



- [Nonlinear Waves of Deformation in Cylindrical Shells]. *Izv. vuzov. Prikladnaia nelineinaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52–58 (in Russian).
- Zemlianukhin A. I., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves in Inhomogeneous Cylindrical Shells: A New Evolution Equation. *Akusticheskij Zhurnal*, 2001, vol. 47, no. 3, pp. 359–363 (in Russian).
  - Blinkov Yu. A., Kovaleva I. A., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in between. *Vestnik RUDN. Ser. Math., Inform., Physics*, 2013, vol. 3, pp. 42–51 (in Russian).
  - Blinkova A. Iu., Ivanov S. V., Kovalev A. D., Mogilevich L. I. Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Physics*, 2012, vol. 12, iss. 2, pp. 12–18 (in Russian).
  - Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, iss. 2, pp. 193–202 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
  - Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Ivanov S. V., Mogilevich L. I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Comp. Contin. Mech.*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336–345 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
  - Blinkov Yu. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 2, pp. 184–197 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
  - Kauderer G. *Nelinejnaja mehanika* [Nonlinear mechanics]. Moscow, Publ. Inostrannaja literatura, 1961, 778 p. (in Russian).
  - Vol'mir A. S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972, 432 p. (in Russian).
  - Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier–Stokes equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 5743 of Lecture Notes in Computer Science, 2009, pp. 94–105. DOI: 10.1007/978-3-642-04103-7\_10.
  - Amodio P., Blinkov Yu. A., Gerdt V. P., La Scala R. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier–Stokes Equations. *Computer Algebra in Scientific Computing*, vol. 8136 of Lecture Notes in Computer Science, 2013, pp. 46–60. DOI: 10.1007/978-3-319-02297-0\_4.

**Please cite this article in press as:**

Blinkov Yu. A., Kondratova Yu. N., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Nonlinear Waves Mathematical Modeling in Coaxial Shells, Filled with Viscous Liquid. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 331–336 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.

УДК 629

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ УГЛОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННОГО УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ

Е. А. Козлов<sup>1</sup>, Ю. Н. Челноков<sup>2</sup>, И. А. Панкратов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Козлов Евгений Александрович, аспирант кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ewgeni11\_91@mail.ru

<sup>2</sup>Челноков Юрий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Панкратов Илья Алексеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, PankratovIA@info.sgu.ru



В статье рассмотрена задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата. Управление (вектор реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты) ограничено по модулю. Комбинированный функционал качества характеризует затраты времени и энергии на процесс управления. С помощью принципа максимума Понтрягина и кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата сформулирована дифференциальная краевая задача коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата. Приведены закон оптимального управления, условия трансверсальности, не содержащие неопределенных множителей Лагранжа. Построены примеры численного решения задачи.

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимальное управление, кватернион, угловые элементы орбиты.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344

## 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРИЕНТАЦИИ МГНОВЕННОЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В данной работе рассматривается задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата (КА) посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, которая решается с помощью принципа максимума Понтрягина [1] и кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА. Присутствующая в этом уравнении кватернионная переменная характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА. Работа является развитием исследований [2,3].

Исследование задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, при помощи принципа максимума Понтрягина сводится к решению краевых задач, описываемых системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Так как точное аналитическое решение рассматриваемой задачи и других пространственных задач оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА вряд ли возможно, то при решении этих задач на основе принципа максимума приходится рассчитывать лишь на их приближенное решение.

Считается, что вектор ускорения  $u$  от тяги реактивного двигателя во всё время управляемого движения КА направлен ортогонально плоскости его орбиты. В этом случае орбита КА не меняет своей формы и своих размеров, а лишь поворачивается в пространстве под действием управления как неизменяемая (недеформируемая) фигура.

Движение центра масс КА рассматривается в инерциальной системе координат  $X$  — геоцентрической экваториальной системе координат  $OX_1X_2X_3(X)$  с началом в центре  $O$  притяжения Земли (рис. 1). Ось  $OX_3$  этой системы координат направлена вдоль оси суточного вращения Земли, оси  $OX_1$  и  $OX_2$  лежат в плоскости экватора Земли, ось  $OX_1$  направлена в точку весеннего равноденствия для Земли, а ось  $OX_2$  образует с осями  $OX_1$  и  $OX_3$  правую тройку векторов.

Введем в рассмотрение систему координат  $\xi$ , связанную с плоскостью и перигеием орбиты КА. Начало системы координат  $\xi$  находится в перигеии  $P$  орбиты КА, который на рис. 1 обозначен точкой  $B$ . Ось  $\xi_1$  направлена вдоль радиуса-вектора перигеия орбиты, ось  $\xi_3$  перпендикулярна плоскости орбиты и имеет направление постоянного по модулю вектора  $c$  момента скорости центра масс КА, а ось  $\xi_2$  дополняет систему до правой тройки векторов. В инерциальной системе координат  $X$  ориентация системы координат  $\xi$  характеризуется собой ориентацией орбиты КА в инерциальном пространстве и задается тремя угловыми оскулирующими элементами орбиты: долготой восходящего узла  $\Omega_u$ , наклоном орбиты  $I$  и угловым расстоянием перигеия от узла  $\omega_\pi$ .

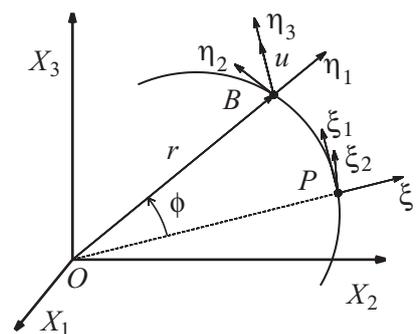


Рис. 1. Системы координат

Систему координат  $\eta$ , связанную с центром масс КА, введем таким образом, чтобы ось  $\eta_1$  была направлена вдоль радиуса-вектора  $r$  центра масс КА, а ось  $\eta_3$  была перпендикулярна плоскости орбиты. Ось  $\eta_2$  направим так, чтобы орты осей  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$  образовывали правую тройку. В инерциальной системе координат  $X$  ориентация орбитальной системы координат  $\eta$  задается тремя угловыми переменными:  $\Omega_u$ ,  $I$ ,  $\omega_\pi + \varphi$ , где  $\varphi$  — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перигеия и характеризующая положение КА на орбите).



В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в инерциальной системе координат в угловых элементах орбиты имеют вид [4]

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{cosec} I, & \frac{dI}{dt} &= u \frac{r}{c} \cos(\omega_\pi + \varphi), & \frac{d\omega_\pi}{dt} &= -u \frac{r}{c} \sin(\omega_\pi + \varphi) \operatorname{ctg} I, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$  — проекция вектора ускорения  $\mathbf{u}$  на направление вектора момента скорости центра масс КА (алгебраическая величина реактивного ускорения, перпендикулярного плоскости орбиты КА);  $c$  — постоянная площадей (модуль вектора момента скорости  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  центра масс КА);  $p$  и  $e$  — параметр и эксцентриситет орбиты.

Задача переориентации орбиты КА в угловых переменных формулируется следующим образом: требуется построить управление  $u$ , переводящее орбиту КА, изменение ориентации которой описывается уравнениями (1) из заданного начального положения

$$\Omega_u = \Omega_u(t_0) = \Omega_u^0, \quad I = I(t_0) = I^0, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^0, \quad I^0 \neq 0, \pi,$$

в требуемое конечное положение

$$\Omega_u = \Omega_u(t_*) = \Omega_u^*, \quad I = I(t_0) = I^*, \quad \omega_\pi = \omega_\pi(t_0) = \omega_\pi^*, \quad I^* \neq 0, \pi.$$

Так как дифференциальные уравнения (1) движения центра масс КА в угловых переменных нелинейны и имеют особые точки  $I = 0, \pi$ , то решить сформулированную задачу достаточно сложно. Задача решается гораздо проще, если использовать дифференциальные уравнения ориентации орбиты КА в параметрах Эйлера (Родрига – Гамильтона), имеющие вид [5]

