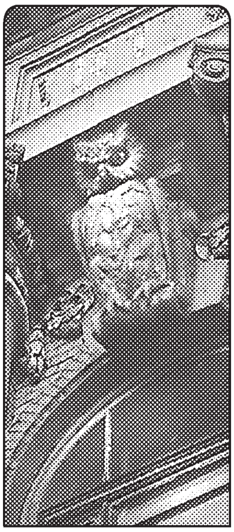

НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный педагогичесий университет им. Абая, Алматы, Казахстан, aldash51@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методами теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены.

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных синулярных интегральных уравнений.

В работе используется метод, предложенный в работах автора, и показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: многомерное уравнение, локальная задача, функция Бесселя.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-365-371

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены в [1–3].

В данной работе для локальной краевой задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа найден явный вид классического решения и получен критерий единственности регулярного решения. В работе используется метод, предложенный в работах [4, 5].

Пусть D_α — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α, обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим многомерное уравнение Лапласа:

$$\Delta_x u + u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

Рассмотрим следующую локальную краевую задачу.

Задача 1. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D_α *из класса* $C(\bar{D_\alpha}) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, *удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u\Big|_{S_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \qquad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta), \qquad (\beta u + \gamma u_t)\Big|_{S_0} = \varphi_2(r,\theta), \tag{2}$$

где β, $\gamma = \mathrm{const}$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, *которая является обобщением задач Дирихле* ($\gamma = 0$) *и Пуанкаре* ($\beta = 0$), *исследованных в [6–8], при этом* $\varphi_1(1,\theta) = \psi(\alpha,\theta)$.

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W^l_2(S_0)$, $l = 0, 1, \ldots$, — пространства Соболева.

Имеет место следующая лемма [9].

Лемма 1. *Пусть* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, $l \geqslant m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Лемма 2. *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяли неравенствам*

$$|f^1_0(r)| \leqslant c_1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f^k_n(r)|^2 \leqslant c_2, \qquad c_1,\, c_2 = \mathrm{const}.$$

Обозначим через $\bar\varphi^k_{1n}(r)$, $\psi^k_n(t)$, $\bar\varphi^k_{2n}(r)$ коэффициенты разложения ряда (3) соответственно функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(r,\theta) \in W^l_2(S_\alpha)$, $\psi(t,\theta) \in W^l_2(\Gamma_\alpha)$, $\varphi_2(r,\theta) \in W^l_2(S_0)$, $l > 3m/2$ *и*

$$\beta \,\mathrm{th}\, \mu_{s,n}\alpha \neq \mu_{s,n}\gamma, \qquad s = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

тогда задача 1 однозначно разрешима. Здесь $\mu_{s,n}$ *— положительные нули функций Бесселя первого рода* $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. *Решение задачи 1 единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4).

Заметим, что если $\beta = 0$ или $\gamma = 0$, то соотношение (4) выполняется всегда. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), \qquad g_1 = 1, \qquad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \qquad j > 1.$$

Известно [9], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5) и используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ [9], будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k+\bar{u}_{ntt}^k=0, \qquad k=\overline{1,k_n}, \qquad n=0,1,\dots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (2) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\begin{gathered}\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r), \qquad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t), \qquad \overline{\varphi}_{1n}^k(r),\\ \beta\bar{u}_n^k(r,0)+\gamma\bar{u}_{nt}^k(r,0)=\overline{\varphi}_{2n}^k(r), \qquad k=\overline{1,k_n}, \qquad n=0,1,\dots .\end{gathered} \tag{8}$$

В (7), (8), произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\overline{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$, получим:

$$\upsilon_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\overline{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\overline{\upsilon}_n^k+\overline{\upsilon}_{ntt}^k=\overline{f}_n^k(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r), \qquad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0, \qquad \beta\bar{\upsilon}_n^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0)=\varphi_{2n}^k(r), \tag{10}$$

$$\overline{f}_n^k(r,t)=-\psi_{ntt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k, \qquad \varphi_{1n}^k(r)=\overline{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_n^k(\alpha),$$

$$\varphi_{2n}^k(r)=\overline{\varphi}_{2n}^k(r)-\beta\psi_n^k(0)-\gamma\psi_{nt}^k(0), \qquad k=\overline{1,k_n}, \qquad n=0,1,\dots .$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (9), (10) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k+\upsilon_{ntt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \qquad \upsilon_n^k(1,t)=0, \qquad \beta\upsilon_n^k(r,0)+\gamma\upsilon_{nt}^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{(m-1)(3-m)-4\lambda_n}{4}, \qquad f_n^k(r,t)=r^{(m-1)/2}\overline{f}_n^k(r,t),$$

$$\tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\varphi_{1n}^k(r), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (11), (12) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{13}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0, \qquad \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \qquad \beta\upsilon_{1n}^k(r,0)+\gamma\upsilon_{1nt}^k(r,0)=0, \tag{15}$$

