ИНФОРМАТИКА

УДК 519.7

О НАПРАВЛЕННОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ КОЛЛЕКТИВА АВТОМАТОВ БЕЗ КОМПАСА НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ

А. Н. Курганский[1], С. В. Сапунов[2]

[1]Курганский Алексей Николаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ГУ «Институт прикладной математики и механики», Донецк, kurgansk@iamm.su

[2]Сапунов Сергей Валерьевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина, sapunov_sv@yahoo.com

Рассматривается задача сохранения однонаправленного движения коллективом конечных автоматов на одномерной целочисленной решетке. Автоматы не различают вершины среды по их координатным направлениям (т. е. автоматы не имеют компаса). Мы рассматриваем коллективы, состоящие из одного автомата и нескольких камней, расположение которых полностью определяется автоматом. В работе доказано, что автомат с двумя и менее камнями не может сохранять однонаправленного движения на одномерной целочисленной решетке, а автомат с тремя камнями может.

Ключевые слова: коллектив автоматов, лабиринт, однонаправленное движение.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365

ВВЕДЕНИЕ

Проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем (управляющего автомата и его операционной среды) является центральной проблемой теоретической кибернетики [1–4]. У истоков исследований этой проблематики стояли К. Шеннон (Shannon) [5] и В. М. Глушков [6]. Взаимодействие управляющей системы и среды зачастую представляется как процесс перемещения управляющего автомата по графу (лабиринту) среды [7], что привело к возникновению обширной и интенсивно развивающейся области исследований поведения автоматов в лабиринтах (см. обзоры [8, 9]). Основными задачами для автоматов и лабиринтов являются задачи синтеза автоматов (коллективов автоматов), которые обходят лабиринты из заданного класса, и задачи описания по заданному автомату (коллективу автоматов) всех лабиринтов, которые обходятся этими автоматами. В рамках этого подхода решены задачи обхода лабиринта автоматом и коллективом автоматов, отличения вершин лабиринта друг от друга и лабиринта-эталона от класса лабиринтов. Исследование в этом направлении получили широкий спектр приложений, например в задачах анализа изображений [10–12] и навигации мобильных роботов [13]. Результаты, полученные для автоматов и лабиринтов, опираются на важное допущение — функционирующие в лабиринтах автоматы могут различать направления, т. е. обладают «компасом» [14–17].

В настоящей работе рассматриваются коллективы автоматов без компаса, взаимодействующие между собой в среде, представляющей собой одномерную целочисленную решетку. Взаимодействуя со средой, каждый автомат получает на вход информацию о наличии или отсутствии других автоматов в окрестности его текущей вершины, а его выходом является перемещение в одну из наблюдаемых им вершин. Автоматы не различает направление и взаимное расположение этих вершин, но различают занята вершина или нет.

При таком ограничении возможностей автоматов их двигательное поведение значительно усложняется. Например, задача сохранения направления движения в среде является тривиальной для автоматов с компасом, но для автоматов без компаса требует привлечения дополнительных средств и разработки методов их использования. В работе приводятся достаточные и необходимые условия в виде ограничений на свойства автоматов и структуру коллектива, при которых коллектив как цельный, связанный взаимодействием объект, сохраняет постоянное направление перемещения в среде.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В начальный момент времени коллектив автоматов помещается в среду, представляющую собой одномерную целочисленную решетку. Элементы среды далее будем называть ее вершинами, а вершину, в которой находится рассматриваемый автомат, — его текущей вершиной. Каждый автомат наблюдает вершины, координаты которых на единицу отличаются от координат его текущей вершины (соседние вершины). Ни один из автоматов не имеет компаса, т. е. не различает направления в среде и взаимное расположение вершин. Каждый автомат может перемещаться из текущей вершины в соседнюю с ней вершину. Требуется найти необходимые и достаточные условия в виде ограничений на свойства автоматов и структуру коллектива, при которых коллектив как цельный, связанный взаимодействием объект, сохраняет постоянное направление перемещения в среде. В данной работе решена задача сохранения направления движения для коллектива, состоящего из одного активного автомата и автоматов-камней, выполняющих для него роль внешней памяти. Такое представление коллективов в виде автоматов и камней является традиционным для исследований поведения коллективов автоматов в лабиринтах.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначим множества целых и натуральных чисел (с нулем) и $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Произвольное множество $E \subseteq \mathbb{Z}^n$ назовем n-мерной геометрической средой E. Элементы множества E назовем вершинами среды. Имя вершины есть ее координаты. Две вершины $v = (a_1, \ldots, a_n)$ и $v' = (b_1, \ldots, b_n)$ назовем соседними, если для единственного $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется $|a_i - b_i| = 1$, а для всех остальных i выполняется $a_i = b_i$. Множество всех вершин, соседних с вершиной $v \in E$, назовем окрестностью вершины v.

Положим, что в среде E перемещается конечный автомат A. На вход ему подается информация о текущей вершине и ее окрестности. Выходом автомата является перемещение в вершину соседнюю с текущей, выбранную на основании анализа входа. Если автомат A различает вершины в текущей окрестности по координатам направлений в среде E, то будем называть его автоматом с компасом. В противном случае, если он не использует координатную систему, назовем его автоматом без компаса.

Пусть автомат A в момент времени t находится в вершине $v(t) \in E$. Перемещение автомата будем называть равномерным и направленным, если существует такой период $T \in \mathbb{N}$, что для любого момента времени t выполняется $v(t+T) - v(t) = v(t+2T) - v(t+T)$.

В среде E также будем рассматривать коллектив взаимодействующих автоматов $\mathscr{A} = (A_1, \ldots, A_m)$. Каждому автомату A_i на вход, кроме информации о текущей вершине и ее окрестности, подается еще и информация о наличии в вершине других автоматов коллектива $\mathscr{A}$ и их состояниях. Если каждый автомат из коллектива $\mathscr{A}$ является автоматом без компаса, то $\mathscr{A}$ будем называть коллективом автоматов без компаса. Далее рассматриваются только такие коллективы автоматов.

