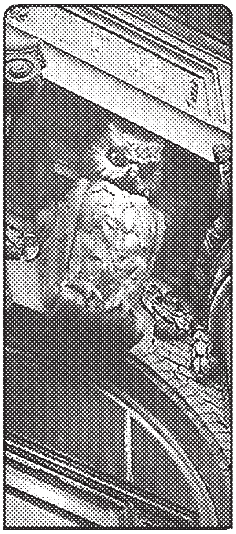

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.17

Т-НЕПРИВОДИМЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Д. Ю. Осипов

Осипов Дмитрий Юрьевич, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, st_hill@mail.ru

Рассматривается один из способов построения оптимального расширения графа — Т-неприводимое расширение (ТНР). До сих пор остается нерешенной следующая задача: построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Данная задача была решена С. Г. Курносовой для подкласса сверхстройных деревьев –- пальм. Для несложных сверхстройных деревьев данная задача была решена М. Б. Абросимовым. Приводится контрпример для схемы из статьи Харари и Хурума «One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees», которая описывает построение одного ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Приводится схема построения ТНР для сложных сверхстройных деревьев с числом вершин $k \geqslant 4$ и доказывается её корректность. Рассматриваются различные семейства сложных сверхстройных деревьев с $k = 3$ и строится ТНР для каждого из семейств.

Ключевые слова: граф, Т-неприводимое расширение, сверхстройные деревья, сложные сверхстройные деревья, несложные сверхстройные деревья.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-330-339

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Все понятия и определения, используемые в данной статье, соответствуют понятиям и определениям в [1].

Определение 1. Расширением n-вершинного графа G называется граф H с $n+1$ вершинами такой, что граф G вкладывается в каждый максимальный подграф графа H.

Простейшим примером расширения графа G будет его тривиальное расширение — соединение графа G с одноэлементным графом (т. е. к графу G добавляется вершина, которая соединяется ребром с каждой вершиной графа G).

Понятие расширения графа тесно связано с вопросами отказоустойчивости дискретных систем. Если граф G рассматривать как функциональную модель некоторого устройства Σ, то расширение H графа G можно воспринимать как схему отказоустойчивой реализации этого устройства: при отказе любого элемента (что истолковывается как удаление из H соответствующей вершины и всех связанных с нею ребер) в неповрежденной части обнаруживается работоспособная модель для Σ.

При таком подходе естественно возникает вопрос об оптимальности отказоустойчивой реализации для данной системы, т. е. о получении такого расширения H графа G, которое не содержало бы «лишних» ребер. Один из способов — конструкция минимального расширения графа, другой — его Т-неприводимое расширение.

Определение 2. Минимальным расширением графа G называется его расширение с минимальным количеством ребер.

В общем случае при построении минимального расширения возникает необходимость добавлять ребра в исходный граф, т. е. менять всю систему, моделируемую этим графом. Но иногда технически важно найти решение следующей задачи: построить оптимальное расширение данного графа, сохраняя его первоначальную конструкцию (т. е. не меняя связей внутри него). Для этого существует конструкция Т-неприводимого расширения.

Определение 3. Т-неприводимым расширением графа G называется расширение графа G, получаемое из тривиального расширения данного графа удалением максимально возможного набора добавленных при построении тривиального расширения ребер.

Определение 4. Деревом называется связный граф, в котором нет циклов.

Определение 5. Дерево называется сверхстройным, если в точности одна его вершина имеет степень больше 2. Эту вершину будем называть корнем сверхстройного дерева.

Сверхстройное дерево можно рассматривать как объединение k цепей с общей концевой вершиной. При этом дерево можно закодировать вектором, состоящим из длин цепей в порядке невозрастания: $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$. Очевидно, что такое кодирование сверхстройных деревьев при $k > 2$ является взаимно однозначным.

Будем нумеровать цепи сверхстройного дерева от 1 до k. Цепи длины m_1 присвоим номер 1, цепи длины m_2 — номер 2 и т. д. Цепь длины m_k будет иметь номер k. Введем следующую нумерацию вершин сверхстройного дерева: корень сверхстройного дерева — v_0, остальные вершины будут иметь вид v_{ij}, где i — номер цепи сверхстройного дерева, которой принадлежит вершина, j — расстояние данной вершины от корня (смежные с корнем вершины имеют расстояние 1).

2. ТНР ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСЛОЖНЫХ И СЛОЖНЫХ С $k \geqslant 4$ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

До сих пор остается нерешенной следующая задача: построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Данная задача была решена С. Г. Курносовой для подкласса сверхстройных деревьев — пальм (см. [2]). Попытка построить одно из ТНР для произвольного сверхстройного дерева описывается в [3].