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\Lambda_0}{dt} &= -\Lambda_1 \Omega_1 - \Lambda_2 \Omega_2, & 2 \frac{d\Lambda_1}{dt} &= \Lambda_0 \Omega_1 - \Lambda_3 \Omega_2, \\ 2 \frac{d\Lambda_2}{dt} &= \Lambda_0 \Omega_2 + \Lambda_3 \Omega_1, & 2 \frac{d\Lambda_3}{dt} &= \Lambda_1 \Omega_2 - \Lambda_2 \Omega_1, \\ \Omega_1 &= u \frac{r}{c} \cos \varphi, & \Omega_2 &= u \frac{r}{c} \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Lambda_j$  ( $j = \overline{0,3}$ ) — параметры Эйлера, характеризующие ориентацию орбиты КА (системы координат  $\xi$ ) в инерциальной системе координат  $X$ ;  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 = 0$  — проекции вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты на связанные с ней координатные оси  $O\xi_i$ .

Параметры  $\Lambda_j$  связаны с угловыми элементами орбиты соотношениями:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \cos \left( \frac{I}{2} \right) \cos \left( \frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_1 &= \sin \left( \frac{I}{2} \right) \cos \left( \frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right), \\ \Lambda_2 &= \sin \left( \frac{I}{2} \right) \sin \left( \frac{\Omega_u + \omega_\pi}{2} \right), & \Lambda_3 &= \cos \left( \frac{I}{2} \right) \sin \left( \frac{\Omega_u - \omega_\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения (2) в кватернионной записи принимают вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} &= \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, & \boldsymbol{\Omega}_\xi &= u \frac{r}{c} (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{c}{r^2}, & r &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, & c &= \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$  — кватернион ориентации орбиты КА (кватернионный оскулирующий (медленно изменяющийся) элемент орбиты КА),  $\boldsymbol{\Omega}_\xi$  — отображение вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  на базис  $\xi$  (вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  мгновенной абсолютной угловой скорости орбиты направлен вдоль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  центра масс КА и определяется формулой:  $\boldsymbol{\Omega} = (u/c)\mathbf{r}$ );  $\mathbf{i}_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) — векторные мнимые единицы Гамильтона;  $\circ$  — символ кватернионного умножения.

Отметим, что скалярные уравнения ориентации орбиты в параметрах Эйлера (2) использовались ранее для описания орбитального движения в работах А. Deprit [6] и В. А. Брумберга [7].



## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ КВАТЕРНИОННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ОРБИТЫ

Требуется определить ограниченное по модулю управление  $u$ :

$$-u_{\max} \leq u \leq u_{\max} < \infty, \quad u = \pm|u|, \quad (5)$$

ортогональное плоскости орбиты КА, движение центра масс которого описывается уравнениями (2), переводящее орбиту КА из заданного начального состояния:

$$t = t_0 = 0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \Lambda(t_0) = \Lambda^0, \quad (6)$$

в требуемое конечное состояние

$$t = t^* = ?, \quad \varphi(t^*) = \varphi^*, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \Omega_u^* = \frac{\Lambda_1^* \Lambda_3^* + \Lambda_0^* \Lambda_2^*}{\Lambda_0^* \Lambda_1^* - \Lambda_2^* \Lambda_3^*}, \quad \cos I^* = (\Lambda_0^*)^2 - (\Lambda_1^*)^2 - (\Lambda_2^*)^2 + (\Lambda_3^*)^2.$$

При этом необходимо минимизировать комбинированный функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t^*} (\alpha_1 + \alpha_2 u^2) dt, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \text{const} \geq 0, \quad (8)$$

который характеризует затраты времени и энергии на процесс управления. Здесь  $\Lambda_j^*$  — компоненты кватерниона  $\Lambda^* = \Lambda(t^*)$ , характеризующего требуемое положение орбиты КА.

Кватернионная переменная  $\Lambda$ , присутствующая в краевых условиях, характеризует ориентацию орбиты КА, а переменная  $\varphi$  — положение КА на орбите.

Величины  $c$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\varphi_0$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\Omega_u^*$  и  $I^*$  заданы. Начальные значения компонент кватерниона  $\Lambda$  могут быть найдены через заданные значения угловых элементов орбиты по формулам (3). Углы  $\Omega_u^*$  и  $I^*$  описывают требуемую конечную ориентацию плоскости мгновенной орбиты КА. Определению подлежат оптимальный закон управления  $u(t)$  и величины  $t^*$ ,  $\varphi^*$ . Отметим, что в отличие от работ [3, 8] конечное положение орбиты КА в её плоскости не фиксировано, что упрощает процесс нахождения численного решения задачи.

## 3. ЗАКОН ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Поставленную задачу будем решать с помощью принципа максимума Понтрягина. Для этого введем дополнительные переменные  $M = M_0 + M_1 i_1 + M_2 i_2 + M_3 i_3$  и  $\chi$ , сопряженные по отношению к фазовым переменным  $\Lambda$  и  $\varphi$  соответственно.

Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H = -(\alpha_1 + \alpha_2 u^2) + u \frac{r}{2c} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi) + \chi \frac{c}{r^2}, \quad (9)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — компоненты кватерниона  $N = \tilde{\Lambda} \circ M$ ,  $\tilde{\Lambda}$  — кватернион, сопряженный к кватерниону  $\Lambda$ .

Система уравнений для сопряженных переменных примет вид

$$2 \frac{dM}{dt} = M \circ \Omega_\xi, \quad (10)$$

$$\frac{d\chi}{dt} = 2 \frac{\chi}{r} \frac{dr}{dt} + u \frac{r}{2c} (N_1 \sin \varphi - N_2 \cos \varphi) - u \frac{r^2}{2c^2} \frac{dr}{dt} (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi).$$

Отметим, что сопряженное кватернионное уравнение в (10) совпадает по своей форме с фазовым уравнением (4), поскольку кватернионное уравнение (4) обладает свойством самосопряженности (это свойство кватернионного кинематического уравнения было установлено В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [9]).

Закон оптимального управления (т.е. закон управления, удовлетворяющий необходимым условиям оптимальности) находится из условия максимума функции Гамильтона – Понтрягина (9) по переменной  $u$  с учетом наложенного ограничения (5).



Найдем критические точки функции  $H = H(u)$ . Производная функции Гамильтона – Понтрягина (9) по переменной  $u$  имеет вид

$$\frac{dH}{du} = -2\alpha_2 u + \frac{r}{2c}(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi)$$

и обращается в нуль при

$$u = u_{кр} = \frac{r}{4\alpha_2 c}(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi),$$

где  $u$  – критическая точка.

Найдем вторую производную функции  $H$  по  $u$ :

$$\frac{d^2 H}{du^2} = -2\alpha_2.$$

Так как вторая производная меньше нуля, то  $u = u_{кр}$  – точка максимума функции Гамильтона – Понтрягина.

Если  $u_{кр} > u_{\max}$ , то функция  $H$  возрастает на отрезке  $[-u_{\max}, +u_{\max}]$  и  $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(u_{\max})$ , т.е.  $u_{\text{опт}} = u_{\max}$ .

Если  $u_{кр} < -u_{\max}$ , то функция  $H$  убывает на отрезке  $[-u_{\max}, +u_{\max}]$  и  $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(-u_{\max})$ , т.е.  $u_{\text{опт}} = -u_{\max}$ .

Тогда при  $|u_{кр}| > +u_{\max}$  закон оптимального управления запишется так:

$$u_{\text{опт}} = u_{\max} \text{sign } \nu_1,$$

где  $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$ .

Если  $u_{кр} \in [-u_{\max}; +u_{\max}]$ , то  $\max_{u \in [-u_{\max}; +u_{\max}]} H(u) = H(-u_{\max})$ .

Таким образом,

$$u_{\text{опт}} = \begin{cases} \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1|, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| \leq u_{\max}, \\ u_{\max} \text{sign } \nu_1, & \text{если } \frac{1}{4\alpha_2} \frac{r}{c} |\nu_1| > u_{\max}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\nu_1 = N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$ .