Пусть автомат $A_i \in \mathscr{A}$ в момент времени t находится в вершине $v_i(t) = (a_{1_i}, \ldots, a_{n_i})$. Координатой коллектива $\mathscr{A}$ в момент времени t будем называть вектор $v_{\mathscr{A}}(t) = (v_1(t) + \ldots + v_m(t))/m$. Диаметром коллектива будем называть величину $d_{\mathscr{A}} = \max\left\{|a_{i_k} - a_{i_l}| \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k, l \leqslant m\right\}$. Перемещение коллектива $\mathscr{A}$ будем называть равномерным и направленным, если его диаметр ограничен некоторой константой и существует такой период $T \in \mathbb{N}$, что для любого момента времени t выполняется $v_{\mathscr{A}}(t+T) - v_{\mathscr{A}}(t) = v_{\mathscr{A}}(t+2T) - v_{\mathscr{A}}(t+T)$.

Пусть $J \subset \{1, \ldots, m\}$. Подсистему $(A_j)_{j \in J}$ коллектива взаимодействующих автоматов $\mathscr{A}$ будем называть камнями в коллективе $\mathscr{A}$, если для любого $j \in J$ выполняются следующие два условия: 1) A_j имеет только одно состояние; 2) A_j может перемещаться только если с ним на одной вершине находится автомат A_i ($i \notin J$), причём A_j может переместиться только в ту же вершину, что и A_i. Для автоматов, которые не являются камнями, камни играют роль внешней памяти.

Дадим точные определения. Одномерной целочисленной решеткой будем называть геометрическую среду $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$. Обозначим через $\mathscr{P}(M)$ множество всех подмножеств произвольного множества M. Пусть I – некоторое множество индексов и $\{M_i | i \in I\}$ – некоторое семейство множеств. Тогда через $\mathscr{T}(\{M_i | i \in I\})$ обозначим множество всех частичных трансверсалей этого семейства, где частичная трансверсаль по определению содержит не более одного элемента из каждого M_i. Заметим, что пустое множество также является частичной трансверсалью.

Коллективом взаимодействующих автоматов типа $(1, m)$ назовем коллектив $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$, состоящий из одного автомата A_1 и m камней A_2, ..., A_{m+1}. Пусть $I = \{1, \ldots, m+1\}$. Каждый автомат A_i из коллектива $\mathscr{A}$ представлен шестеркой $A_i = \left(S_i, X_i, Y_i, s_0^i, \delta_i, \lambda_i\right)$, где S_i — конечное множество состояний; $X_i = \{(\alpha, \{\beta, \gamma\}) \,|\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{T}(\{S_j | j \in I \setminus \{i\}\})\}$ — входной алфавит (здесь α описывает автоматы, расположенные в текущей вершине, а мультимножество $\{\beta, \gamma\}$ описывает автоматы, расположенные в ее окрестности); $Y_i = \mathscr{P}(I \setminus \{i\}) \cup \{h\}$ — выходной алфавит (здесь $y = h$ обозначает «оставаться в текущей вершине», $y \in Y_i \setminus \{\varnothing, h\}$ обозначает «перейти в вершину, в которой находятся автоматы из списка y и только они», $y = \varnothing$ обозначает «перейти в любую вершину из окрестности текущей, в которой нет других автоматов»); $s_0^i \in S_i$ — начальное состояние; $\delta_i : S_i \times X_i \to S_i$ — функция переходов; $\lambda_i : S_i \times X_i \to Y_i$ — функция выходов. Для любого камня A_j, $2 \leqslant j \leqslant m+1$, выполняются следующие условия:

1) $S_j = \left\{s_0^j\right\}$;

2) для любого $x = (\alpha, \{\beta, \gamma\}) \in X_j$ либо $\lambda_j\left(s_0^j, x\right) = h$, либо если $\lambda_j\left(s_0^j, x\right) = b \neq h$, то существует $s \in S_1$ такое, что $s \in \alpha$ и $\lambda_1(s, x') = b$, где $x' = \left((\alpha \setminus \{s\}) \cup \left\{s_0^j\right\}, \{\beta, \gamma\}\right)$.

Поведением коллектива $\mathscr{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$ типа $(1, m)$ в геометрической среде E назовем последовательность $\pi(\mathscr{A}, E)$: $(\vec{x}_0, \vec{s}_0, \vec{y}_0)$, ..., $(\vec{x}_t, \vec{s}_t, \vec{y}_t)$, $(\vec{x}_{t+1}, \vec{s}_{t+1}, \vec{y}_{t+1})$, ..., где $\vec{x}_t = \left(x_t^1, \ldots, x_t^{m+1}\right)$, $x_t^j = \left(\alpha_t^j, \left\{\beta_t^j, \gamma_t^j\right\}\right) \in X_j$, $\vec{s}_t = \left(s_t^1, \ldots, s_t^{m+1}\right)$, $s_t^j \in S_j$ $\vec{y}_t = \left(y_t^1, \ldots, y_t^{m+1}\right)$, $y_t^j \in Y_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$ такие, что $s_{t+1}^j = \delta_j\left(s_t^j, x_t^j\right)$, $y_{t+1}^j = \lambda_j\left(s_t^j, x_t^j\right)$.

Положим, что в начальный момент времени все автоматы из коллектива $\mathscr{A}$ установлены в одной и той же вершине среды E.

3. НАПРАВЛЕННОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ НА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЁТКЕ

Для одномерной целочисленной решетки $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_1$ и коллектива автоматов типа $(1, m)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема. *1. При $0 \leqslant m < 3$ не существует коллектива из одного автомата и m камней (коллектива типа $(1, m)$), который совершает равномерное направленное перемещение на одномерной целочисленной решетке.*

2. Существует коллектив, состоящий из одного автомата и трех камней (коллектив типа $(1, 3)$), который совершает равномерное направленное перемещение на одномерной целочисленной решетке.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем методом разбора случаев.