В [3] описывается схема (далее будем называть эту схему схемой Харари – Хурума) построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева. Заметим, что в [3] доказательство корректности схемы Харари – Хурума отсутствует. Эта схема использует понятие сложной вершины.

Определение 6. Вершина v_{ij} сверхстройного дерева T называется сложной, если среди длин цепей дерева T нет цепи длины $j-1$ или $m_i - j$.

В соответствии со схемой Харари – Хурума для построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева необходимо:

- добавить новую вершину к исходному графу;
- соединить ребром добавленную вершину с корнем и со всеми листьями исходного дерева;
- если в исходном сверхстройном дереве нет сложных вершин, то полученный граф и является искомым ТНР. Если есть некоторая сложная вершина v_{ij}, то соединить ребром добавленную вершину и вершину $v_{i(j-1)}$. Так поступаем для всякой сложной вершины.

Однако схема Харари – Хурума построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева не всегда корректна. В [4] даются контрпримеры для данной схемы. Например, для сверхстройного дерева (3, 2, 2) в [4] строится граф по схеме Харари – Хурума, а затем доказывается, что построенный граф не является ТНР для сверхстройного дерева (3, 2, 2).

Определение 7. Сверхстройное дерево, имеющее хотя бы одну сложную вершину, назовем сложным сверхстройным деревом.

Определение 8. Сверхстройное дерево, не имеющее ни одной сложной вершины, назовем несложным сверхстройным деревом.

В [4] приводится предположение, что схема Харари – Хурума неверна только для определенного подкласса сверхстройных деревьев, а именно для сложных сверхстройных деревьев, состоящих из трех цепей.

В [5, с. 108–110] дается описание построения одного из ТНР для произвольного несложного сверхстройного дерева и доказывается корректность данного построения.

Обозначим через T_k — сверхстройное дерево $(m_1, \ldots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k$.

Определение 9. Графом T'_k назовем граф, получаемый из сверхстройного дерева T_k добавлением новой вершины и ребер, соединяющих эту вершину с корнем, со всеми листьями исходного дерева T_k и со всеми такими вершинами $v_{i(j-1)}$, что v_{ij} — сложная вершина исходного дерева T_k $(1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1)$.

Определение 10. Графом T''_k назовем граф, получаемый из сверхстройного дерева T_k добавлением новой вершины и ребер, соединяющих эту вершину со всеми листьями исходного дерева T_k и со всеми такими вершинами $v_{i(j-1)}$, что v_{ij} — сложная вершина исходного дерева T_k $(1 \leqslant i \leqslant k, 2 \leqslant j \leqslant m_i - 1)$.

Замечание 1. Пусть даны сложные сверхстройные деревья T_k вида $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \ldots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, v_0 — корень T_k. Построим для T_k по определению 10 граф T''_k (вершину, добавленную при построении графа T''_k, назовем w). Рассмотрим вложение исходного графа T_k в некоторые максимальные подграфы графа T''_k.

- $T''_k - w$. Вложение очевидно, получился исходный граф T_k.
- $T''_k - v_0$. Корнем может быть только вершина w. Тогда цепи будут иметь вид: $w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \ldots v_{i2} v_{i1}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$. T_k вкладывается в граф $T''_k - v_0$.
- $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$. Так как v_{ij} — сложная вершина, то по определению в графе $T''_k - v_{ij}$ имеется ребро $\{w, v_{i(j-1)}\}$, тогда корень — вершина v_0, i-я цепь будет иметь вид: $v_0 v_{i1} v_{i2} \ldots v_{i(j-1)} w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \ldots v_{i(j+1)}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k. В силу произвольности выбора сложной вершины T_k вкладывается в любой из графов $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — сложная вершина.
- $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — вершина, не являющаяся сложной, $1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$. Если v_{ij} не является сложной, то дерево T_k имеет цепь длины $j-1$ или $m_i - j$. Пусть имеется некоторая цепь $v_0 v_{t1} v_{t2} \ldots v_{tm_t}$.

  а) $m_t = j - 1$. Тогда цепь $v_0 v_{i1} v_{i2} \ldots v_{i(j-1)}$ — цепь длины m_t, цепь $v_0 v_{t1} v_{t2} \ldots v_{tm_t} w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \ldots v_{i(j+1)}$ — цепь длины m_i. Остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k.

  б) $m_t = m_i - j$. Тогда $w v_{im_i} v_{i(m_i-1)} \ldots v_{i(j+1)}$ — цепь длины m_t, цепь $w v_{tm_t} \ldots v_{t2} v_{t1} v_0 v_{i1} v_{i2} \ldots v_{i(j-1)}$ — цепь длины m_i. Остальные цепи имеют вид $w v_{sm_s} v_{s(m_s-1)} \ldots v_{s2} v_{s1}$, $s \neq i$, $s \neq t$.

