



УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. О. Ватульян¹, С. А. Нестеров²

¹Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, vatulyan@math.rsu.ru

²Кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 1079@list.ru

Функционально-градиентные материалы находят широкое применение в областях техники с большими термомеханическими нагрузками. Эффективность применения таких материалов зависит от знания точных законов неоднородности. Ранее авторами был предложен подход по идентификации гладких законов неоднородности для термоупругого стержня. Для этого были получены операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые функции для решения обратной задачи и проведены вычислительные эксперименты. В данной работе на основе аппарата, разработанного ранее, были исследованы особенности восстановления термоупругих характеристик с большим градиентом в окрестности центра и торца стержня.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, коэффициентная обратная задача, термоупругий стержень, интегральные уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие методов идентификации термомеханических характеристик неоднородных тел — важнейшая задача механики деформируемого твердого тела. Часто при термомеханических расчетах полагают, что материал однороден, поэтому его характеристики описывают набором физических постоянных, которые определяют из простых макроэкспериментов. Однако в последние годы в различные области техники все шире внедряются функционально-градиентные материалы, выступающие в качестве альтернативы слоистым композитам [1, 2]. Функционально-градиентные материалы — композиты, обладающие переменными физическими свойствами, в которых избегают скачков термомеханических характеристик через поверхность раздела, благодаря их непрерывному изменению. Однако в силу несовершенства производства функционально-градиентных материалов в конечном изделии могут присутствовать отклонения от заданных технологических параметров. Неоднородную структуру материалы могут приобрести не только в процессе изготовления, но и при эксплуатации, под воздействием облучения, сильных магнитных полей, больших градиентов температур. При этом практически невозможно заранее прогнозировать изменения в структуре материалов, вызванные внешними воздействиями. Знание реальных переменных характеристик изделия после изготовления или эксплуатации позволяет правильно оценить его функциональные свойства и возможность использования.

Прямые измерения термоупругих характеристик в случае неоднородных тел невозможны. Для их нахождения требуется решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ) термоупругости. К настоящему времени накоплен достаточно большой опыт исследования обратных задач, который достаточно полно изложен в монографиях [3, 4]. Наиболее распространенным методом решения коэффициентных обратных задач теплопроводности и теории упругости является метод сведения их к минимизации неквадратичного функционала невязки [3, 7]. При этом необходимо использовать итерационные процессы, на каждом шаге которых требуется вычисления градиента функционала. Однако количество работ по исследованию КОЗ термоупругости еще невелико [5–7]. Исследования ограничиваются в основном слабонеоднородными материалами [5], или идентификацией характеристик полубесконечной вертикально-неоднородной термоупругой среды [6]. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения термоупругости не относятся ни к параболическому, ни к гиперболическому типу, а также с трудностями при построении нелинейных операторных отношений, связывающих искомые и измеряемые в эксперименте функции. Однако в ряде работ [8, 9] эта трудность была преодолена при помощи обобщенного соотношения взаимности. При этом достаточно просто были получены линеаризованные интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для нахождения поправок восстанавливаемых коэффициентов и проведены вычислительные эксперименты по их восстановлению. Однако в этих работах не



исследованным остался вопрос об идентификации термомеханических характеристик с существенным изменением функций как на поверхности, так и внутри тела, т. е. локализованных неоднородностей. Решению этой задачи и посвящена данная работа. В работе прямая задача для неоднородного термоупругого стержня после преобразования Лапласа решается путем сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Обратная задача на основе обобщенного соотношения взаимности и линеаризации сводится к поэтапному решению интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Проведены вычислительные эксперименты по идентификации локализованных неоднородностей, выявлены особенности реконструкции. Даны рекомендации для практического использования предложенного подхода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l под действием приложенной к торцу $x = l$ силы $F = p_0\lambda(t)$. Начально-краевая задача в случае отсутствия массовых сил имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_x = E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\theta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial \theta}{\partial x}) = c(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad (3)$$

$$\theta(0, t) = u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}(l, t) = 0, \quad \sigma_x(l, t) = p_0\lambda(t), \quad (4)$$

$$\theta(x, 0) = u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $\rho(x)$ — плотность, $E(x)$ — модуль Юнга, $\gamma(x)$ — коэффициент термоупругих напряжений, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $c(x)$ — удельная объемная теплоемкость, $\theta(x, t)$ — приращение температуры, $u(x, t)$ — смещение точек стержня.