Для представления поведения коллектива автоматов будем использовать ориентированное корневое дерево, растущее вниз. С вершинами дерева свяжем входные символы автомата A_1, а с дугами — его выходные символы. Рядом с выходным символом будем указывать множество индексов камней, перемещающихся вместе с A_1 (если такие камни есть). Корнем дерева является вершина $x_0 = (\{2, ..., m+1\}, \{\varnothing, \varnothing\})$. Дуга с меткой $(y, \{i_1, \ldots, i_k\})$ (здесь $y \in Y_1$, $i_j \in \{2, \ldots, m+1\}$) начинается в вершине $x \in X_1$ и оканчивается в вершине $x' \in X_1$ тогда и только тогда, когда после перемещения автоматов A_1, A_{i_1}, ..., A_{i_k} в вершину, в которой находится y, вход автомата A_1 изменяется с x на x'. Ветви дерева будем называть стратегиями поведения коллектива $\mathscr{A}$. У каждой ветви выделим два поддерева. Первое поддерево соответствует поведению коллектива $\mathscr{A}$ во время первоначальной расстановки камней в вершинах среды. Его корнем является вершина x_0. Так как камней конечное число, то это дерево также является конечным. Второе поддерево соответствует поведению коллектива $\mathscr{A}$ во время перемещений по среде. Корнем этого поддерева является вершина первого поддерева, наиболее удаленная от вершины x_0. Второе поддерево в силу бесконечности поведения коллектива автоматов является бесконечным.

Так как входной и выходной алфавиты автомата A_1 конечны, то описанное выше дерево содержит изоморфные поддеревья. Поэтому для анализа поведения коллектива автоматов достаточно рассмотреть следующий конечный фрагмент этого дерева. Положим, что вершина дерева является листом, если приписанный ей вход автомата A_1 уже был приписан некоторой вершине, расположенной ближе к корню дерева и находящейся в том же поддереве своей ветви, что и рассматриваемая вершина.

Рассмотрим способность совершать равномерное направленное перемещение в среде E для коллективов автоматов типа $(1, m)$, различающихся по числу камней. Положим, что перемещения коллектива в среде происходят по наихудшему сценарию из всех возможных.

С целью сохранения единообразия обозначений автомат без камней будем обозначать как коллектив $(1, 0)$. Единственным входным символом такого коллектива является $x = (\varnothing, \{\varnothing, \varnothing\})$, а единственным выходным символом – $y = \varnothing$, который в виду отсутствия других автоматов означает «перейти в любую вершину, соседнюю с текущей». Рассмотрим перемещения автомата A_1 в среде E представленные на рис. 1. Здесь окружности обозначают вершины среды, число под вершиной — её абсолютные координаты, квадрат — положение автомата A_1.

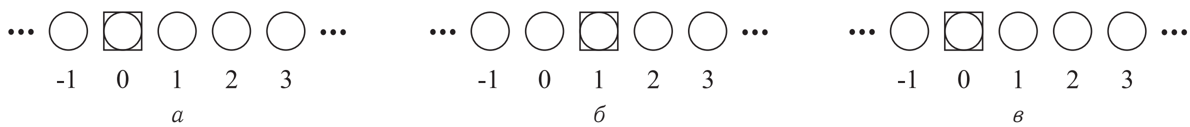

Рис. 1. Перемещения коллектива типа $(1, 0)$

Пусть автомат A_1 первоначально помещен в вершину 0 (рис. 1, *а*). После перехода в соседнюю с ней вершину он может оказаться либо в вершине 1, либо в вершине -1. Пусть автомат A_1 переместился в вершину 1 (рис. 1, *б*). Так как вершина для перехода выбирается случайным образом из двух возможных, то после следующего перемещения автомат в наихудшем случае окажется в вершине 0 (рис. 1, *в*). Приведенный пример показывает, что в наихудшем случае перемещения коллектива $(1, 0)$ не сохраняют направление. Заметим, что поведение этого автомата отличается неоднозначностью выбора следующей вершины из текущей и невозможностью в наихудшем случае возвращения в предыдущую вершину для того, чтобы повторить выбор. Можно предположить, что для направленного перемещения автомата необходимо либо избегать неоднозначного выбора, либо иметь возможность оценить правильность своего выбора и в случае необходимости вернуться исходную вершину.

Пусть $\mathscr{A} = (A_1, A_2)$, т.е. коллектив имеет тип $(1, 1)$. Поведение этого коллектива изображено на рис. 2. Здесь полужирным шрифтом набраны номера вершин дерева, введенные для облегчения комментирования рисунка. Для камня A_2 вместо пары $\left(2, s_0^2\right)$ указан только его индекс — 2.

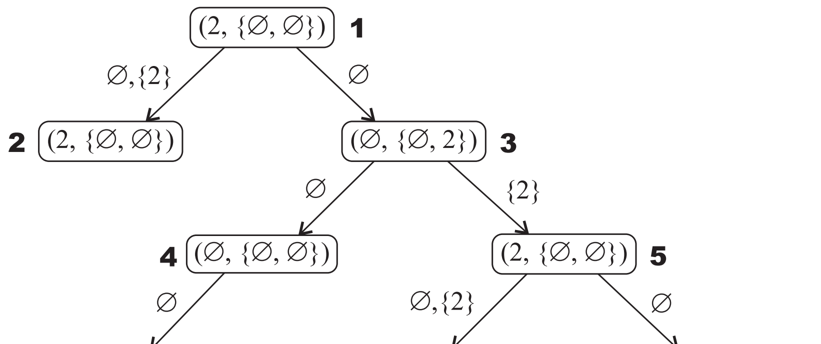

Рис. 2. Поведение коллектива типа $(1, 1)$

Рассмотрим возможные стратегии коллектива $\mathscr{A}$. Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 2)$, заключается в том, что автоматы A_1 и A_2 всегда перемещаются вместе. В этом случае коллектив (A_1, A_2) перемещается как автомат A_1 и, как показано выше, в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 3, 4, 6)$, заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_2 в начальной вершине и далее перемещается без него. Перемещения коллектива при использовании этой стратегии представлены на рис. 3.