  В силу произвольности выбора вершины, T_k вкладывается в любой из графов $T''_k - v_{ij}$, где v_{ij} — вершина, не являющаяся сложной.

Очевидно, если данные рассуждения справедливы для графа T''_k, то они справедливы и для графа T'_k, построенного для того же самого графа T_k.

Замечание 2. Пусть даны сложные сверхстройные деревья T_k вида $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \ldots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, v_0 — корень T_k. Построим тривиальное расширение для T_k и назовем полученный граф H_k (вершину, добавленную при построении тривиального расширения, назовем w). Будем удалять ребра из графа H_k и проверять, является ли расширением для T_k полученный граф.

- $H_k - \{w, v_{im_i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Очевидно, в таком случае достаточно удалить вершину $v_{i(m_i-1)}$ из $H_k - \{w, v_{im_i}\}$. Тогда вершина v_{im_i} будет иметь степень 0, следовательно, исходный граф не вкладывается в полученный граф. В силу произвольности выбора удаляемого ребра ни один из графов $H_k - \{w, v_{im_i}\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, не является расширением для T_k.

- $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$. Если v_{ij} — сложная вершина, то по определению сложной вершины в T_k нет цепей длины $j-1$ или $m_i - j$. Удалим из графа $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$ вершину v_{ij}. Тогда вершина $v_{i(j-1)}$ имеет степень 1, т.е. становится листом одной из цепи. Корнем могут быть только две вершины v_0 и w.

  а) v_0 — корень. Тогда в цепь $v_0v_{i1}v_{i2}\dots v_{i(j-1)}$ вкладывается некоторая цепь исходного дерева T_k, пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}v_{t2}\dots v_{tm_t}$. Тогда в цепь $v_0v_{t1}v_{t2}\dots v_{tm_t}wv_{im_i}v_{i(m_i-1)}\dots v_{i(j+1)}$ вкладывается цепь длины m_i исходного дерева T_k. Возможно только такое вложение. Получилось, что $m_t = j-1$. Данный факт противоречит условию, что в T_k нет цепи длины $j-1$. Вложение невозможно.

  б) w — корень. Тогда в цепь $wv_{im_i}v_{i(m_i-1)}\dots v_{i(j+1)}$ вкладывается некоторая цепь исходного дерева T_3, пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}v_{t2}\dots v_{tm_t}$. Тогда в цепь $wv_{tm_t}\dots v_{t2}v_{t1}v_0v_{i1}v_{i2}\dots v_{i(j-1)}$ вкладывается цепь длины m_i исходного дерева T_k. Возможно только такое вложение. Получилось, что $m_t = m_i - j$. Данный факт противоречит условию, что в T_k нет цепи длины $m_i - j$. Вложение невозможно.

  В силу произвольности выбора удаляемого ребра, ни один из графов $H_k - \{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина, $1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$, не является расширением для T_k.

Теорема 1. *Пусть T_k — несложное сверхстройное дерево или сложное сверхстройное дерево с $k \geqslant 4$. Тогда одним из ТНР для T_k будет граф T'_k.*

Доказательство. 1. Доказательство случая для произвольного несложного сверхстройного дерева приводится в [5, с. 108–110].

2. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_k вида: $(m_1, \dots, m_k)$, где $m_1 \geqslant \dots \geqslant m_k$, $k \geqslant 4$. Пронумеруем вершины T_k ранее описанным способом: $v_0v_{i1}v_{i2}\dots v_{i(m_i-1)}v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, v_0 — корень T_k. Построим в соответствии с определением 9 граф T'_k. Добавленную при построении графа T'_k вершину назовем w.

2.1. Покажем, что граф T'_k является расширением для T_k. Покажем, что T_k вкладывается в каждый максимальный подграф графа T'_k. Будем использовать вложения исходного графа T_k в разные максимальные подграфы графа T'_k, как описано в замечании 1. Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_k в графы $T'_k - v_{i1}$ и $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

- $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда корень — вершина w, i-я цепь будет иметь вид $wv_0v_{i1}v_{i2}\dots v_{i(m_i-1)}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид $wv_{tm_t}v_{t(m_t-1)\dots v_{t1}}$, $t \neq i$. В силу произвольности выбора вершины T_k вкладывается в любой из графов $T'_k - v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

- $T'_k - v_{i1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда корень — v_0, i-я цепь будет иметь вид $v_0wv_{im_i}v_{i(m_i-1)\dots v_{i2}}$ (длина цепи m_i), остальные цепи имеют вид как в исходном дереве T_k. В силу произвольности выбора вершины T_k вкладывается в любой из графов $T'_k - v_{i1}$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Таким образом, доказано, что граф T'_k является расширением для сверхстройного дерева T_k.