$\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{16}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r), \qquad \upsilon_{2n}^k(1,t)=0, \qquad \beta\upsilon_{2n}^k(r,0)+\gamma\upsilon_{2nt}^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r). \tag{17}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{18}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r), \qquad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}R_s(r). \tag{19}$$

Подставляя (18) в (14), (15), с учетом (19) получим:

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \qquad 0 < r < 1, \tag{20}$$

$$R_s(1) = 0, \qquad |R_s(0)| < \infty, \tag{21}$$

$$T_{stt} - \mu T_s = a_{s,n}(t), \qquad 0 < t < \alpha, \tag{22}$$

$$T_s(\alpha) = 0, \qquad \beta T_s(0) + \gamma T_{st}(0) = 0. \tag{23}$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является [10]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $\nu = n + (m-2)/2$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Обще решение уравнения (22) представимо в виде [10]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t - \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^t a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi + \frac{sh \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi, \tag{25}$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив (25) условию (23), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha = -\dfrac{\operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi \, d\xi + \dfrac{\operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}} \int\limits_0^\alpha a_{ns}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi \, d\xi, \\ \beta c_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c_{2s} = 0, \end{cases} \tag{26}$$

которая имеет единственное решение, если выполняется условие (4).

Подставляя (24) в (19), получим:

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{ns}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{ns} J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-1/2} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^\infty e_{ns} J_\nu(\mu_{s,n} r), \qquad 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{27}$$

Ряды (27) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [11], если

$$a_{ns}(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) \, d\xi, \tag{28}$$

$$b_{ns} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) \, d\xi, \tag{29}$$

$$e_{ns} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) \, d\xi, \tag{30}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$, — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величин.

Из (24), (25) получим решение задачи (14), (15) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{31}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется формулой (25), в которой $a_{ns}(t)$ и c_{1s}, c_{2s} задаются формулами (28) и (26) соответственно.

Далее, подставляя (24) в (16) и (17), с учетом (19) получим следующую задачу:

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0, \tag{32}$$

$$V_s(\alpha) = b_{ns}, \qquad \beta V_s(0) + \gamma V_{st}(0) = e_{ns}. \tag{33}$$

Общее решение уравнения (32) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t, \tag{34}$$

c'_{1s}, c'_{2s} — произвольные постоянные. Удовлетворив (34) условию (33), получим:

$$\begin{cases} c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n}\alpha + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n}\alpha = b_{ns}, \\ \beta c'_{1s} + \gamma \mu_{s,n} c'_{2s} = e_{ns}. \end{cases} \tag{35}$$

Из (24), (34) будем иметь:

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_s(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{36}$$

где b_{ns}, e_{ns}, c'_{1s}, c'_{2s} — находятся из (29), (30), (35).

Таким образом, из (6), (13) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{(m-1)/2} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{37}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (31), (36).

Используя формулы [11] $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$ и

$$|J_\nu(z)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \tag{38}$$

решение (37) можно оценить как степенной ряд.

Далее, учитывая условия на заданные функций $\varphi_1(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, леммы 1, 2, оценки

$$|k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \qquad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \qquad j = \overline{1, m-1}, \qquad q = 0, 1, \ldots, \tag{39}$$

и используя интегральный признак Коши, можно показать, что ряд (37) и ряды, получающиеся из него путем дифференцирования по r и t, сходятся равномерно и абсолютно.

Это означает, что искомое решение в виде (37) принадлежит классу $C(\bar{D}_\alpha) \cap C^1(D_\alpha \cup S_0) \cap C^2(D_\alpha)$, если $l > 3m/2$. Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (4), то из теоремы 1 вытекает единственность решения задачи 1.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = p$. Тогда нетривиальным решением однородной задачи, соответствующей задаче 1, является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-l} r^{(2-m)/2} \left(\beta \operatorname{sh} \mu_{p,n} t - \gamma \mu_{p,n} \operatorname{ch} \mu_{p,n} t \right) J_{n+\frac{m-2}{2}}(r),$$

при этом из оценок (38), (39) следует, что она принадлежит искомому классу, если $l > 3m/2$. □

Библиографический список

1. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О задаче с косой производной в области с кусочно-гладкой границей // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, № 3. С. 102–103.
2. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Тр. семинара С. Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69–102.

3. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений частными производными в негладких областях // УМН. 1983. Т. 38, вып. 2(230). С. 3–76.
4. *Алдашев С. А.* О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 9, № 1. С. 3–8.
5. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы : Гылым, 1994. 170 с.
6. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 3–7.
7. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2012. Т. 12, вып. 1. С. 7–13.
8. *Алдашев С. А.* Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. НАН РК. Сер. физ.-матем. Алматы, 2014. № 3. С. 62–67.
9. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. : Физматгиз, 1962. 254 с.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1965. 703 с.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции : в 3 т. Т. 2. М. : Наука, 1974. 295 с.