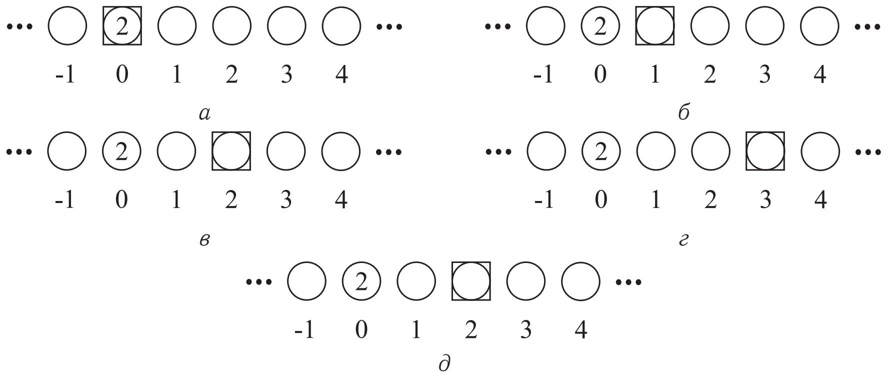

Рис. 3. Перемещения коллектива типа $(1, 1)$ при использовании стратегии $(1, 3, 4, 6)$

Пусть коллектив (A_1, A_2) первоначально установлен в вершине 0 (рис. 3, *а*). Следуя своей стратегии, автомат A_1 оставляет камень A_2 в этой вершине и переходит в произвольно выбранную соседнюю вершину, например, в вершину 1 (рис. 3, *б*). В этот момент его вход равен $(\varnothing, \{\varnothing, 2\})$. Единственной вершиной в окрестности вершины 1, в которой нет других автоматов, является вершина 2. После перехода в эту вершину вход автомата A_1 становится равен $(\varnothing, \{\varnothing, \varnothing\})$ (рис. 3, *в*). В наихудшем случае автомата A_1 не сможет вернуться к камню A_2 и далее коллектив (A_1, A_2) будет вести себя как коллектив типа $(1, 0)$, а значит, не будет совершать направленного перемещения (рис. 2, *г*, *д*).

Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 3, 5, 7)$, заключается в повторении следующей последовательности действий: автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине, переходит в соседнюю с ней вершину, возвращается в вершину, в которой установлен A_2, а затем вместе с A_2 переходит в соседнюю вершину. Перемещения коллектива при использовании этой стратегии представлены на рис. 4.

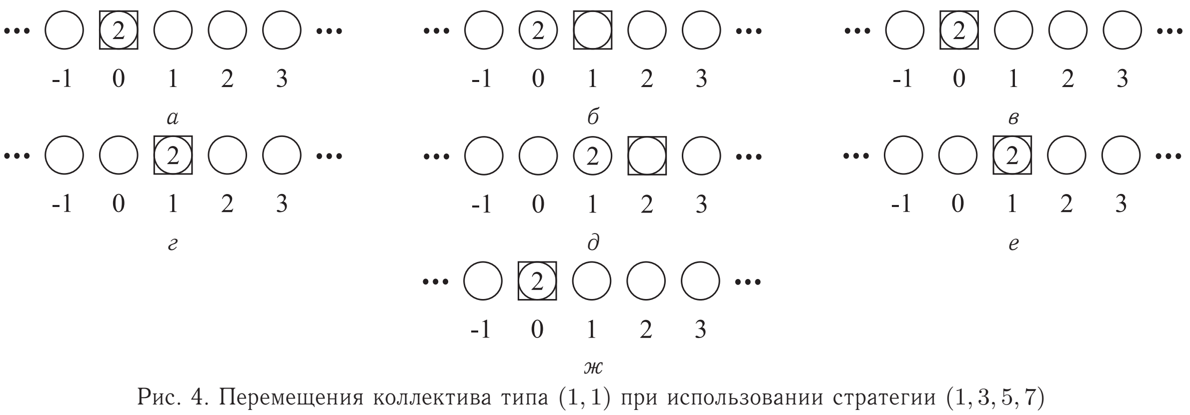

Рис. 4. Перемещения коллектива типа $(1, 1)$ при использовании стратегии $(1, 3, 5, 7)$

Пусть коллектив (A_1, A_2) первоначально установлен в вершине 0 (рис. 4, *а*). Согласно выбранной стратегии автомат A_1 оставляет в этой вершине камень A_2 и переходит в одну из соседних вершин, например в вершину 1 (рис. 4, *б*). Далее A_1 возвращается в вершину 0 (рис. 4, *в*). Он может это сделать, так как наблюдает на своем входе камень A_2, установленный в этой вершине. Автоматы A_1 и A_2 вместе перемещаются в одну из соседних вершин. Пусть ей снова будет вершина 1 (рис. 4, *г*). Далее A_1 оставляет A_2 в этой вершине и переходит в одну из соседних вершин, например, вершину 2 (рис. 4, *д*). Затем A_1 возвращается в вершину 1 (рис. 4, *е*) и вместе с A_2 переходит в одну из соседних вершин. Этой вершиной в худшем случае окажется вершина 0 (рис. 4, *ж*). Таким образом, следуя стратегии $(1, 3, 5, 7)$, коллектив (A_1, A_2) в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 3, 5, 8)$, заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_2 в начальной вершине и далее перемещается из неё в вершины из её окрестности и обратно. Ясно, что в этом случае коллектив (A_1, A_2) не совершает направленного перемещения.

Из приведенных рассуждений следует, что коллектив типа $(1, 1)$ в наихудшем случае не совершает направленного перемещения в среде E.

Пусть $\mathscr{A} = (A_1, A_2, A_3)$, т. е. коллектив имеет тип $(1, 2)$. Поведение этого коллектива изображено на рис. 5. Для камней A_2 и A_3 указаны только их индексы. С целью упрощения рисунка на нем не изображено поддерево, соответствующее стратегии, в которой в начальной вершине остается камень A_2, а камень A_3 перемещается вместе с автоматом A_1. Это поддерево изоморфно поддереву, порожденному вершинами $\{1, 6, \ldots, 17\}$, с точностью до замены A_2 на A_3.

