УДК 517.51

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

М. С. Султанахмедов

Султанахмедов Мурад Салихович, научный сотрудник, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sultanakhmedov@gmail.com

В работе рассмотрена ортогональная система вейвлетов и скалярных функций, основанных на полиномах Чебышева второго рода и их нулях. На их базе построена полная ортонормированная система функций. Показан недостаток в аппроксимативных свойствах частичных сумм соответствующего вейвлет-ряда, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева и заключающийся в существенном ухудшении скорости их сходимости к исходной функции на концах отрезка ортогональности. В качестве альтернативы предлагается модифицировать вейвлет-ряд Чебышева второго рода по аналогии со специальными рядами по ортогональным полиномам со свойством «прилипания» на концах отрезка ортогональности. В случае лакунарных частичных сумм доказано, что такой новый специальный вейвлет-ряд лишен указанного недостатка, а следовательно, обладает более привлекательными аппроксимативными свойствами.

Ключевые слова: полиномиальные вейвлеты, специальный вейвлет-ряд, полиномы Чебышева второго рода, аппроксимация функций.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-34-41

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день вейвлеты зарекомендовали себя как достаточно эффективный инструмент в задачах приближения функций, обработки и сжатия цифровых сигналов (временных рядов, звука, изображений и т. д.) (см., например, [1–3]). В последние годы многими авторами активно проводятся исследования теории полиномиальных вейвлетов. Так, C. K. Chui и H. N. Mhaskar в работе [4] впервые рассмотрели вейвлеты на основе тригонометрических полиномов. Позднее T. Kilgore и J. Prestin в [5] заменили тригонометрические полиномы алгебраическими и доказали ортогональность полученной системы функций в смысле чебышевского веса первого рода. Далее, B. Fischer и J. Prestin [6] разработали обобщенную теорию конструирования полиномиальных вейвлетов. В дальнейшем техника разложения функций в ряды по полиномиальным вейвлетам получила развитие в ряде работ (см., например, [7–9] и др.).

F. Mohd и I. Mohd в [10] представили новый, отличный от описанных ранее, способ построения вейвлетов и масштабирующих функций на основе полиномов Чебышева первого рода и их нулей. Используя аналогичную технику, в [11] автором построена ортогональная система вейвлетов на основе полиномов Чебышева второго рода и исследованы аппроксимативные свойства лакунарных частичных сумм $\mathscr{V}_n(f,x)$ соответствующего вейвлет-ряда в случае $n = 2^m$. В настоящей статье показан недостаток в свойствах сходимости частичных сумм $\mathscr{V}_n(f,x)$ к исходной функции $f(x)$, связанный со свойствами самих полиномов Чебышева второго рода. Предлагается модифицировать вейвлет-ряд по аналогии со специальными рядами по ортогональным полиномам со свойством «прилипания», введенным в недавних работах И. И. Шарапудинова [12,13]. Доказано, что такой специальный вейвлет-ряд обладает значительно более привлекательными аппроксимативными свойствами на концах отрезка $[-1,1]$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Обозначим тогда через $L_{2,w}([-1;1])$ евклидово пространство интегрируемых функций $f(x)$ таких, что $\int_{-1}^{1} f^2(x)w(x)dx < \infty$. Определим скалярное произведение в нем с помощью равенства

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)dx. \tag{1}$$

Хорошо известно, что полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

образуют ортогональный базис в $L_{2,w}([-1;1])$, а именно

$$\langle U_n, U_m \rangle = \frac{\pi}{2}\ \delta_{nm} = \begin{cases} \pi/2, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{2}$$

где δ_{nm} — символ Кронекера. Нули n-го полинома $U_n(x)$, очевидно, могут быть определены равенством

$$\xi_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} = \cos\frac{\pi(k+1)}{n+1}, \qquad (k = 0, ..., n-1).$$

2. ВЕЙВЛЕТЫ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Определение 1. *Масштабирующей функцией Чебышева второго рода* назовем полином вида

$$\phi_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^{n} U_j(x) U_j(\xi_k^{(n+1)}),$$

где $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, n$.

Определение 2. Назовем *вейвлет-функцией Чебышева второго рода* полином

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{j=n+1}^{2n} U_j(x) U_j(\xi_k^{(n)}),$$

для любых $n = 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В работе [11] нами доказано, что системы масштабирующих функций $\{\phi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n}$ и вейвлет-функций $\{\psi_{n,k}(x)\}_{k=0}^{n-1}$ являются ортогональными в $L_{2,w}([-1;1])$, а именно

$$\langle \phi_{n,k}, \phi_{n,l} \rangle = \frac{\pi(n+2)}{4\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+2}}\delta_{kl}, \qquad \langle \psi_{n,k}, \psi_{n,l} \rangle = \frac{\pi(n+1)}{4\sin^2\frac{\pi(k+1)}{n+1}}\delta_{kl}.$$

Положим тогда

$$\hat\phi_{m,k}(x) = \frac{\phi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \phi_{2^m,k}, \phi_{2^m,k} \rangle}} = \phi_{2^m,k}(x)\frac{2\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{2^m+2}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+2)}},$$

$$\hat\psi_{m,k}(x) = \frac{\psi_{2^m,k}(x)}{\sqrt{\langle \psi_{2^m,k}, \psi_{2^m,k} \rangle}} = \psi_{2^m,k}(x)\frac{2\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{2^m+1}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}$$

и введем обозначения

$$\Phi_0 = \left\{\hat\phi_{0,0}(x), \hat\phi_{0,1}(x)\right\}, \qquad \Psi_1 = \left\{\hat\psi_{0,0}(x)\right\}, \qquad \Psi_2 = \left\{\hat\psi_{1,0}(x), \hat\psi_{1,1}(x)\right\}, \qquad \dots,$$

$$\Psi_m = \left\{\hat\psi_{m-1,0}(x), \hat\psi_{m-1,1}(x), \dots, \hat\psi_{m-1,2^{m-1}-1}(x)\right\}, \qquad \dots,$$

$$\mathscr{P}_m = \{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\} =$$

$$= \left\{\hat\phi_{0,0}(x), \hat\phi_{0,1}(x), \hat\psi_{0,0}(x), \hat\psi_{1,0}(x), \hat\psi_{1,1}(x), \dots, \hat\psi_{m-1,0}(x), \hat\psi_{m-1,1}(x), \dots, \hat\psi_{m-1,2^{m-1}-1}(x)\right\}.$$

Далее, пусть $H_{2^m,w}([-1;1])$ — подпространство в $L_{2,w}([-1;1])$, состоящее из алгебраических полиномов степени не выше 2^m. В [11] доказано, что система функций $\mathscr{P}_m$ образует ортонормированный базис в $H_{2^m,w}([-1;1])$, т. е. любой полином $P_n(x) \in H_{2^m,w}([-1;1])$ степени $n \leqslant 2^m$ представим в виде линейной комбинации:

$$P_n(x) = a_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + a_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x). \tag{3}$$

Кроме того, если рассмотреть теперь бесконечную систему функций

$$\mathscr{P} = \{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m, \ldots\} =$$
$$= \left\{\hat{\phi}_{0,0}(x), \hat{\phi}_{0,1}(x), \hat{\psi}_{0,0}(x), \hat{\psi}_{1,0}(x), \hat{\psi}_{1,1}(x), \ldots, \hat{\psi}_{m-1,0}(x), \hat{\psi}_{m-1,1}(x), \ldots, \hat{\psi}_{m-1,2^{m-1}-1}(x), \ldots\right\},$$

то она образует ортонормированный базис в $L_{2,w}([-1;1])$.

Из последнего утверждения вытекает, что произвольная функция $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ может быть представлена в виде сходящегося в $L_{2,w}([-1;1])$ ряда

$$f(x) = \hat{a}_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + \hat{a}_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x), \tag{4}$$

где

$$\hat{a}_0 = \int_{-1}^{1} f(t)\hat{\phi}_{0,0}(t)w(t)dt, \qquad \hat{a}_1 = \int_{-1}^{1} f(t)\hat{\phi}_{0,1}(t)w(t)dt,$$
$$\hat{b}_{j,k} = \int_{-1}^{1} f(t)\hat{\psi}_{j,k}(t)w(t)dt, \qquad j = 0, 1, \ldots, m; \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1.$$

Через $\mathscr{V}_{2^m}(f,x)$ обозначим частичную сумму ряда (4) следующего вида:

$$\mathscr{V}_{2^m}(f,x) = \hat{a}_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + \hat{a}_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{b}_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x). \tag{5}$$

Замечание 1. В силу равенства (3) $\mathscr{V}_{2^m}(f,x)$ представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1;1])$ на $H_{2^m,w}([-1;1])$.

3. АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНЫХ СУММ $\mathscr{V}_{2^m}(f,x)$

В работе [11] нами было показано, что частичные суммы (5) ряда (4) обладают теми же аппроксимативными свойствами, что и частичные суммы $S_{2^m}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k U_k(x)$ ряда Фурье по полиномам Чебышева второго рода:

$$f(x) - \mathscr{V}_{2^m}(f,x) = f(x) - S_{2^m}(f,x). \tag{6}$$

Опираясь на этот факт и используя оценки из [14, 15], для каждой внутренней точки x отрезка $[-1,1]$ получаем

$$|f(x) - \mathscr{V}_{2^m}(f,x)| \leqslant E_{2^m}(f)\left(\frac{4\ln 2}{\pi^2}m + O(1)\right), \qquad f \in C[-1,1], \tag{7}$$

где $E_{2^m}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими полиномами $p_n \in H_{2^m,w}([-1;1])$. Кроме того, при $m \to \infty$ равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\\ 0<\alpha\leqslant 1}} |f(x) - \mathscr{V}_{2^m}(f,x)| =$$
$$= \frac{m}{2^{\alpha m}}\left(1-x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}\frac{2^{\alpha+1}\ln 2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{2^{\alpha m}\sqrt{1-x^2}} + 2^{-\alpha m}\right). \tag{8}$$

Замечание 2. В случае $\alpha = 1$ последнее равенство выполняется равномерно на всем отрезке $[-1, 1]$.

В то же время можно привести простой пример аналитической функции $f(x)$, для которой имеет место неравенство

$$\frac{|f(\pm 1) - \mathscr{V}_{2^m}(f, \pm 1)|}{E_{2^m}(f)} \geqslant c_1 2^m. \tag{9}$$

Для этого обратимся к обобщению полиномов Чебышева второго рода — ультрасферическим полиномам $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $\alpha > -1$), образующим ортогональную систему в пространстве $L_{2,\rho}([-1, 1])$, где $\rho(x) = (1 - x^2)^\alpha$. Рассмотрим известное разложение (см. [16, с. 94]) производящей функции для них

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha + 1)} \frac{\Gamma(n + 2\alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha)} P_n^{\alpha,\alpha}(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha - \frac{1}{2}}. \tag{10}$$

При $0 < z < 1$ функция

$$f(x) = f_z(x) = (1 - 2xz + z^2)^{-\alpha - \frac{1}{2}} = (2z)^{-\alpha - \frac{1}{2}} \left(\frac{1 + z^2}{2z} - x \right)^{-\alpha - \frac{1}{2}} \tag{11}$$

аналитична на всей плоскости, разрезанной вдоль положительной полуоси с началом в точке $x = \frac{1 + z^2}{2z} = a > 1$. Известно (см. [17, с. 476]), что

$$E_n[(a - x)^{-\alpha - \frac{1}{2}}] \asymp \frac{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (\sqrt{a^2 - 1})^{\alpha + \frac{3}{2}} (a + \sqrt{a^2 - 1})^n} \asymp n^{\alpha + \frac{1}{2}} z^n. \tag{12}$$

Отсюда находим

$$E_n(f) \asymp n^{\alpha + \frac{1}{2}} z^n. \tag{13}$$

С другой стороны, как показано в работе [18], имеет место

$$|f(\pm 1) - S_n^{\alpha,\alpha}(f, \pm 1)| \asymp n^{2\alpha + 1} z^n. \tag{14}$$

Сопоставляя (13) и (14), получаем:

$$\frac{|f(1) - S_n^{\alpha,\alpha}(f, 1)|}{E_n(f)} \geqslant c(\alpha) n^{\alpha + \frac{1}{2}}, \qquad \alpha > -1/2.$$

В интересующем нас частном случае при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $n = 2^m$ это неравенство принимает вид

$$\frac{|f(\pm 1) - S_{2^m}(f, \pm 1)|}{E_{2^m}(f)} \geqslant c_1 2^m. \tag{15}$$

Из (6) и (15) приходим к справедливости (9).