#### 4. УСЛОВИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Введем неопределенные множители Лагранжа  $C_1$  и  $C_2$ . Получим условия трансверсальности, соответствующие многообразию конечных состояний (7): при  $t = t^*$

$$\begin{aligned} M_0 + C_1(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \text{tg } \Omega_u) + 2C_2 \Lambda_0^* &= 0, \\ M_1 + C_1(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \text{tg } \Omega_u) - 2C_2 \Lambda_1^* &= 0, \\ M_2 + C_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \text{tg } \Omega_u) - 2C_2 \Lambda_2^* &= 0, \\ M_3 + C_1(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \text{tg } \Omega_u) + 2C_2 \Lambda_3^* &= 0, \\ \chi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если исключить из (12) неопределенные множители Лагранжа, то мы получим три недостающих условия трансверсальности при  $t = t^*$

$$\begin{aligned} M_0(\Lambda_1^* + \Lambda_2^* \text{tg } \Omega_u) + M_1(\Lambda_0^* + \Lambda_3^* \text{tg } \Omega_u) - M_2(\Lambda_3^* - \Lambda_0^* \text{tg } \Omega_u) - M_3(\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \text{tg } \Omega_u) &= 0, \\ N_3 = -M_0 \Lambda_3^* + M_1 \Lambda_2^* - M_2 \Lambda_1^* + M_3 \Lambda_0^* &= 0, \\ \chi &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, задача оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений (4), (10), (11) десятого порядка и семью краевыми уравнениями (6), (7), которые необходимо дополнить тремя условиями трансверсальности (13) и равенством нулю функции Гамильтона – Понтрягина при  $t = t^*$   $H(\mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \chi, u_{\text{опт}}) = 0$ , имеющим место для оптимального управления  $u_{\text{опт}}$  и оптимальной траектории.



### 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Для численного решения задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным. При этом в уравнениях для фазовых и сопряженных переменных появился характерный безразмерный параметр  $N^b = u_{\max} p^3 / c^2$ .

Разработана программа численного решения задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА, являющаяся комбинацией методов Рунге – Кутты, Ньютона и градиентного спуска [10].

Для одного из рассмотренных численных примеров величины, характеризующие форму и размеры орбиты КА, полагались равными:

$$a_{or} = 25500000 \text{ м}, \quad u_{\max} = 0.101907 \text{ м/с}^2, \quad N^b = 0.35,$$

где  $a_{or}$  — большая полуось орбиты.

Для начального положения КА истинная аномалия полагалась равной нулю:  $\varphi_0 = 0$  рад. Конечная ориентация орбиты соответствует ориентации орбиты одного из спутников орбитальной группировки ГЛОНАСС. Отличие между начальными и конечными ориентациями орбит КА составляет по угловым элементам около  $15^\circ$  в угловой мере.

Значения масштабирующих множителей для безразмерных переменных равны:

$$R = 26000000 \text{ м}, \quad T = 9449.714506 \text{ с}, \quad V = 2751.405874 \text{ м/с}.$$

Здесь  $R$  — характерное расстояние,  $T$  — характерное время, а  $V$  — характерная скорость. Указанные значения этих величин отвечают значениям декартовых координат и проекций вектора скорости центра масс КА, приведенным в [11].

На рис. 2, 4 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для задачи, близкой к экономии энергетических затрат, т.е. для случая, когда коэффициенты в функционале (8) имеют значения  $\alpha_1 = 0.001$ ,  $\alpha_2 = 1$ .

На рис. 3, 5 приведены законы изменения фазовых переменных и управления для задачи, близкой к задаче быстрого действия ( $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0.001$ ). Отметим, что в этом случае оптимальное управление близко к разрывному, что значительно усложняет процесс нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных при численном решении задачи.

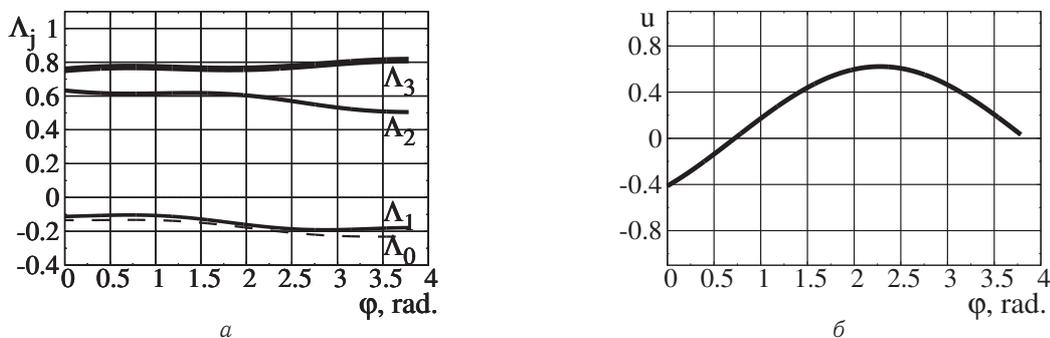


Рис. 2. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при  $J = \int_0^{t^*} (0.001 + u^2) dt$ ,  $e = 0$

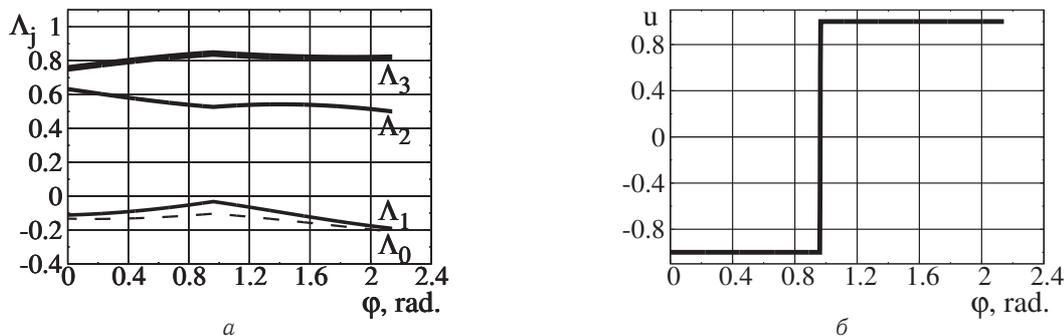


Рис. 3. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при  $J = \int_0^{t^*} (1 + 0.001u^2) dt$ ,  $e = 0$

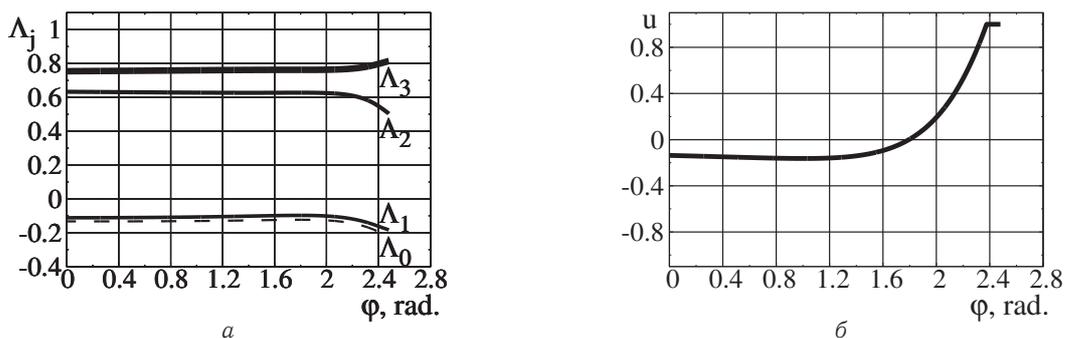


Рис. 4. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при  $J = \int_0^{t^*} (0.001 + u^2) dt$ ,  $e = 0.5$

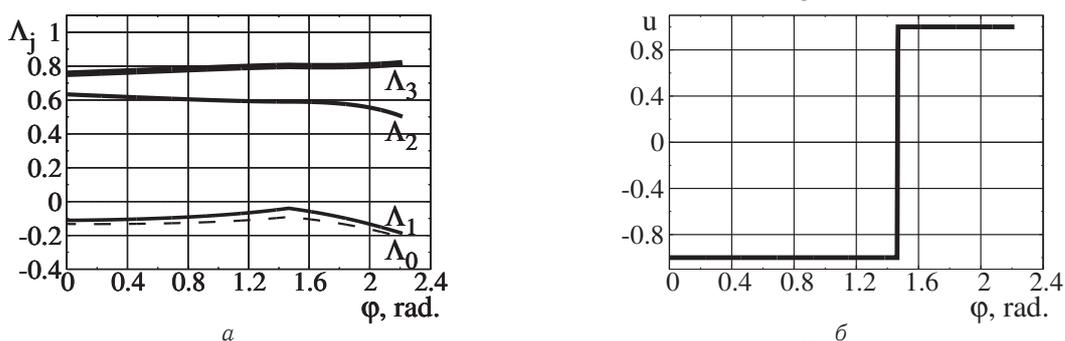


Рис. 5. Фазовые переменные (а) и оптимальное управление (б) при  $J = \int_0^{t^*} (1 + 0.001u^2) dt$ ,  $e = 0.5$