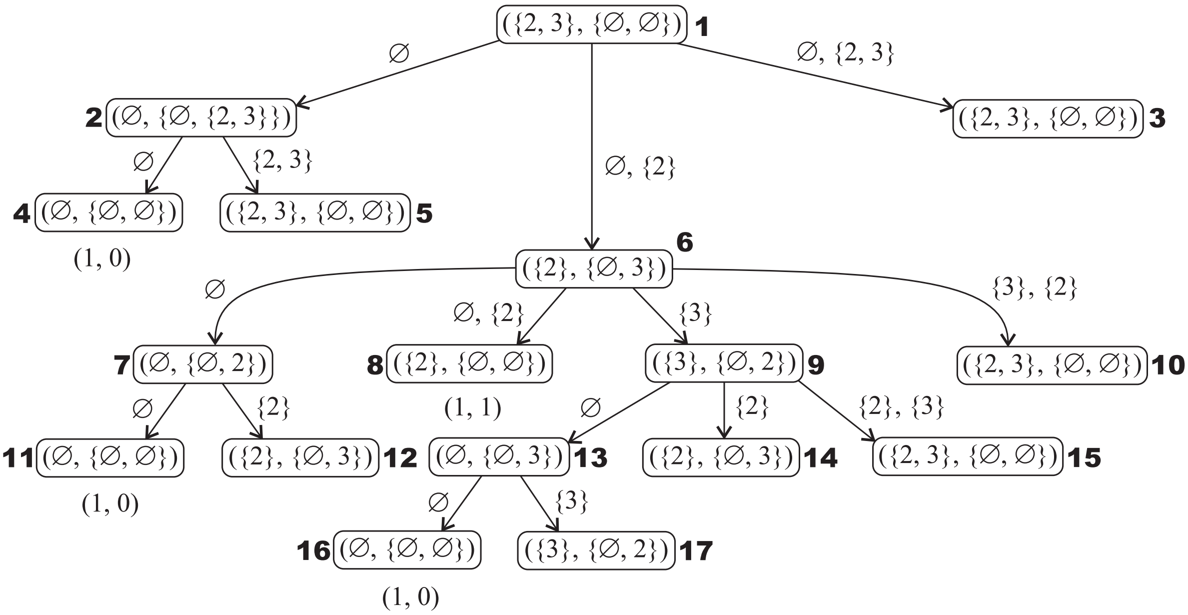

Рис. 5. Поведение коллектива типа $(1, 2)$

Рассмотрим возможные стратегии коллектива $\mathscr{A}$. Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 2, 4)$, заключается в следующем. Автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в начальной вершине и переходит в одну из вершин в ее окрестности. Затем A_1 переходит в ту вершину из окрестности текущей, в которой нет камней. После этого его вход становится равен $(\varnothing, \{\varnothing, \varnothing\})$. В наихудшем случае A_1 не сможет вернуться к камням и поэтому, как показано ранее, не сможет совершать направленного перемещения.

Следуя стратегии $(1, 2, 5)$, автомат A_1 оставляет камни в начальной вершине и далее перемещается из неё в вершины из её окрестности и обратно. Ясно, что в этом случае коллектив (A_1, A_2, A_3) не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 3)$, заключается в том, что автоматы A_1, A_2 и A_3 всегда перемещаются вместе. В этом случае коллектив (A_1, A_2, A_3) перемещается как автомат A_1 и, как показано выше, в наихудшем случае не совершает направленного перемещения.

Следуя стратегии $(1, 6, 7, 11)$, автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в соседних вершинах и далее перемещается так, что в наихудшем случае не возвращается к камням. Так как автомат более не может взаимодействовать с камнями, то он ведет себя как коллектив типа $(1, 0)$ и, как показано ранее, не совершает направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности вершин $(1, 6, 8)$, заключается в том, что автомат A_1 оставляет камень A_3 в начальной вершине и, перемещаясь вместе с камнем A_2, теряет A_3

из вида. В наихудшем случае автоматы A_1 и A_2 больше не вернутся к A_3. Следовательно, они будут вести себя как коллектив типа $(1,1)$, который, как показано ранее, не совершает направленного перемещения.

Следуя стратегии $(1,6,9,13,16)$, автомат A_1, в конце концов, теряет из виду камни и ведет себя далее как коллектив $(1,0)$, т.е. не совершает направленного перемещения.

Стратегии, соответствующие последовательностям $(1,6,7,12)$, $(1,6,9,13,17)$ и $(1,6,9,14)$, заключаются в том, что автомат A_1 оставляет камни A_2 и A_3 в соседних вершинах, а затем перемещается в окрестностях этих вершин не покидая ограниченного отрезка среды E. Ясно, что в этом случае коллектив не совершает равномерного направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности $(1,6,9,15)$, заключается в повторении следующей последовательности действий: автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с автоматом A_2 переходит в соседнюю с ней вершину; автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_3; автоматы A_1 и A_3 вместе переходят в вершину, в которой находится камень A_2. Перемещения коллектива $\mathscr{A} = (A_1, A_2, A_3)$ при использовании этой стратегии изображены на рис. 6.

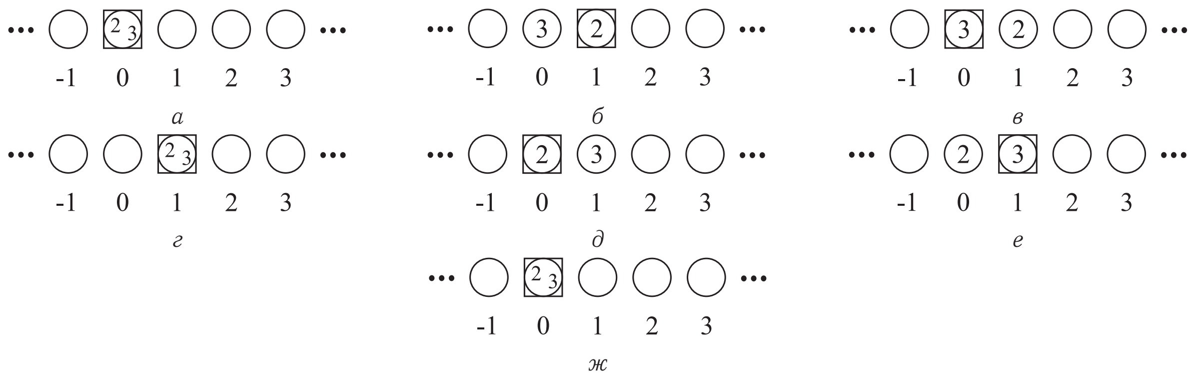

Рис. 6. Перемещения коллектива типа $(1,2)$ при использовании стратегии $(1,6,9,15)$