Приведенный пример показывает, что частичные суммы $\mathscr{V}_{2^m}(f, x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$ плохо приближают не только непрерывные функции $f \in C[-1, 1]$, но также аналитические функции (за исключением алгебраических полиномов). Может случится, что $\mathscr{V}_{2^m}(f, x)$ приближает $f(x)$ по порядку в 2^m раз хуже, чем полином наилучшего приближения $P^*_{2^m}(f, x)$. Этот отрицательный факт является следствием того, что функция Лебега для сумм Фурье – Чебышева второго рода

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{U}_k(x) \hat{U}_k(t) \right| w(t) dt$$

в точках $x = \pm 1$ имеет порядок роста равный n ($n \to \infty$) (см., например, [14]).

4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВЕЙВЛЕТ-РЯД СО СВОЙСТВОМ «ПРИЛИПАНИЯ»

Для того чтобы устранить указанный негативный эффект, предлагается модифицировать вейвлет-ряд (4) по схеме, схожей с построением введенных в недавних работах [12, 13] предельных и специальных рядов по ультрасферическим полиномам, обладающих свойством «прилипания» на концах отрезка ортогональности. Следуя [13], введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = \frac{f(x) - c(f,x)}{1-x^2} = \frac{g(f,x)}{1-x^2}, \tag{16}$$

где $c(f,x) = \dfrac{f(-1)+f(1)}{2} - \dfrac{f(-1)-f(1)}{2}x$.

Если $f(x) \in L_{2,w}([-1;1])$ то, очевидно, также и $F(x) \in L_{2,w}([-1;1])$. Тогда она может быть представлена в виде ряда

$$F(x) = \tilde{a}_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\tilde{b}_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x), \tag{17}$$

где $\tilde{a}_0 = \int\limits_{-1}^{1} F(t)\hat{\phi}_{0,0}(t)w(t)dt$, $\tilde{a}_1 = \int\limits_{-1}^{1} F(t)\hat{\phi}_{0,1}(t)w(t)dt$, $\tilde{b}_{j,k} = \int\limits_{-1}^{1} F(t)\hat{\psi}_{j,k}(t)w(t)dt$, $j = 0,1,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,2^j-1$.

Выразим теперь из (16) и (17) исходную функцию:

$$f(x) = c(f,x) + (1-x^2)\left[\tilde{a}_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\tilde{b}_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x)\right].$$

Будем называть такой модифицированный ряд *специальным вейвлет-рядом Чебышева второго рода*. Обозначим его лакунарную частичную сумму:

$$\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x) = c(f,x) + (1-x^2)\left[\tilde{a}_0\hat{\phi}_{0,0}(x) + \tilde{a}_1\hat{\phi}_{0,1}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}\tilde{b}_{j,k}\hat{\psi}_{j,k}(x)\right]. \tag{18}$$

Рассмотрим некоторые свойства $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)$. Из явного вида (18) легко следует

Теорема 1. *Частичная сумма $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)$ на концах отрезка $[-1,1]$ совпадает с исходной функцией $f(x)$, т.е. $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,\pm1) = f(\pm1)$.*

Как отмечено в [13], это свойство имеет важное значение в задачах, связанных с обработкой временных рядов и изображений.

Теорема 2. *Частичная сумма $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)$ представляет собой линейный оператор, проектирующий пространство $L_{2,w}([-1;1])$ на $H_{2^m+2,w}([-1;1])$, т. е. для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше $n \leqslant 2^m+2$ справедливо равенство $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(P_n,x) \equiv P_n(x)$.*