В обратной задаче требуется определить одну из термомеханических характеристик стержня ($c(x)$, $k(x)$, $\rho(x)$, $E(x)$, $\gamma(x)$) при известных остальных из (1)–(5) по некоторой дополнительной информации о торцевом смещении стержня:

$$u(l, t) = g(t), \quad t \in [T_1, T_2]. \quad (6)$$

Аналогично ставится задача о возбуждении колебаний стержня под действием теплового потока $q = q_0\varphi(t)$. В этом случае в качестве дополнительной информации выступает торцевая температура стержня:

$$\theta = f(t), \quad t \in [T_3, T_4]. \quad (7)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Порядки материальных модулей, входящих в систему уравнений связанной термоупругости (1)–(5), сильно отличаются между собой, что может привести к большой погрешности решения при реализации прямой задачи. Чтобы этого избежать, обезразмерим задачу (1)–(5), обозначая:

$$\begin{aligned} z = \frac{x}{l}, \quad z \in [0, 1], \quad \bar{k}(z) = \frac{k(zl)}{k_0}, \quad \bar{c}(z) = \frac{c(zl)}{c_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(zl)}{\rho_0}, \quad \bar{E}(z) = \frac{E(zl)}{E_0}, \\ \bar{\gamma}(z) = \frac{\gamma(zl)}{\gamma_0}, \quad t_1 = \frac{l^2 c_0}{k_0}, \quad t_2 = l \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \tau = \frac{t}{t_2}, \quad W = \frac{\gamma_0 \theta}{E_0}, \quad U = \frac{u}{l}, \quad \Omega = \frac{\sigma_x}{E_0}, \\ \delta = \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_0 E_0}, \quad \varepsilon = \frac{t_2}{t_1} = \frac{k_0}{c_0 l} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad \mu = \frac{p_0}{E_0}, \quad k_0 = \max_{x \in [0, l]} k(x), \quad c_0 = \max_{x \in [0, l]} c(x), \\ E_0 = \max_{x \in [0, l]} E(x), \quad \rho_0 = \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad \gamma_0 = \max_{x \in [0, l]} \gamma(x). \end{aligned} \quad (8)$$

После обезразмеривания (8) начально-краевая задача (1)–(5) примет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \rho(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (9)$$



$$\Omega = \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \quad (10)$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau}, \quad (11)$$

$$U(0, \tau) = W(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad \Omega(1, \tau) = \mu \lambda(\tau), \quad (12)$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (13)$$

Прямая задача о колебаниях неоднородного термоупругого стержня может быть решена лишь численно, например, методом сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, как это было сделано в [8, 9]. Применив к (9)–(12) преобразование Лапласа по τ , с учетом начальных условий (13), после некоторых преобразований, получим систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно трансформант безразмерной температуры $\tilde{W}(z, p)$ и напряжения $\tilde{\Omega}(z, p)$:

$$\tilde{W}(z, p) = \int_0^1 K_1(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_2(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi + f_1(p), \quad (14)$$

$$\tilde{\Omega}(z, p) = \int_0^1 K_3(z, \xi, p) \tilde{W}(\xi, p) d\xi + \int_0^1 K_4(z, \xi, p) \tilde{\Omega}(\xi, p) d\xi. \quad (15)$$