2.2. Покажем, что граф T'_k является ТНР для T_k. Докажем свойство неприводимости, т. е. что при удалении любого ребра из T'_k свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 из тривиального расширения графа T_k нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant k$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_k. Значит, из графа T'_k также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_k.

Остается проверить, является ли расширением для T_k граф $T'_k - \{w, v_0\}$.

Рассмотрим граф $T'_k - \{w, v_0\}$. Удалим из $T'_k - \{w, v_0\}$ вершину v_{11}. Вершина v_0 будет иметь степень $k-1$. Корнем может быть только вершина w, но тогда цепь $wv_{1m_1}v_{1(m_1-1)\ldots v_{12}}$ имеет длину только $m_1 - 1$. Граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или граф T_k должен иметь цепь длины $m_1 - 1$. Пусть эта цепь имеет вид $v_0v_{t1}\ldots v_{t(m_1-1)}$. Тогда цепь $wv_{1m_1}v_{1(m_1-1)}\ldots v_{12}$ имеет длину $m_1 - 1$, а цепь $wv_{t(m_1-1)}\ldots v_{t1}v_0$ имеет длину m_1.

Повторим данные рассуждения для цепи длины $m_1 - 1$ (т. е. начнем с удаления вершины v_{t1}). Получим, что граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или граф T_k должен иметь цепь длины $m_1 - 2$.

Продолжая дальше данные рассуждения, получим, что граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k или T_k должно иметь вид: $(m_1, \ldots, m_1 - 1, \ldots, m_1 - 2, \ldots, 2, \ldots, 1, \ldots)$, но сверхстройное дерево такого вида не является сложным по определению, что противоречит условию.

Значит, граф $T'_k - \{w, v_0\}$ не является расширением T_k.

Свойство неприводимости доказано.

Таким образом, граф T'_k является ТНР для сверхстройного дерева T_k. □

3. ТНР ДЛЯ СЛОЖНЫХ СВЕРХСТРОЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ С $k = 3$

Рассмотрим сложное сверхстройные деревья T_3, т. е. вида (m_1, m_2, m_3).

Теорема 2. *Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида*

$$(m_1, m_1 - 1, m_2),\ m_1 \neq 2m_2, m_2 \neq m_1 - 2, m_2 \neq 1. \tag{1}$$

Тогда единственным ТНР для дерева T_3 будет граф T''_3.

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (1). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0v_{11}v_{12}\ldots v_{1m_1}$, $v_0v_{21}v_{22}\ldots v_{2(m_1-1)}$, $v_0v_{31}v_{32}\ldots v_{3m_2}$, v_0 — корень T_3. Построим в соответствии с определением 10 граф T''_3. Добавленную при построении графа T''_3 вершину назовем w.

1. Покажем, что граф T''_3 является расширением для T_3. Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T''_3. Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T''_3, как описано в замечании 1 (с учетом $k = 3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T''_3 - v_{1m_1}$, $T''_3 - v_{2(m_1-1)}$, $T''_3 - v_{3m_2}$ и $T''_3 - v_{i1}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

- $T''_3 - v_{11}$. Тогда цепь $wv_{1m_1}\ldots v_{12}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $wv_{2(m_1-1)}\ldots v_{21}v_0$ — цепь длины m_1, $wv_{3m_2}\ldots v_{31}$ — цепь длины m_2. Граф T_3 вкладывается в граф $T''_3 - v_{11}$.

- $T''_3 - v_{1m_1}$. Тогда цепь $v_0v_{11}\ldots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_0v_{21}\ldots v_{2(m_1-1)}w$ — цепь длины m_1, $v_0v_{31}\ldots v_{3m_2}$ — цепь длины m_2. Граф T_3 вкладывается в граф $T''_3 - v_{1m_1}$.

- $T''_3 - v_{31}$. Тогда цепь $v_{11}\ldots v_{1m_1}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{11}v_0v_{21}\ldots v_{2(m_1-1)}$ — цепь длины m_1, $v_{11}wv_{3m_2}\ldots v_{32}$ — цепь длины m_2. Отметим, что в графе T''_3 есть ребро $\{w, v_{11}\}$, потому что по определению вершина v_{12} — сложная (в T_3 нет цепей длины 1 или $m_1 - 2$ по условию теоремы). Граф T_3 вкладывается в граф $T''_3 - v_{31}$.

- $T''_3 - v_{3m_2}$. Тогда цепь $v_{11}\ldots v_{1m_1}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{11}wv_{2(m_1-1)}\ldots v_{21}$ — цепь длины m_1, $v_{11}v_0v_{31}\ldots v_{3(m_2-1)}$ — цепь длины m_2. Граф T_3 вкладывается в граф $T''_3 - v_{3m_2}$.