Доказательство. Для произвольного полинома $P_n(x)$ ($n \leqslant 2^m+2$) рассмотрим выражение вида (16):

$$\frac{P_n(x) - c(P_n,x)}{1-x^2} = \frac{g(P_n,x)}{1-x^2}. \tag{19}$$

Очевидно, $g(P_n,x)$ представляет собой полином степени n, причем $g(P_n,\pm1) = 0$. Вследствие теоремы Безу, он представим в виде $g(P_n,x) = (1-x^2)M_{n-2}(x)$, где $M_{n-2}(x)$ — полином степени $n-2 \leqslant 2^m$. Таким образом, из (19) имеем:

$$\frac{P_n(x) - c(P_n,x)}{1-x^2} = M_{n-2}(x).$$

Воспользуемся теперь замечанием 1, тогда $\mathscr{V}_{2^m}(M_{n-2},x) = M_{n-2}(x)$, откуда

$$\mathscr{V}_{2^m}(M_{n-2},x) = M_{n-2}(x) = \frac{P_n(x) - c(P_n,x)}{1-x^2}.$$

Выражая отсюда $P_n(x)$, получаем окончательно

$$P_n(x) = c(P_n, x) + (1-x^2)\mathscr{V}_{2^m}(M_{n-2}, x) = \tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(P_n, x). \qquad \square$$

Теорема 3. *Для любой функции $f \in C[-1,1]$ и любого $x \in (-1,1)$ имеет место оценка*

$$|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_m(f,x)| \leqslant cE_{2^m+2}(f)(1 + \ln(1 + (2^m+2)\sqrt{1-x^2})),$$

где $c > 0$ — константа.

Доказательство. Как отмечалось выше, в работе [13] сконструированы специальные ряды по ультрасферическим полиномам, обладающие свойством «прилипания» в точках $x = \pm 1$. Частичные суммы такого ряда в случае $\alpha = \frac{1}{2}$ могут быть записаны в виде

$$\sigma_n(f,x) = \sigma_n^{\frac{1}{2}}(f,x) = c(f,x) + (1-x^2)S_{n-2}(F,x).$$

Рассмотрим отклонение этих частичных сумм от аппроксимируемой функции

$$\begin{gathered}|f(x) - \sigma_n(f,x)| = |f(x) - c(f,x) - (1-x^2)S_{n-2}(F,x)| = \\ = |g(f,x) - (1-x^2)S_{n-2}(F,x)| = (1-x^2)|F(x) - S_{n-2}(F,x)|.\end{gathered} \tag{20}$$

С другой стороны, преобразовав аналогичным образом погрешность приближения функции $f(x)$ частичной суммой $\tilde{\mathscr{V}}_m(f,x)$ специального вейвлет-ряда, получим:

$$|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_m(f,x)| = (1-x^2)|F(x) - \mathscr{V}_m(F,x)|.$$

Отсюда и из (6) имеем:

$$|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_m(f,x)| = (1-x^2)\left|F(x) - S_{2^m}(F,x)\right|. \tag{21}$$

Сопоставляя теперь (20) с (21), получаем:

$$|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_m(f,x)| = |f(x) - \sigma_{2^m+2}(f,x)|. \tag{22}$$

В [13] доказана следующая оценка:

$$|f(x) - \sigma_n(f,x)| \leqslant cE_n(f)(1 + \ln(1 + n\sqrt{1-x^2})). \tag{23}$$

Из (22)–(23) следует справедливость утверждения теоремы. $\square$

Рассмотрим теперь верхнюю грань отклонения частичных сумм $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)$ от функций из класса Липшица $\operatorname{Lip}\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Теорема 4. *Справедливо асимптотическое равенство:*

$$\begin{gathered}\sup_{\substack{f\in \operatorname{Lip}\alpha,\\ 0<\alpha\leqslant 1}} \left|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)\right| = \\ = \frac{m}{2^{\alpha m}}\left(1-x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}\frac{2^{\alpha+1}\ln 2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{\alpha m}}\left(\sin 2^m \arccos x + \sqrt{1-x^2}\right)\right),\end{gathered}$$

которое выполняется равномерно относительно $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < 1)$.