Здесь ядра $K_1(z, \xi, p)$, $K_2(z, \xi, p)$, $K_3(z, \xi, p)$, $K_4(z, \xi, p)$ и правая часть $f_1(p)$ системы (14)–(15) имеют вид

$$K_1(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon} (\bar{c}(\xi) + \delta \frac{\bar{\gamma}^2(\xi)}{\bar{E}(\xi)}) \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{k(\eta)}, \quad K_2(z, \xi, p) = -\frac{p}{\varepsilon} \delta \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{E}(\xi)} \int_0^{\min\{z, \eta\}} \frac{d\eta}{k(\eta)},$$

$$K_3(z, \xi, p) = -p^2 \frac{\bar{\gamma}(\xi)}{\bar{E}(\xi)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad K_4(z, \xi, p) = -p^2 \frac{1}{\bar{E}(\eta)} \int_{\min\{z, \eta\}}^1 \bar{\rho}(\eta) d\eta, \quad f_1(p) = -\mu \tilde{\lambda}(p).$$

Решение системы (14)–(15) проводилось на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Численно — аналитические решения СЛАУ, получившиеся после дискретизации системы (14)–(15), показали, что трансформанты температуры и напряжения в узловых точках являются дробно-рациональными функциями от параметра преобразования Лапласа и не имеют особых точек, кроме комплексных полюсов, определяемых ядрами системы и типом нагрузки. Поэтому для нахождения оригиналов температуры и напряжений в работе применялась теория вычетов [9]: оригиналы находились в виде конечной суммы показательных функций. Точность решения прямой задачи проверялась путем сравнения численного решения с аналитическим решением, полученным для однородного стержня, а также конечно-разностными решениями, полученными для различных законов неоднородности. Подобрана такая сетка точек коллокаций, при которой погрешность решения составляла менее 1%.

Для решения обратных задач термоупругости воспользуемся операторными уравнениями, полученными ранее в работах [8, 9]. Так, для нахождения поправок к коэффициенту теплопроводности $\delta \bar{k}^{(n-1)}$ при законе нагружения $\lambda(\tau) = H(\tau)$ необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta \bar{k}^{(n-1)} M_1(z, \tau) dz = f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau), \quad \tau \in [c, d], \quad (16)$$

где ядро интегрального уравнения (16) имеет вид

$$M_1(z, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z \partial \tau_1} \frac{\partial P^{(n-1)}(z, \tau_1 - \tau)}{\partial z} d\tau_1.$$



Для нахождения поправок $\delta \bar{E}^{(n-1)}(z)$ при законе нагружения $\varphi(\tau) = H(\tau)$ необходимо решать интегральное уравнение:

$$\int_0^1 \delta \bar{E}^{(n-1)} M_2(z, \tau) dz = -\mu(g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau)), \quad \tau \in [a, b]. \quad (17)$$

Решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вида (16), (17) является некорректной задачей, для ее регуляризации в работе применялся метод А. Н. Тихонова [10].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В работе натурный эксперимент был заменен вычислительным. Безразмерные термоупругие характеристики стержня $\bar{a}(z)$ восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz + b$ на основе минимизации функционала невязки, который в случае нагружения торца стержня тепловым потоком имеет вид

$$J_1 = \int_c^d (f(\tau) - W^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (18)$$

а в случае нагружения торца стержня силой его вид будет следующим:

$$J_2 = \int_a^b (g(\tau) - U^{(n-1)}(1, \tau))^2 d\tau, \quad (19)$$

На втором этапе на основе решения соответствующих интегральных уравнений вида (16), (17) находились поправки реконструируемых функций и строился итерационный процесс их уточнения по схеме $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta \bar{a}^{(n-1)}(z)$. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении некоторого порогового значения соответствующего функционала невязки (16), (17), равного 10^{-6} .

Сначала вычислительные эксперименты по идентификации локализованных неоднородностей проводились на равномерной сетке при $n = 20$ разбиениях в квадратурной формуле трапеций аналогично, как это было сделано ранее в работах [8, 9]. Однако результаты реконструкции для законов с большим градиентом изменения функции оказались неудовлетворительными, так как погрешность реконструкции часто превышала 30%. Поэтому с целью уменьшения погрешности реконструкции локализованных неоднородностей была введена неравномерная сетка при $n = 35$ со сгущением точек коллокаций в окрестности локализованных неоднородностей. В этом случае максимальная погрешность реконструкции не превышала 20%. Вычислительные эксперименты проводились при следующих значениях безразмерных параметров: $\varepsilon = 10^{-6}$, $\mu = 0.1$. Выяснены информативные временные интервалы для измерения входной информации, т. е. температуры и смещения на торце стержня. Так, измерение температуры наиболее информативно на безразмерном временном интервале $[c, d] = [0, 0.5]$ и 5-ти точек наблюдения внутри него, а измерение смещения на безразмерном временном интервале $[a, b] = [0, 1]$ и 6-ти точках наблюдения внутри него. Для всех точных и восстановленных функций были вычислены интегральные характеристики (первые моменты) по формуле