Пусть в начальный момент времени коллектив $\mathscr{A}$ находится в вершине 0 (рис. 6, *а*). Автомат A_1 оставляет камень A_3 в этой вершине и вместе с камнем A_2 перемещается в одну из соседних с ней вершин, например в вершину 1 (рис. 6, *б*). Затем автомат A_1 оставляет камень A_2 в этой вершине и переходит в вершину 0, в которой находится камень A_3 (рис. 6, *в*). После этого автомат A_1 и камень A_3 вместе переходят в вершину 1, в которой расположен камень A_2 (рис. 6, *г*). На следующем шаге автомат A_1 и камень A_2 вновь должны перейти в вершину, соседнюю с текущей. Таких вершин две — 0 и 2. Поскольку коллектив $\mathscr{A}$ не имеет компаса, то его члены не могут различить эти вершины. Поэтому в худшем случае автомат A_1 и камень A_2 переместятся в вершину 0 (рис. 6, *д*). Повторяя последовательность действий, предписанную используемой стратегией, коллектив $\mathscr{A}$, в конце концов, вновь окажется в вершине 0 (рис. 6, *е*, *ж*). В худшем случае коллектив будет перемещаться в окрестности вершины 0 на протяжении сколь угодно большого промежутка времени. Таким образом, следуя стратегии $(1,6,9,15)$, коллектив типа $(1,2)$ в худшем случае не совершает равномерного направленного перемещения.

Стратегия, соответствующая последовательности $(1,6,10)$, заключается в том, что автомат A_1 вместе с камнем A_2 перемещаются в окрестности вершины, в которой установлен камень A_3. Ясно, что в этом случае коллектив $\mathscr{A}$ не совершает равномерного направленного перемещения.

Из приведенных рассуждений следует, что коллектив типа $(1,2)$ в наихудшем случае не совершает равномерного направленного перемещения в среде E.

Покажем, что для коллектива $\mathscr{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ (т. е. коллектива типа $(1,3)$) существует стратегия, обеспечивающая его равномерное направленное перемещение в среде E. Эта стратегия представлена на рис. 7. Здесь последовательность вершин $(1,2,3)$ соответствует поведению коллектива при первоначальной расстановке камней в вершинах среды E, а последовательность вершин $(3,4,5,6,8)$ – его поведению при перемещении по среде, сопровождающемся переносом камней из вершины в вершину.

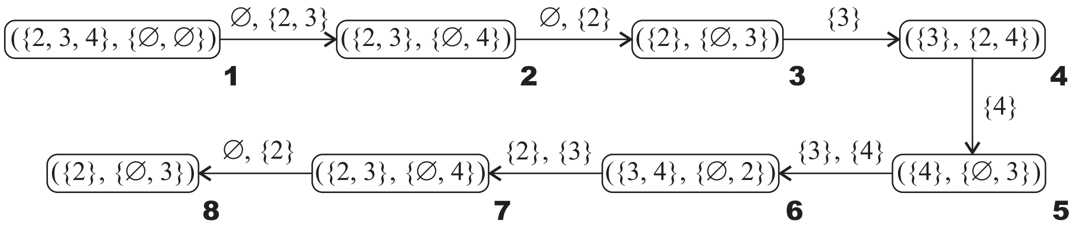

Рис. 7. Фрагмент поведения коллектива типа $(1, 3)$

Стратегия заключается в исполнении следующего алгоритма. Первоначально автомат A_1 и камни A_2, A_3, A_4 установлены в одной и той же вершине среды E.

Шаг 1. Автомат A_1 оставляет камень A_4 в текущей вершине и вместе с камнями A_2, A_3 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней.

Шаг 2. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с камнем A_2 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней.

Шаг 3. Автомат A_1 оставляет камень A_2 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_3.

Шаг 4. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и переходит в вершину, в которой находится камень A_4.

Шаг 5. Автомат A_1 вместе с камнем A_4 переходит в вершину, в которой находится камень A_3.

Шаг 6. Автомат A_1 оставляет камень A_4 в текущей вершине и вместе с камнем A_3 переходит в вершину, в которой находится камень A_2.

Шаг 7. Автомат A_1 оставляет камень A_3 в текущей вершине и вместе с камнем A_2 переходит в соседнюю с ней вершину, в которой нет камней. Перейти к шагу 3.

Покажем, что данная стратегия действительно приводит к равномерному направленному перемещению коллектива $\mathscr{A}$. На рисунке 8 изображены перемещения коллектива при использовании им этой стратегии.

Пусть коллектив $\mathscr{A}$ в момент времени $t = 0$ расположен в вершине 0 (рис. 8, *а*). В окрестности этой вершины находятся вершины -1 и 1 и в этих вершинах нет камней. Автомат A_1 случайным образом выбирает одну из этих вершин и перемещается в нее вместе с камнями A_2 и A_3, а камень A_4 остается в вершине 0. Этим случайным выбором задается направление, в котором будет перемещаться коллектив. Пусть автомат и камни переместились в вершину 1 (рис. 8, *б*). В окрестности этой вершины только в вершине 2 нет камней, т.е. выбор автоматом A_1 вершины для перемещения детерминирован. Камень A_3 остается в вершине 1, а автомат A_1 и камень A_2 перемещаются в вершину 2 (рис. 8, *в*). Первоначальная расстановка камней окончена и автомат A_1 возвращается в вершину 0, последовательно проходя вершины, в которых установлены камни A_2, A_3, A_4 (рис. 8, *в*–*д*).