Доказательство. Из (18) имеем:

$$\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x) = c(f,x) + (1-x^2)\mathscr{V}_{2^m}(F,x). \tag{24}$$

Отклонение частичных сумм специального вейвлет-ряда тогда может быть записано в следующем виде:

$$\left|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)\right| = \left|f(x) - c(f,x) - (1-x^2)\mathscr{V}_{2^m}(F,x)\right| =$$

$$= \left|g(f,x) - (1-x^2)\mathscr{V}_{2^m}(F,x)\right| = (1-x^2)\left|F(x) - \mathscr{V}_{2^m}(F,x)\right|. \qquad (25)$$

Воспользовавшись (8), имеем

$$\sup_{\substack{f\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\\ 0<\alpha\leqslant 1}} \left|f(x) - \tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)\right| = (1-x^2) \sup_{\substack{f\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\\ 0<\alpha\leqslant 1}} \left|F(x) - \mathscr{V}_{2^m}(F,x)\right| =$$

$$= \frac{m}{2^{\alpha m}}\left(1-x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}\frac{2^{\alpha+1}\ln 2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + \left(1-x^2\right) O\left(\frac{\sin 2^m \arccos x}{2^{\alpha m}\sqrt{1-x^2}} + 2^{-\alpha m}\right) =$$

$$= \frac{m}{2^{\alpha m}}\left(1-x^2\right)^{\frac{\alpha}{2}+1}\frac{2^{\alpha+1}\ln 2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t\,dt + O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2^{\alpha m}}\left(\sin 2^m \arccos x + \sqrt{1-x^2}\right)\right). \qquad \square$$

Теоремы 1– 4 показывают, что частичные суммы $\tilde{\mathscr{V}}_{2^m}(f,x)$ как аппарат приближения обладают весьма привлекательными аппроксимативными свойствами.

Автор благодарит доктора физико-математических наук И. И. Шарапудинова за постановку задачи и ценные советы при ее решении.

Библиографический список

1. *Meyer Y.* Ondelettes et Operateurs. Paris : Hermann, 1990. Vol. I–III.
2. *Daubechies L.* Ten Lectures on Wavelets // CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Proceedings. Vol. 61. Philadelphia, PA : SIAM, 1992. 357 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.
3. *Chui C. K.* An Introduction to Wavelets. Boston : Academic Press, 1992. 271 p.
4. *Chui C. K., Mhaskar H. N.* On Trigonometric Wavelets // Constructive Approximation. 1993. Vol. 9, iss. 2–3. P. 167–190. DOI: 10.1007/BF01198002.
5. *Kilgore T., Prestin J.* Polynomial wavelets on an interval // Constructive Approximation. 1996. Vol. 12, iss. 1. P. 95–110. DOI: 10.1007/BF02432856.
6. *Fischer B., Prestin J.* Wavelet based on orthogonal polynomials // Mathematics of computation. 1997. Vol. 66, № 220. P. 1593–1618. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00876-4.
7. *Fischer B., Themistoclakis W.* Orthogonal polynomial wavelets // Numerical Algorithms. 2002. Vol. 30, iss. 1. P. 37–58. DOI: 10.1023/A:1015689418605.
8. *Capobiancho M. R., Themistoclakis W.* Interpolating polynomial wavelet on $[-1, 1]$ // Advanced in Computational Mathematics. 2005. Vol. 23, iss. 4. P. 353–374. DOI: 10.1007/s10444-004-1828-2.
9. *Dao-Qing Dai, Wei Lin* Orthonormal polynomial wavelets on the interval // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 134, iss. 5. P. 1383–1390. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-08088-3.
10. *Mohd F., Mohd I.* Orthogonal Functions Based on Chebyshev Polynomials // Matematika. 2011. Vol. 27, № 1. P. 97–107.
11. *Султанахмедов М. С.* Аппроксимативные свойства вейвлетов, построенных на основе полиномов Чебышева второго рода // Владикавказ. матем. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 56–64.
12. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295–309. DOI: 10.4213/mzm10292.
13. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, вып. 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
14. *Яхнин Б. М.* О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ // УМН. 1958. Т. 13, вып. 6(84). С. 207–211.
15. *Яхнин Б. М.* Приближение функций класса Lip_α частными суммами ряда Фурье по многочленам Чебышева второго рода // Изв. вузов. Матем. 1963. Вып. 1. С. 172–178.
16. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М. : Физматлит, 1962. 500 с.
17. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 626 с.
18. *Шарапудинов И. И.* О наилучшем приближении и суммах Фурье – Якоби // Матем. заметки. 1983. Т. 34, вып. 5. С. 651–661. DOI: 10.1007/BF01157445.