- $T''_3 - v_{21}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_2)}wv_{2(m_1-1)}\ldots v_{22}$ — цепь длины $m_1 - 1$, цепь $v_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2-1)}\ldots v_{11}v_0v_{31}\ldots v_{3m_2}$ — цепь длины m_1, цепь $v_{1(m_1-m_2)}\ldots v_{1m_1}$ — цепь длины m_2.

  В графе T''_3 должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. По построении T''_3, если в T''_3 есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 не должно быть цепи длины $m_1 - m_2$ (выполняется благодаря условиям теоремы: $m_2 \neq 1$ и $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_2 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, следовательно, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ сложная, и в графе T''_3 есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. Граф T_3 вкладывается в граф $T''_3 - v_{21}$.

- $T_3'' - v_{2(m_1-1)}$. Тогда цепь $wv_{1m_1}\dots v_{12}$ — цепь длины m_1-1, цепь $wv_{11}v_0v_{21}\dots v_{2(m_1-2)}$ — цепь длины m_1, цепь $wv_{3m_2}\dots v_{31}$ — цепь длины m_2. Граф T_3 вкладывается в граф $T_3'' - v_{2(m_1-1)}$.

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3.

2. Покажем, что граф T_3'' является ТНР для T_3. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 (нужно учитывать, что $k=3$) из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3. Значит, из графа T_3'' также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3.

Свойство неприводимости доказано. Таким образом, граф T_3'' является ТНР для сверхстройного дерева T_3.

3. Покажем, что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3. Предположим, что существует еще одно ТНР для T_3. Назовем этот граф H_3''. Тогда в графе H_3'' хотя бы одно из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), должно быть заменено на некоторое другое ребро (или на некоторый набор ребер).

Однако в соответствии с замечанием 2 (нужно учитывать, что $k=3$), из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3. Значит, ни одно из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), нельзя заменить так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3. Следовательно, граф H_3'' не может быть расширением для T_3 и тем более ТНР для T_3. Получили противоречие.

Граф T_3'' является единственным ТНР для T_3. □

Теорема 3. *Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида*

$$(m_1, m_2, m_3), \qquad m_1 = m_2 + m_3 + 2, \qquad m_1 \neq 2m_2, \qquad m_1 \neq 2m_2 + 1, \qquad m_3 \neq 1 \tag{2}$$

или

$$(m_1, m_2, m_3), \qquad m_1 = m_2 + m_3 + 1, \qquad m_1 \neq 2m_2, \qquad m_3 \neq 1. \tag{3}$$

Тогда единственным ТНР для дерева T_3 будет граф T_3''.

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (2) или вида (3). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0v_{i1}v_{i2}\dots v_{i(m_i-1)}v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, v_0 — корень T_3. Построим в соответствии с определением 10 граф T_3''. Добавленную при построении графа T_3'' вершину назовем w.

1. Покажем, что граф T_3'' является расширением для T_3. Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3''. Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'', как описано в замечании 1 (с учетом $k=3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T_3'' - v_{i1}$ и $T_3'' - v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

- $T_3'' - v_{31}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_2)}\dots v_{11}v_0v_{21}\dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1, цепь $v_{1(m_1-m_2)}wv_{3m_3}\dots v_{32}$ — цепь длины m_3, цепь $v_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2+1)}\dots v_{1m_1}$ — цепь длины m_2.

  В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$. Если T_3 вида (2), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$, если T_3 вида (3), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$.

  По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$, вершина $v_{1(m_3+3)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (2) не должно быть цепи длины m_3+2 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_1 - m_3 - 3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2 + m_3 + 2$ и $m_1 \neq 2m_2 + 1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_3+3)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+2)}\}$.

По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$, вершина $v_{1(m_3+2)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины m_3+1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+1$ и $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_1 - m_3 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+1$ и $m_1 \neq 2m_2$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_3+2)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_3+1)}\}$.

- $T_3'' - v_{3m_3}$. Тогда цепь $wv_{1(m_1-m_3)}\ldots v_{11}v_0v_{31}\ldots v_{3(m_3-1)}$ — цепь длины m_1, цепь $wv_{1m_1}\ldots v_{1(m_1-m_3+1)}$ — цепь длины m_3, цепь $wv_{2m_2}\ldots v_{21}$ — цепь длины m_2.

  В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$. Если T_3 вида (2), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$, если T_3 вида (3), то должно быть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$.

  По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$, вершина $v_{1(m_2+3)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (2) не должно быть цепи длины m_2+2 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+2$) или цепи длины m_1-m_2-3 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+2$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_2+3)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+2)}\}$.

  По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$, вершина $v_{1(m_2+2)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины m_2+1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+1$) или цепи длины m_1-m_2-2 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 = m_2+m_3+1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_2+2)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_2+1)}\}$.