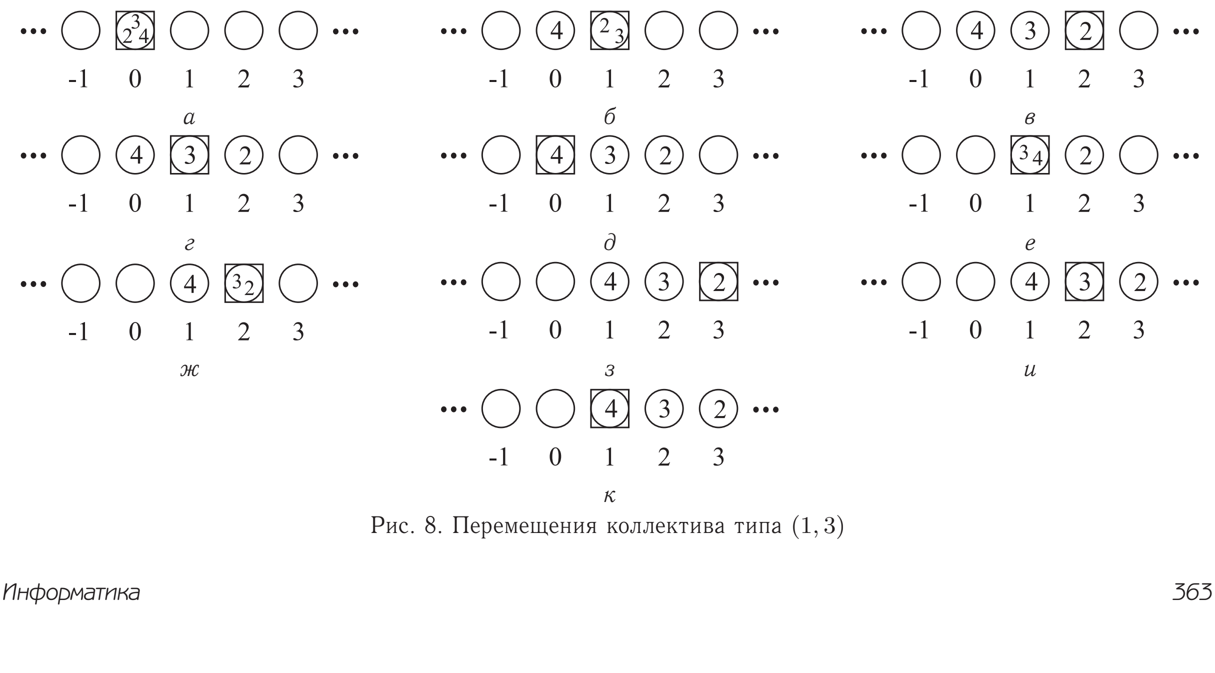

Рис. 8. Перемещения коллектива типа $(1, 3)$

Итак, в момент времени $t = 4$ коллектив $\mathscr{A}$ расположен в вершинах 0, 1, 2, его диаметр $d_{\mathscr{A}}$ равен 2, его координата $v_{\mathscr{A}}(t)$ равна 3/4 (рис. 8, *д*). Следуя предписаниям алгоритма, автомат A_1 вместе с камнем A_4 переходят в вершину, в которой находится камень A_3 (рис. 8, *е*). Далее, автомат A_1 и камень A_3 перемещаются в вершину, в которой расположен камень A_2 (рис. 8, *ж*). Только в одной вершине в окрестности этой вершины нет камней. Поэтому A_1 и A_2 перемещаются в эту вершину (рис. 8, *з*). После этого автомат A_1 возвращается в вершину, в которой находится камень A_4 (рис. 8, *з–к*). Все эти действия занимают 5 единиц времени. Как видно из рисунка 8, *к*, в момент времени $t = 4 + 5 = 9$ коллектив $\mathscr{A}$ располагается в вершинах 1, 2, 3, его диаметр $d_{\mathscr{A}}$ равен 2, его координата $v_{\mathscr{A}}(9)$ равна $7/4$. Так как все перемещения коллектива детерминированы, то в момент времени $4 + 5k$, $k \in \mathrm{N}$, он будет занимать вершины k, $k + 1$, $k + 2$, его диаметр $d_{\mathscr{A}}$ будет равен 2, а его координата $v_{\mathscr{A}}(4 + 5k)$ будет равна $3/4 + k$. Следовательно, при следовании описанной выше стратегии коллектив типа $(1, 3)$ совершает равномерное направленное перемещение.

Теорема доказана. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых коллектив, состоящий из автомата и конечного набора камней, сохраняет направленное перемещение в среде, представляющей собой одномерную целочисленную решетку. Работа закладывает основы для дальнейших исследований поведения коллективов автоматов без компаса в дискретных топологических средах.

Библиографический список

1. *Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б.* Теория хранения и поиска информации. М. : Физматлит, 2002. 288 с.
2. *Капитонова Ю. В., Кривой С. Л., Летичевский А. А., Луцкий Г. М.* Лекции по дискретной математике. СПб. : БХВ-Петербург, 2004. 624 с.
3. *Novikov D. A.* Cybernetics: From Past to Future. Springer, 2016. 115 p.
4. *Kline R. R.* The Cybernetics Moment : Or Why We Call Our Age the Information Age. Baltimore, Maryland : Johns Hopkins Univ. Press, 2015. 352 p.
5. *Shannon Cl. E.* Presentation of a maze-solving machine // Cybernetics: Circular, Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems: Transactions of VIII Conference. N. Y. : Josiah Macy Jr. Foundation, 1952. P. 169–181.
6. *Глушков В. М., Летичевский А. А.* Теория дискретных преобразователей // Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск : Наука, 1973. С. 5–39.
7. *Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С.* Введение в теорию автоматов. М. : Наука, 1985. 320 с.
8. *Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М.* Независимые системы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 2. С. 3–39. DOI: 10.1515/156939203322385847.
9. *Килибарда Г., Кудрявцев В. Б., Ушчумлич Ш. М.* Коллективы автоматов в лабиринтах // Дискретная математика. 2003. Т. 15, вып. 3. С. 3–39. DOI: 10.1515/156939203322694736.
10. *Стаматович Б.* Распознавание односвязных цифр автоматом // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 3, вып. 3–4. С. 281–305.
11. *Стаматович Б.* Распознавание двусвязных цифр коллективом автоматов // Интеллектуальные системы. 1998. Т. 4, вып. 1–2. С. 321–337.
12. *Деглина Ю. Б., Козловский В. А., Костогрыз К. А.* Автоматное распознавание оцифрованных многоугольников // Искусственный интеллект. 2004. № 3. С. 443–452.
13. *Dudek G., Jenkin M.* Computational Principles of Mobile Robotics. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010, 406 p.
14. *Blum M., Kozen D.* On the Power of the Compass // SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. IEEE Computer Society Washington, 1978. P. 132–142. DOI: 10.1109/SFCS.1978.30.
15. *Donald B. R.* The Compass That Steered Robotics // Logic and Program Semantics. Springer, 2012. P. 50–65. DOI: 10.1007/978-3-642-29485-3-5.
16. *Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R.* Traversing Directed Eulerian Mazes // J. Graph Algorithms and Appl. 2002. Vol. 6, № 2. P. 157–173. DOI: 10.7155/jgaa.00049
17. *Бабичев А. В.* Ориентирование в лабиринте // Автоматика и телемеханика. 2008. Вып. 2. С. 135–145. DOI: 10.1134/S0005117908020100.

Образец для цитирования:

Курганский А. Н., Сапунов С. В. О направленном перемещении коллектива автоматов без компаса на одномерной целочисленной решетке // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 356–365. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365.

On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice

O. M. Kurganskyy[1], S. V. Sapunov[2]

[1]Oleksiy M. Kurganskyy, State Institution «Institute of Applied Mathematics and Mechanics», 74, Rosa Luxemburg st., 83114, Donetsk, Ukraine, kurgansk@iamm.su

[2]Sergey V. Sapunov, Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, 1, Dobrovolskogo st., 84100, Slavyansk, Donetskaya obl., Ukraine, sapunov_sv@yahoo.com

A collective of finite automata has to preserve unidirectional movement on one-dimensional integer lattice whose elements (vertices) are unlabelled. The automata does not distinguish between equally labelled vertices by their coordinates of direction (that means each automaton has no compass). We considered collectives consisting of an automaton and some pebbles, i.e. automata of the simplest form, whose positions are completely determined by automaton. We prove that a collective of automaton and a maximum of 2 pebbles cannot maintain movement direction on the one-dimensional integer lattice, but collective of automaton and 3 pebbles can.

Key words: collectives of automata, labyrinth, unidirectional movement.

References

1. Gasanov E. E., Kudryavtsev V. B. *Teoriya hraneniya i poiska informatsii* [The theory of information storage and retrieval]. Moscow, Fizmatlit, 2002, 288 p. (in Russian).
2. Kapitonova Yu. V., Krivoy S. L., Letichevsky A. A., Lutskiy G. M. *Lektsii po diskretnoy matematike* [Lectures on discrete mathematics]. Saint Petersburg, BHV-Petersburg, 2004, 624 p. (in Russian).
3. Novikov D. A. *Cybernetics : From Past to Future*. Springer, 2016. 115 p.
4. Kline R. R. *The Cybernetics Moment : Or Why We Call Our Age the Information Age*. Baltimore, Maryland, Johns Hopkins Univ. Press, 2015, 352 p.
5. Shannon Cl. E. Presentation of a maze-solving machine. *Cybernetics : Circular, Causal and Feedback Mechanisms in Biological and Social Systems: Transactions of VIII Conference*. New York, Josiah Macy Jr. Foundation, 1952, pp. 169–181
6. Glushkov V. M., Letichevsky A. A. *Teoriya diskretnyih preobrazovateley* [The theory of discrete converters]. *Izbrannyie voprosyi algebryi i logiki* [Selected problems of algebra and logic]. Novosibirsk, Nauka, 1973, pp. 5–39 (in Russian).
7. Kudryavtsev V. B., Aleshin S. V., Podkolzin A. S. *Vvedenie v teoriyu avtomatov* [Introduction to Automata Theory]. Moscow, Nauka, 1985, 320 p. (in Russian).
8. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ušćumlić Š. Independent systems of automata in labyrinths. *Discrete Math. and Appl.*, 2003, vol. 13, iss. 3, pp. 221–255. DOI: 10.1515/156939203322385847.
9. Kilibarda G., Kudryavtsev V. B., Ušćumlić Š. Collectives of automata in labyrinths. *Discrete Math. and Appl.*, 2003, vol. 13, iss. 5, pp. 429–466. DOI: 10.1515/156939203322694736.
10. Stamatovich B. Recognizing simply connected numerals by automata. *Intelligent systems*, 1998, vol. 3, iss. 3–4, pp. 281–305 (in Russian).
11. Stamatovich B. Recognizing doubly connected numerals by collectives of automata. *Intelligent systems*, 1998, vol. 4, iss. 1–2, pp. 321–337 (in Russian).
12. Deglina Yu. B., Kozlovskii V. A., Kostogryz K. A. Automata recognition of digitized polygons. *Artificial Intelligence*, 2004, no. 3, pp. 443–452 (in Russian).
13. Dudek G., Jenkin M. *Computational Principles of Mobile Robotics.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2010, 406 p.
14. Blum M., Kozen D. On the Power of the Compass. *SFCS '78 Proc. 19th Annu. Symp. Found. Comput. Sci.* IEEE Computer Society Washington, 1978, pp. 132–142. DOI: 10.1109/SFCS.1978.30.
15. Donald B. R. The Compass That Steered Robotics. *Logic and Program Semantics.* Springer, 2012, pp. 50–65. DOI: 10.1007/978-3-642-29485-3-5.
16. Bhatt S., Even S., Greenberg D., Tayar R. Traversing Directed Eulerian Mazes. *J. Graph Algorithms and Appl.*, 2002, vol. 6, no. 2, pp. 157–173. DOI: 10.7155/jgaa.00049.
17. Babichev A. V. Orientation in a maze. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, iss. 2, pp. 299–309. DOI: 10.1134/S0005117908020100.

Please cite this article in press as:
Kurganskyy O. M., Sapunov S. V. On the Directional Movement of a Collective of Automata without a Compass on a One-dimensional Integer Lattice. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2016, vol. 16, iss. 3, pp. 356–365 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-356-365.