Для случая, близкого к экономии энергетических затрат, длительность процесса переориентации круговой орбиты КА ( $e = 0$ ) составила 9.9459657114 ч, а для задачи, близкой к задаче быстрогодействия, — 5.6298512412 ч. Длительность процесса переориентации эллиптической орбиты КА ( $e = 0.5$ ) составила 6.6025088379 ч для случая экономии энергетических затрат и 4.9469579758 ч для задачи, близкой к задаче быстрогодействия.

Отметим, что при решении задачи, близкой к задаче быстрогодействия, имеется лишь одно переключение управления, а при решении задачи, близкой к экономии затрат энергии, управление не достигает своего максимального по модулю значения.

Из-за нелинейности дифференциальных уравнений в поставленной задаче численное решение краевой задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты КА неоднозначно. При одних и тех же граничных условиях в постановке краевой задачи оптимального управления (с одним и тем же функционалом) получены различные варианты решения для законов движения, управления и поведения сопряженных переменных. Из них были выбраны те, при которых функционал минимален.

При численном решении задачи были выявлены также особенности и закономерности построенных оптимальных траекторий и управлений. Установлено, что при увеличении эксцентриситета орбиты от 0 до 0.5 уменьшается количество активных участков движения, их длительности и общее время переориентации. При эксцентриситете орбиты более 0.5 пропадают участки, где управление принимает свое максимальное по модулю значение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165-а).*

### Библиографический список

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
2. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 6. С. 895–912.
3. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
4. Абалакин В. К., Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г., Рябов Ю. А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М. : Наука, 1976. 864 с.
5. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.



6. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions // *Celestial Mechanics*. 1976. Vol. 13, № 2. P. 253–262.
7. Брумберг В. А. Аналитические алгоритмы небесной механики. М. : Наука, 1980. 208 с.
8. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G. Optimal reorientation of spacecraft orbit // *Archives of Control Sciences*. 2014. Vol. 24, № 2. P. 119–128.
9. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М. : Наука, 1973. 320 с.
10. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М. : Наука, 1971. 424 с.
11. Бордовицына Т. В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М. : Наука, 1984. 136 с.

**Образец для цитирования:**

Козлов Е. А., Челноков Ю. Н., Панкратов И. А. Решение задачи оптимальной коррекции угловых элементов орбиты космического аппарата с использованием кватернионного уравнения ориентации орбиты // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 336–344. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344.

**Investigation of the Problem of Optimal Correction of Angular Elements of the Spacecraft Orbit Using Quaternion Differential Equation of Orbit Orientation**

E. A. Kozlov<sup>1</sup>, Yu. N. Chelnokov<sup>2</sup>, I. A. Pankratov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Evgeniy A. Kozlov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ewgeni11\_91@mail.ru

<sup>2</sup>Yuriy N. Chelnokov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, ChelnokovYuN@info.sgu.ru

<sup>3</sup>Iliia A. Pankratov, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, PankratovIA@info.sgu.ru

In this paper we consider the problem of optimal correction of angular elements of the spacecraft orbit. Control (jet thrust vector orthogonal to the plane of the orbit) is limited by absolute value. The combined quality functional characterizes the amount of time and energy consumption. With the help of the Pontryagin maximum principle and quaternion differential equation of the spacecraft orbit orientation, we have formulated differential boundary value problem of correction of the angular elements of the spacecraft orbit. Optimal control law, transversality conditions, not containing Lagrange multipliers, examples of the numerical solution of the problem are given.

*Key words:* spacecraft, orbit, optimal control, quaternion, angular orbital elements.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 12-01-00165-a).*

**References**

1. Pontryagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [The mathematical theory of optimal processes]. Moscow, Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 646–657. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.02.002.
3. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 87–95 (in Russian).
4. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Ryabov Yu. A. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mehanike i astrodinamike* [Handbook on Celestial Mechanics and Astrodynamics]. Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).
5. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mehaniki tverdogo tela i ih prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* [Quaternion and Biquaternion Models and Methods of Mechanics of a Rigid Body and their Applications. Geometry and Kinematics of Motion]. Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
6. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions. *Celestial Mechanics*, 1976, vol. 13, no. 2, pp. 253–262.
7. Brumberg V. A. Analytical techniques of celestial mechanics. Berlin, Springer-Verlag, 1995, 236 p. (Rus. ed.: Brumberg V.A. Analiticheskie algoritmy nebesnoj mehaniki. Moscow, Nauka, 1980, 208 p.)
8. Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G. Optimal reorientation of spacecraft orbit. *Archives of Control Sciences*, 2014, vol. 24, no. 2, pp. 119–128.
9. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Application of Quaternions in Problems of Orientation of a Rigid Body]. Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).



10. Moiseev N. N. *Chislennye metody v teorii optimal'nyh sistem* [Numerical methods in the theory of optimal systems]. Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).
11. Bordovitzyna T. V. *Sovremennye chislennye metody v zadachah nebesnoj mehaniki* [Modern numerical methods in problems of celestial mechanics]. Moscow, Nauka, 1984, 136 p. (in Russian).

**Please cite this article in press as:**

Kozlov E. A., Chelnokov Yu. N., Pankratov I. A. Investigation of the Problem of Optimal Correction of Angular Elements of the Spacecraft Orbit Using Quaternion Differential Equation of Orbit Orientation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 336–344 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-336-344.

УДК 539.375

## ЩЕЛЬ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ ВО ВТУЛКЕ ФРИКЦИОННОЙ ПАРЫ

В. М. Мирсалимов<sup>1</sup>, П. Э. Ахундова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Мирсалимов Вагиф Мирахмедович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Азербайджанский технический университет, главный научный сотрудник, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, vagif.mirsalimov@imm.az

<sup>2</sup>Ахундова Парвана Эльман гызы, кандидат физико-математических наук, докторант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, sopromat\_v@mail.ru

Рассмотрена плоская задача механики разрушения для втулки фрикционной пары. Считается, что во втулке вблизи шероховатой поверхности трения имеется прямолинейная щель переменной ширины, сравнимой с упругими деформациями. Дан критерий и метод решения обратной задачи механики контактного разрушения по определению функции перемещений точек внешнего контура втулки фрикционной пары с учетом перепада температуры и неровностей контактной поверхности в деталях фрикционной пары. Найденная функция перемещений точек внешнего контура втулки обеспечивает повышение несущей способности втулки фрикционной пары.

*Ключевые слова:* фрикционная пара, втулка, плунжер, температура, шероховатая поверхность трения, щель, смыкание берегов щели, функция перемещений наружного контура втулки.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-344-355

### ВВЕДЕНИЕ

Ресурс работы фрикционной пары определяется [1,2] работоспособностью втулки, распределением напряжений в зонах взаимодействия деталей фрикционной пары. Практика эксплуатации фрикционных пар нефтепромыслового оборудования, транспортных машин показывает, что при многократном возвратно-поступательном движении плунжера разрушение втулки фрикционной пары происходит на пятнах фактического касания в тонких приповерхностных слоях путем образования микротрещин, с которыми втулка «живет» значительную часть ресурса работы. В связи с этим на стадии проектирования новых конструкций подвижных сопряжений нужно проводить предельный анализ деталей фрикционной пары, чтобы установить, что предполагаемые исходные щели, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения в течение расчетного срока службы. Размер исходной минимальной щели следует рассматривать как проектную характеристику материала.

Считается, что внутренний контур втулки и внешний контур плунжера близки к круговым. На современном этапе развития техники важное значение имеет [3–11] оптимальное проектирование деталей фрикционной пары, обеспечивающее увеличение работоспособности фрикционных пар. Представляет значительный интерес решение задачи механики по определению такой функции перемещений точек внешнего контура втулки, при которой созданное ею напряженное поле тормозило бы развитие щели во втулке.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние втулки фрикционной пары. В процессе работы фрикционной пары «втулка – плунжера» при многократном возвратно-поступательном движе-