- $T_3'' - v_{21}$. Тогда цепь $v_{1(m_1-m_3)}\ldots v_{11}v_0v_{31}\ldots v_{3m_3}$ — цепь длины m_1, цепь $v_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)}\ldots v_{1m_1}$ — цепь длины m_3, цепь $v_{1(m_1-m_3)}wv_{2m_2}\ldots v_{22}$ — цепь длины m_2.

- $T_3'' - v_{2m_2}$. Тогда цепь $wv_{1(m_1-m_2)}\ldots v_{11}v_0v_{21}\ldots v_{2(m_2-1)}$ — цепь длины m_1, цепь $wv_{3m_3}\ldots v_{31}$ — цепь длины m_3, цепь $wv_{1m_1}\ldots v_{1(m_1-m_2+1)}$ — цепь длины m_2.

- $T_3'' - v_{11}$. Если T_3 вида (2), тогда цепь $v_{1(m_1-m_3)}wv_{3m_3}\ldots v_{31}v_0v_{21}\ldots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2+m_3+2$), цепь $v_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)}\ldots v_{1m_1}$ — цепь длины m_3, цепь $v_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3-1)}\ldots v_{12}$ (по условию $m_2 = m_1-m_3-2$) — цепь длины m_2.

  Если T_3 вида (3), тогда цепь $wv_{3m_3}\ldots v_{31}v_0v_{21}\ldots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2+m_3+1$), цепь $wv_{1(m_1-m_2)}v_{1(m_1-m_2-1)}\ldots v_{12}$ — цепь длины m_3, цепь $wv_{1m_1}\ldots v_{1(m_1-m_2+1)}$ — цепь длины m_2 (по условию $m_2 = m_1-m_3-1$).

- $T_3'' - v_{1m_1}$. Если T_3 вида (3), тогда цепь $wv_{3m_3}\ldots v_{31}v_0v_{21}\ldots v_{2m_2}$ — цепь длины m_1 (по условию $m_1 = m_2+m_3+1$), цепь $wv_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)}\ldots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_3, цепь $wv_{11}v_{12}\ldots v_{1m_2}$ — цепь длины m_2.

  В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{11}\}$. По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$, вершина v_{12} должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (3) не должно быть цепи длины 1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$) или цепи длины m_1-2 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$). Условия выполнены, вершина v_{12} — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$.

  Если T_3 вида (2), тогда цепь $wv_{3m_3}\ldots v_{31}v_0v_{11}\ldots v_{1(m_1-m_3-1)}$ — цепь длины m_1, цепь $wv_{1(m_1-m_3)}v_{1(m_1-m_3+1)}\ldots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_3, цепь $wv_{2m_2}v_{2(m_2-1)}\ldots v_{21}$ — цепь длины m_2.

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3 вида (2) и (3).

2. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в п. 2 теоремы 2.

3. Доказательство того что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 вида (2) и вида (3), аналогично доказательству, приведенному в п. 3 теоремы 2. □

Следствие 1. *Если* $m_2 = m_3 = m$, *то* (2) *приобретет вид* $(2m+2, m, m)$, $m \neq 1$.

Следствие 2. *Если* $m_2 = m_3 = m$, *то* (3) *приобретет вид* $(2m+1, m, m)$, $m \neq 1$.

Теорема 4. *Пусть дано сложное сверхстройное дерево* T_3 *вида*

$$\begin{gathered}(m_1, m_2, m_3),\\ m_1 - m_2 > 2, \quad m_1 - m_2 - m_3 > 2 \quad \textit{или} \quad m_1 - m_2 - m_3 < 0,\\ m_2 - m_3 > 1, \quad m_1 \neq 2m_2, \quad m_1 \neq 2m_3, \quad m_2 \neq 2m_3, \quad m_3 \neq 1.\end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (4). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, v_0 — корень T_3. Построим в соответствии с определением 10 граф T_3''. Добавленную при построении графа T_3'' вершину назовем w.

1. Покажем, что граф T_3'' является расширением для T_3. Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3''. Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'', как описано в п. 1 теоремы 3, кроме случаев вложения графа T_3 в максимальные подграфы $T_3'' - v_{11}$ и $T_3'' - v_{1m_1}$. Эти случаи рассмотрим отдельно.

Для того чтобы было возможно вложение графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'', как описано в п. 1 теоремы 3, нужно существование в графе T_3'' ребер $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$, $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$.

По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_3+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_1 - m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 - m_3 > 2$ или $m_1 - m_2 - m_3 < 0$ и условию $m_1 \neq 2m_3$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_1-m_3+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_3)}\}$.

По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_1 - m_2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 - m_3 > 2$ или $m_1 - m_2 - m_3 < 0$ и условию $m_1 \neq 2m_2$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 - m_3 > 1$). Условия выполнены, вершина $v_{1(m_1-m_2+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{1(m_1-m_2)}\}$.

- $T_3'' - v_{11}$. Тогда цепь $v_{2(m_2-m_3)} w v_{1m_1} \dots v_{12}$ — цепь длины m_1, цепь $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3+1)} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_3, $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3-1)} \dots v_{21} v_0 v_{31} \dots v_{3m_3}$ — цепь m_2.

  Вложение графа T_3 в граф $T_3'' - v_{11}$ возможно, если $m_2 \neq m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 - m_3 > 1$).

  В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$. По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$, вершина $v_{2(m_2-m_3+1)}$ должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины $m_2 - m_3$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_2 \neq 2m_3$) или цепи длины $m_3 - 1$ (выполняется по умолчанию). Условия выполнены, вершина $v_{2(m_2-m_3+1)}$ — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{2(m_2-m_3)}\}$.

- $T_3'' - v_{1m_1}$. Тогда цепь $v_{2(m_2-m_3)} w v_{11} \dots v_{1(m_1-1)}$ — цепь длины m_1, цепь $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3+1)} \dots v_{2m_2}$ — цепь длины m_3, $v_{2(m_2-m_3)} v_{2(m_2-m_3-1)} \dots v_{21} v_0 v_{31} \dots v_{3m_3}$ — цепь m_2.

  В графе T_3'' должно быть ребро $\{w, v_{11}\}$. По построению T_3'', если в T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$, вершина v_{12} должна быть сложной. По определению сложной вершины в T_3 вида (4) не должно быть цепи длины 1 (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_3 \neq 1$) или цепи длины $m_1 - 2$ (выполняется благодаря условию теоремы, что $m_1 - m_2 > 2$). Условия выполнены, вершина v_{12} — сложная, в графе T_3'' есть ребро $\{w, v_{11}\}$.

Таким образом, доказано, что граф T_3'' является расширением для сверхстройного дерева T_3 вида (4).

2. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3'' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

Доказательство аналогично доказательству, приведенному в п. 2 теоремы 2.

3. Доказательство того, что граф T_3'' является единственным ТНР для T_3 вида (4), аналогично доказательству, приведенному в п. 3 теоремы 2. □

Теорема 5. *Пусть дано сложное сверхстройное дерево T_3 вида (m_1, m_2, m_3), не удовлетворяющее условиям* (1), (2), (3) *и* (4). *Тогда одним из ТНР для дерева T_3 является граф T_3'.*

Доказательство. Пусть дано некоторое сложное сверхстройное дерево T_3 вида (m_1, m_2, m_3), не удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) и (4). Пронумеруем вершины T_3 ранее описанным способом: $v_0 v_{i1} v_{i2} \dots v_{i(m_i-1)} v_{im_i}$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, v_0 — корень T_3. Построим в соответствии с определением 9 граф T_3'. Добавленную при построении графа T_3' вершину назовем w.

1. Покажем, что граф T_3' является расширением для T_3. Покажем, что T_3 вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3'. Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3', как описано в п. 2.1 теоремы 1 (с учетом того, что $k = 3$).

Таким образом, доказано, что граф T_3' является расширением для сверхстройного дерева T_3.

2. Покажем, что граф T_3' является ТНР для T_3. Докажем свойство неприводимости, т. е. при удалении любого ребра из T_3' свойство расширения для полученного графа не сохраняется.

В соответствии с замечанием 2 из тривиального расширения графа T_3 нельзя удалить ни одного из ребер $\{w, v_{im_i}\}$ или $\{w, v_{i(j-1)}\}$, где v_{ij} — сложная вершина ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $2 \leqslant j \leqslant m_i - 1$), так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3. Значит, из графа T_3' также нельзя удалить ни одного из этих ребер так, чтобы полученный граф являлся расширением для T_3.

Остается проверить, является ли расширением для T_3 граф $T_3' - \{w, v_0\}$.

Рассмотрим граф $T_3' - \{w, v_0\}$. Заметим, что граф $T_3' - \{w, v_0\}$ — это граф T_3'', построенный для T_3. Таким образом, нужно показать, что граф T_3'' не является расширением для T_3.

Предположим, что граф T_3'' является расширением для T_3.Тогда граф T_3 должен вкладывается в каждый максимальный подграф графа T_3''. Будем использовать вложения исходного графа T_3 в разные максимальные подграфы графа T_3'', как описано в замечании 1 (с учетом $k = 3$). Тогда останется проверить, вкладывается ли граф T_3 в графы $T_3'' - v_{i1}$ и $T_3'' - v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

а) $T_3'' - v_{31}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{31}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;

б) $T_3'' - v_{3m_3}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{3m_3}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_3$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;

в) $T_3'' - v_{21}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{21}$ только при выполнении следующего условия: $m_1 \neq 2m_3$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$;

г) $T_3'' - v_{2m_2}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{2m_2}$ только при выполнении одного из следующих условий: $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq m_2 + m_3$, $m_3 \neq 1$ или T_3 имеет вид $(m_1, m - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$, $m_2 \neq m_1 - 2$;

д) $T_3'' - v_{11}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{11}$ только при выполнении одного из следующих условий:

- T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
- $m_1 = m_2 + m_3 + 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;
- $m_1 = m_2 + m_3 + 2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2 + 1$, $m_3 \neq 1$;
- $m_2 \neq m_3$, $m_2 \neq 2m_3$.

е) $T_3'' - v_{1m_1}$. Исходный граф T_3 вкладывается в $T_3'' - v_{1m_1}$ только при выполнении одного из следующих условий:

- T_3 имеет вид $(m_1, m_1 - 1, m_2)$, $m_2 \neq 1$;
- $m_1 = m_2 + m_3 + 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;
- $m_1 = m_2 + m_3 + 2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2 + 1$, $m_3 \neq 1$;
- $m_2 \neq m_3$, $m_2 \neq 2m_3$, $m_2 \neq m_1 - 2$, $m_3 \neq m_1 - 2$, $m_3 \neq 1$.

Для вложения графа T_3 в графы $T_3''-v_{i1}$ и $T_3''-v_{im_i}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, нужно, чтобы выполнялся каждый из пунктов а)–е). Тогда для T_3 должно выполняться одно из следующих условий:

$1'$) (m_1, m_1-1, m_2), где $m_1 \neq 2m_2$, $m_2 \neq m_1-2$, $m_2 \neq 1$;

$2'$) (m_1, m_2, m_3), где $m_1 = m_2+m_3+2$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_2+1$, $m_3 \neq 1$;

$3'$) (m_1, m_2, m_3), где $m_1 = m_2+m_3+1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_3 \neq 1$;

$4'$) (m_1, m_2, m_3), где $m_1-m_2 > 2$, $m_1-m_2-m_3 > 2$ или $m_1-m_2-m_3 < 0$, $m_2-m_3 > 1$, $m_1 \neq 2m_2$, $m_1 \neq 2m_3$, $m_2 \neq 2m_3$, $m_3 \neq 1$.

Заметим, что условие $1'$) совпадает с (1), $2'$) совпадает с (2), $3'$) — с (3), а $4'$) — с (4). Однако по условию теоремы T_3 не удовлетворяет условиям (1)–(4). Противоречие. Значит, T_3'' не является расширением для T_3.

Свойство неприводимости доказано.

Граф T_3' является ТНР для сверхстройного дерева T_3. □

Таким образом, с учетом теорем 1–5 задача построения одного из ТНР для произвольного сверхстройного дерева полностью решена.

Библиографический список

1. *Богомолов А. М., Салий В. Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 2009.
2. *Курносова С. Г.* Т-неприводимые расширения для некоторых классов графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 113–125.
3. *Harary F., Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. 1995. Vol. 6. P. 135–143.
4. *Осипов Д. Ю.* Об одном контрпримере для Т-неприводимых расширений сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. 2014. № 3(25). С. 98–102.
5. *Абросимов М. Б.* Графовые модели отказоустойчивости. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с.

T-irreducible Extensions for Starlike Trees

D. Yu. Osipov

Osipov Dmitrii Yurievich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, st_hill@mail.ru

We deal with a sort of optimal extensions of graphs, so called T-irreducible extensions. T-irreducible extension of a graph G is an extension of G obtained by removing a maximal set of edges from the trivial extension of G. A difficult starlike tree is a starlike tree that has at least one difficult node. T-irreducible extensions for nondifficult starlike trees were constructed by M. B. Abrosimov, T-irreducible extensions for palms (one of subclasses of starlike trees) were constructed by S. G. Kurnosova. Counterexamples were found to a method of Harary and Khurum, who tried to construct possible T-irreducible extensions for starlike trees. T-irreducible extensions for difficult starlike trees are constructed.

Key words: graph, T-irreducible extension, starlike tree, difficult and nondifficult starlike trees.

References

1. Bogomolov A. M., Salii V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnyh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 2009 (in Russians).
2. Kurnosova S. G. T-neprivodimye rasshirenija dlja nekotoryh klassov grafov [T-irreducible extensions for some classes graphs]. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozhenij* [Theoretical Problems of Informatics and its applications]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, vol. 6, pp. 113–125 (in Russians).
3. Harary F., Khurum M. One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees. *Internet J. Comput. Math.*, 1995, vol. 6, pp. 135–143.
4. Osipov D. Yu. On a Counterexample for a T-irreducible Extensions of Starlike Trees. *Applied Discrete Mathematics*, 2014, no. 3(25), pp. 98–102 (in Russians).
5. Abrosimov M. B. *Grafovye modeli otkazoustojchivosti* [Graph models of fault tolerance]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, 192 p. (in Russians).