Special Wavelets Based on Chebyshev Polynomials of the Second Kind and their Approximative Properties

M. S. Sultanakhmedov

Sultanakhmedov Murad Salikhovich, Daghestan Scientific Center of RAS, 45, Gadzhiev st., Makhachkala, Daghestan, Russia, 367000, sultanakhmedov@gmail.com

The system of wavelets and scalar functions based on Chebyshev polynomials of the second kind and their zeros is considered. With the help of them we construct a complete orthonormal system of functions. A certain disadvantage is shown in approximation properties of partial sums of the corresponding wavelet series, related to the properties of Chebyshev polynomials themselves and meaning a significant decrease of the rate of their convergence to the original function at the endpoints of orthogonality segment. As an alternative, we propose a modification of Chebyshev wavelet series of the second kind by analogy to the special polynomial series with the property of adhesion. These new special wavelet series is proved to be deprived of the mentioned disadvantage and to have better approximative properties.

Key words: polynomial wavelets, special wavelet series, Chebyshev polynomials of the second kind, function approximation.

References

1. Meyer Y. *Ondelettes et Operateurs*, vol. I–III, Paris, Hermann, 1990.
2. Daubechies L. Ten Lectures on Wavelets. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics Proceedings*, vol. 61, Philadelphia, PA, SIAM, 1992, 357 p. DOI: 10.1137/1.9781611970104.
3. Chui C. K. *An Introduction to Wavelets. Wavelet Analysis and its Applications*, vol. 1, Boston, Academic Press, 1992, 264 p.
4. Chui C. K., Mhaskar H. N. On Trigonometric Wavelets. *Constructive Approximation*, 1993, vol. 9, iss. 2–3, pp. 167–190. DOI: 10.1007/BF01198002.
5. Kilgore T., Prestin J. Polynomial wavelets on an interval. *Constructive Approximation*, 1996. Vol. 12, iss. 1, pp. 95–110. DOI: 10.1007/BF02432856.
6. Fischer B., Prestin J. Wavelet based on orthogonal polynomials. *Mathematics of computation*, 1997, vol. 66, no. 220, pp. 1593–1618. DOI: 10.1090/S0025-5718-97-00876-4.
7. Fischer B., Themistoclakis W. Orthogonal polynomial wavelets. *Numerical Algorithms*, 2002, vol. 30, iss. 1, pp. 37–58. DOI: 10.1023/A:1015689418605.
8. Capobiancho M. R., Themistoclakis W. Interpolating polynomial wavelet on $[-1, 1]$. *Advanced in Computational Mathematics*, 2005, vol. 23, iss. 4, pp. 353–374. DOI: 10.1007/s10444-004-1828-2.
9. Dao-Qing Dai, Wei Lin. Orthonormal polynomial wavelets on the interval. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2005, vol. 134, iss. 5, pp. 1383–1390. DOI: 10.1090/S0002-9939-05-08088-3.
10. Mohd F., Mohd I. Orthogonal Functions Based on Chebyshev Polynomials. *Matematika*, 2011, vol. 27, no. 1, pp. 97–107.
11. Sultanakhmedov M. S. Approximative properties of the Chebyshev wavelet series of the second kind. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal*, 2015, vol. 17, iss. 3, pp. 56–64 (in Russian).
12. Sharapudinov I. I. Limit ultraspherical series and their approximative properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
13. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximative properties. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
14. Yakhnin B. M. Lebesgue functions for expansions in series of Jacobi polynomials for the cases $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, iss. 6(84), pp. 207–211 (in Russian).
15. Yakhnin B. M. Approximation of functions of class Lip α by partial sums of a Fourier series in Chebyshev polynomials of second kind. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1963, no. 1, pp. 172–178 (in Russian).
16. Szegö G. Orthogonal Polynomials. *Colloquium Publications (Amer. Math. Soc.)*, 1939, vol. 23, 432 p.
17. Timan A. F. *Teorija priblizhenija funkcij dejstvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, Fizmatgiz, 1960, 626 p. (in Russian).
18. Sharapudinov I. I. Best approximation and the Fourier – Jacobi sums. *Math. Notes*, 1983, vol. 34, iss. 5, pp. 816–821. DOI: 10.1007/BF01157445.