$$L_r = \int_0^1 z^r \bar{a}(z) dz, \quad r = 0, 1, 2. \quad (20)$$

В первой серии экспериментов восстанавливались законы, характеризующие локализованную неоднородность в окрестности центра стержня. На рис. 1 представлены результаты реконструкции коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.5)^\alpha}$ при различных значениях параметра α ($\alpha = 6, 4, 2$). Начальное приближение бралось в виде $\bar{k}_0 = 0.9 + 0.9z$, параметр связанности $\delta = 0.03$. Выяснилось, что изменение параметра связанности практически не влияло на результаты реконструкции.

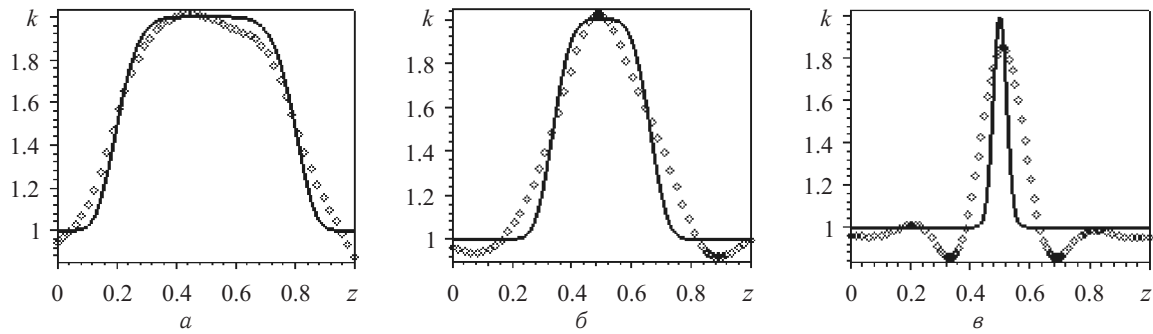


Рис. 1. Реконструкция коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.5)^\alpha}$ при различных значениях параметра α : а) $\alpha = 6$; б) $\alpha = 4$; в) $\alpha = 2$

Во второй серии экспериментов восстанавливались законы, характеризующие локализованные неоднородности в окрестности торца стержня. На рис. 2 представлены результаты реконструкции модуля Юнга.

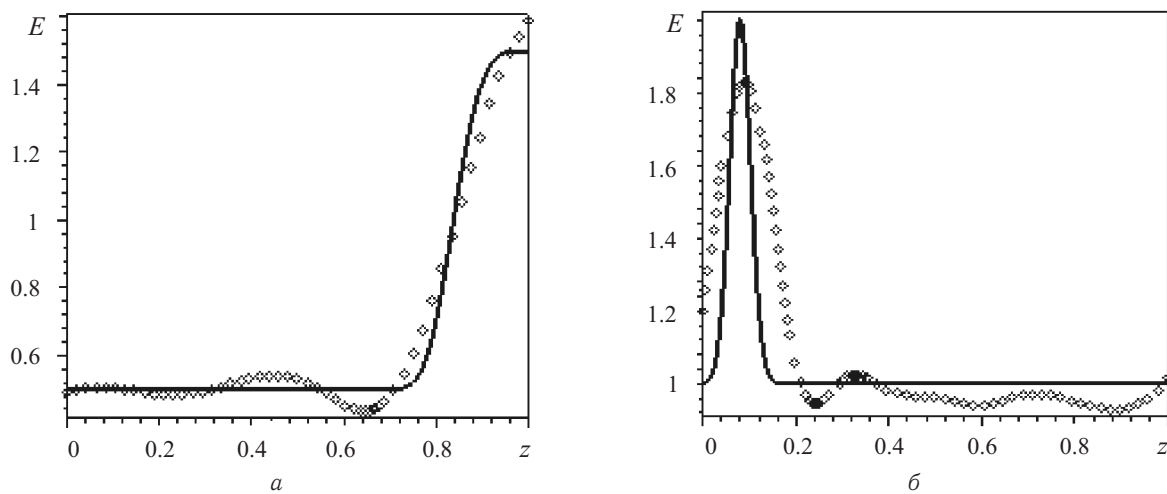


Рис. 2. Реконструкция модуля Юнга: а) $\bar{E}(z) = 0.5 + e^{-1000(z-1)^4}$; б) $\bar{E}(z) = 1 + e^{-1000(z-0.8)^2}$

На рис. 1, 2 сплошными линиями изображены точные функции, а точками — восстановленные. Из анализа рис. 1 и рис. 2 следует, что при небольшой скорости изменения функции, например, при $\alpha = 6, 4$ (см. рис. 1, а, б; рис. 2, а) процедура идентификации происходит достаточно успешно: погрешность реконструкции не превышает 11%, а для достижения порогового значения в соответствующем функционале невязки требуется не более 8 итераций. Если же функция изменяется очень быстро, например, при $\alpha = 2$ (см. рис. 1, в; рис. 2, б), то результаты реконструкции значительно ухудшаются: изображение получается более расплывчатым, максимальная погрешность реконструкции возрастает до 20%, для достижения порогового значения в соответствующем функционале невязки требуется более 14 итераций. Однако для всех законов неоднородности выяснено, что интегральные характеристики, вычисленные для точной и восстановленной функции по формуле (20), практически совпадают.

ВЫВОДЫ

Приведены постановки задач об идентификации неоднородных характеристик термоупругого стержня с существенным изменением модулей в центре и в окрестности торца стержня. Основываясь на ранее разработанном подходе, проведены вычислительные эксперименты по идентификации характеристик на конкретных примерах. Выяснены значения параметров, характеризующие неоднородность, при которых идентификация происходит достаточно успешно.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН № 1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования».



Библиографический список

1. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // *Composites Science and Technology*. 1996. № 56. P. 1099–1104.
2. Lee W. Y., Stinton D. P., Bernardt C. C., Erdogan F., Lee Y. D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // *J. of American Ceramic Society*. 1996. Vol. 19. P. 3003–3012.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
5. Ломазов В. А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред / ОрелГТУ. Орел, 2002. 168 с.
6. Апбасов С. О., Яхно В. Г. Обратная задача динамической несвязанной термоупругости // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 1986. С. 63–70.
7. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *J. of Thermal Stresses*. 2003. Vol. 26, № 1. P. 13–23.
8. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *Intern. J. of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
9. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журн.* 2014. Т. 87, № 1. С. 217–224.
10. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола Я. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

About the Specifics of Identification Thermomechanical Characteristics of Functionally Graded Materials

A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov

Southern Federal University, 8-a, Milchakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia, vatulyan@math.rsu.ru, 1079@list.ru

Functionally graded materials are widely used in engineering fields with large thermo-mechanical loads. Efficiency of application of these materials depends on accurate knowledge of the laws of heterogeneity. Earlier, the authors have proposed an approach for the identification of smooth laws of heterogeneity for thermoelastic rod. To do this, were received operator equation linking activities and measurable functions for the solution of inverse problem and carried out computational experiments. In this paper, on the basis of the device, previously developed, were investigated features for restoring thermoelastic characteristics with a large gradient in the vicinity of the center and the end of the rod.

Key words: functionally graded materials, coefficient inverse problem, thermoelastic rod, integral equations.

This work was supported by the Program of fundamental research on the strategic directions of development of science Of the Presidium of the Russian Academy of Sciences no. 1 «Fundamental problems of mathematical modeling».