Correctness of the Local Boundary Value Problem in a Cylindrical Domain for Laplace's Many-dimensional Equation

S. A. Aldashev

Aldashev Serik Aimurzaevich, Kazakh National Pedagogical University, 114, prosp. Dostyk, 480100, Almaty, Kazakhstan, aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analitic function theory of complex variable.

There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lock of any complete theory of multidimensional singular integral equations.

In the paper, using authors early methods we prove a unique solvability of the local boundary value problem in the cylindric domain for a Laplace's many-dimensional equation which is a generalization of the Dirichlet and Poincare problems. besides, the criterion of uniqueness of the regular solution is obtained.

Key words: many-dimensional equation, local problem, domain, Bessel's function.

References

1. Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A. Problems with oblique derivatives in regions with piecewise smooth boundaries. *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, no. 3, pp. 256–258.
2. Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A. Schauder estimates of solutions of elliptic boundary value problems in domains with edges on the boundary. *Partial Differential Equations (Proc. Sem. S. L. Sobolev, 1978, No. 2)*, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1978, pp. 69–102 (in Russian); English transl.: Am. Math. Soc. Transl. 1984, vol. 123, pp. 141–169.
3. Kondratyev V. A., Oleinik O. A. Boundary-value problems for partial differential equations in non-smooth domains. *Russian Math. Surveys*, 1983, vol. 38, iss. 2 (230), pp. 3–76. DOI: 10.1070/RM1983v038n02ABEH003470.
4. Aldashev S. A. Some Local and Nonlocal Boundary Value Problems for Wayw Equation. Differential Equations, 1983, vol. 9, no. 1, pp. 3–8 (in Russian).
5. Aldashev S. A. Kraevye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii [Boundary Value Problems for Many-dimensional Hyperbolic and Hybrid Equations]. Almaty, Gylym, 1994, 170 p. (in Russian).
6. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindric Domain for Laplace's Many-dimensional Equation. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 3–7 (in Russian).
7. Aldashev S. A. Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindric Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations. *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 7–13 (in Russian).

8. Aldashev S. A. Correctness of Poincare's Problem in a Cylindric Domain for Laplace's Many-dimensional Equation. *Izvestiia NAN RK. Ser. fiziko-matematicheskaia* [Proc. NAN RK. Ser. Physics and Mathematics], Almaty, 2014, no. 3, pp. 62–67 (in Russian).
9. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Many-dimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Physmathgiz, 1962, 254 p. (in Russian).
10. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
11. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka, 1974, 295 p. (in Russian).

УДК 512

О КВАЗИМНОГОЧЛЕНАХ КАПЕЛЛИ

С. Ю. Антонов[1], **А. В. Антонова**[2]

[1]Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе рассматривается класс многочленов типа Капелли в свободной ассоциативной алгебре $F\{Z\}$, где F — произвольное поле, Z — счетное множество. Интерес к этим объектам связан с предположением о том, что введенные многочлены (квазимногочлены Капелли) некоторой нечетной степени будут содержаться в базисе идеала Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$, когда $\operatorname{char} F = 0$. В связи с этим в статье приведены основные свойства квазимногочленов Капелли. В частности, указаны разложения этих многочленов через многочлены того же вида и установлены некоторые соотношения между их T-идеалами. Кроме того, опираясь на некоторые полученные свойства квазимногочленов Капелли, а также на теорему Ченга, мы показываем, что все квазимногочлены Капелли четной степени $2n$ $(n > 1)$ являются следствием стандартного многочлена S_n^- в случае, когда характеристика поля F не равна двум. Наконец, мы находим наименьшее $n \in N$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли четной степени $2n$ принадлежит идеалу тождеств матричной алгебры $M_m(F)$.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, m, k — любые натуральные числа. Описание идеала Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ представляет большой интерес для теории PI-алгебр. Решение этой задачи при $m = 2$, $k = 1$, $\operatorname{char} F = 0$ приведено в [1]. В [2] найдена наименьшая степень тождеств нечетной компоненты $M_1^{(m,k)}(F)$ Z_2-градуированной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ и доказано, что двойной многочлен Капелли C_{2n-1} является минимальным тождеством этого подпространства. В [3] выдвинута гипотеза о том, что многочлен C_{2n-1} есть следствие более простых тождеств, причем для двух из них указан явный вид и приведены некоторые их свойства.

В данной работе мы продолжаем изучение этих многочленов, вводим новые объекты того же типа и устанавливаем некоторые соотношения между их T-идеалами, что представляет интерес в связи с нахождением базиса тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КАПЕЛЛИ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, которое представим в виде $Z = X \bigcup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — непересекающиеся множества, $\{d\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный