сходимость операторов Бернштейна – Канторовича в $L^{p(x)}(E)$ в случае непрерывных функций. Для сходимости последовательности $\{K_n(f,x)\}_{n=1}^\infty$ к функции $f(x) \in L^{p(x)}(E)$ достаточно того, чтобы (см. [7, с. 215]) операторы $K_n(f,x)$ были равномерно ограничены и сходились к тождественному оператору $I(f)$ для любой $f \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — некоторое множество, всюду плотное в $L^{p(x)}(E)$. Из доказанной теоремы и того факта, что $C[0,1]$ плотно в $L^{p(x)}(E)$ (см. [3, с. 41]), вытекает сходимость операторов Бернштейна – Канторовича в случае произвольных функций из $L^{p(x)}(E)$. □

Автор благодарит И. И. Шарапудинова за постановку задачи, а также ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. *Kantorovich L. V.* Sur certains developpements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II // C. R. Acad. Sci. URSS. 1930. P. 563–568; 595–600.
2. *Lorentz G. G.* Bernstein Polynomials. Toronto : Univ. Toronto Press, 1953. 130 p.
3. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, вып. 4. С. 613–632.
4. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. Владикавказ, 2012. 270 с.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М. ; Л. : ГИТТЛ, 1949. 688 с.
6. *Боровков А. А.* Теория вероятностей : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, 1986. 432 с.
7. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М. : Наука, 1967. 416 с.

Образец для цитирования:

Шах-Эмиров Т. Н. О сходимости последовательности операторов Бернштейна – Канторовича в пространствах Лебега с переменным показателем // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 322–330. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330.

On Convergence of Bernstein – Kantorovich Operators sequence in Variable Exponent Lebesgue Spaces

T. N. Shakh-Emirov

Tadgidin N. Shakh-Emirov, Daghestan Scientific Centre of RAS, 45, Gadgieva st., 367000, Makhachkala, Republic of Dagestan, Russia, tadgius@gmail.com

Let $E=[0,1]$ and let a function $p(x)\geqslant 1$ be measurable and essentially bounded on E. We denote by $L^{p(x)}(E)$ the set of measurable function f on E for which $\int_E |f(x)|^{p(x)}dx<\infty$. The convergence of a sequence of operators of Bernstein – Kantorovich $\{K_n(f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ to the function f in Lebesgue spaces with variable exponent $L^{p(x)}(E)$ is studied. The conditions on the variable exponent at which this sequence is uniformly bounded in these spaces are obtained and, as a corollary, it is shown that if $n\to\infty$ then $K_n(f,x)$ converges to function f in the metric of space $L^{p(x)}(E)$ defined by the norm $\|f\|_{p(\cdot)}=\|f\|_{p(\cdot)}(E)=\inf\left\{\alpha>0:\ \int\limits_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)}dx\leqslant 1\right\}$.

Key words: Lebesgue spaces with variable exponent, Bernstein – Kantorovich operators, Bernstein polynomials.

References

1. Kantorovich L. V. Sur certains developpements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein I, II. *C. R. Acad. Sci. URSS*, 1930, pp. 563–568; pp. 595–600.
2. Lorentz G. G. *Bernstein Polynomials*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1953, 130 p.
3. Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Math. Notes*, 1979, vol. 26, iss 4, pp. 796–806. DOI: 10.1007/BF01159546.
4. Sharapudinov I. I. *Nekotorye voprosy teorii priblizhenii v prostranstvakh Lebega s peremennym pokazatelem* [Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces]. YuMI VNTs RAN i RSO-A, Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaia teoriia funktsii* [Constructive theory of functions]. Moscow ; Leningrad, GITTL, 1949. 688 p. (in Russian).
6. Borovkov A. A. *Teoriia veroiatnostei* : ucheb. posobie dlia vuzov [Probability Theory : Textbook for High Schools]. Moscow, Nauka, 1986, 432 p. (in Russian).
7. Vulih B. Z. *Vvedenie v funktsional'nyi analiz* [Introduction to functional analisys]. Moscow, Nauka, 1967, 416 p. (in Russian).

Please cite this article in press as:

Shakh-Emirov T. N. On Convergence of Bernstein – Kantorovich Operators sequence in Variable Exponent Lebesgue Spaces. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 322–330 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-322-330.