References

1. Wetherhold R. C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Composites Science and Technology*, 1996, no. 56, pp. 1099–1104.
2. Lee W. Y., Stinton D. P., Bernardt C. C., Erdogan F., Lee Y. D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications. *J. of American Ceramic Society*, 1996, vol. 19, pp. 3003–3012.
3. Alifanov O. M., Artyuhin E. A., Rummyantsev S. V. *Ekstremalniye metodyi resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1988, 288 p. (in Russian).
4. Vatulyan A. O. *Obratniye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of deformable solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 224 p. (in Russian).
5. Lomazov V. A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Problems of identification of inhomogeneous thermoelastic bodies]. Orel, OrelSTU, 2002, 168 p. (in Russian).
6. Apbasov S. O., Yakhno V. G. The inverse problem of dynamic unlinked thermoelasticity. *Nekotore voprosi differentsialnykh uravneniy i diskretnoi matematiki* [Some questions of the differential equations and discrete mathematics], Novosibirsk, Novosibirsk Univ. Press, 1986, pp. 63–70 (in Russian).
7. Lukaszewicz S. A., Babaei R., Qian R. E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *J. of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
8. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51(3), pp. 767–773.
9. Vatulyan A. O., Nesterov S. A. About one method of



identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics], 2014, vol. 87, no. 1, pp. 217–224 (in Russian).

10. Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G. *Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1990, 230 p. (in Russian).

УДК 533.6.011

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ НЕВЯЗКОЙ ТЯЖЁЛОЙ ЖИДКОСТИ И НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. И. Ливеровский¹, С. П. Шевырёв²

¹Аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, LiverovskiyDI@gmail.com

²Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной информатики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ShevSP@rambler.ru

Данное исследование посвящено модификации метода Давыдова (крупных частиц) для случая несжимаемой жидкости. Рассматривается моделирование течения тяжелой несжимаемой невязкой жидкости на регулярной сетке модифицированным методом Давыдова в трёхмерном пространстве. Кроме того, проводится сравнение полученных результатов с двумерным случаем, а также проверяется симметричность трёхмерного течения, там где она есть в исходной задаче. Выводятся формулы модифицированного метода Давыдова для случая трёх пространственных измерений, включая разностный аналог трёхмерного уравнения Пуассона для давления. Обобщается критерий устойчивости. Приводится описание алгоритма построения трёхмерной свободной поверхности. Реализована трёхмерная компьютерная графика, показывающая развитие процессов во времени в режиме online.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, метод Давыдова, метод крупных частиц, свободная поверхность, уравнение Пуассона для давления, критерий устойчивости разностной схемы, симметричные течения.

1. СУТЬ МЕТОДА ДАВЫДОВА

Суть метода Давыдова (метода крупных частиц) состоит в том, что использует расщепление по физическим факторам и по координатам. В методе Давыдова выделяют три этапа [1]. Будем рассматривать декартову прямоугольную систему координат. Решение будет проводиться на регулярной разностной сетке, а это означает, что расчётная область разбивается на ячейки с шагом h_x вдоль оси X , с шагом h_y вдоль оси Y и с шагом h_z вдоль оси Z . Расчётная область будет разбита на K частей вдоль оси X , M частей вдоль оси Y , N частей вдоль оси Z . Ячейки сетки будут иметь вид прямоугольных параллелепипедов. Каждая ячейка будет определяться тройкой индексов (i, j, k) , где i определяет положение ячейки вдоль оси Z , j определяет положение ячейки вдоль оси Y и k определяет положение ячейки вдоль оси X . Все расчётные параметры (давление и компоненты вектора скорости) будут отнесены к центру ячейки. Значения на границах ячейки будут иметь полуцелый индекс по соответствующей координате. Рассмотрим этапы метода Давыдова подробнее. Приведённые далее формулы получаются аналогично формулам для двумерного случая [2]. Течение тяжелой несжимаемой невязкой жидкости в трёхмерном пространстве моделируется путем решения краевых задач для системы уравнений Эйлера и уравнения неразрывности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$