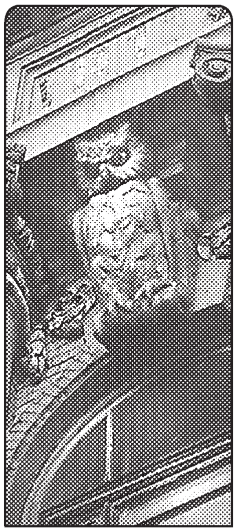



# МАТЕМАТИКА

УДК 517.98, 517.51

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ БАЗИСЫ СДВИГОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

**Т. П. Лукашенко**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, lukashenko@mail.ru

В конечномерных пространствах комплексных или действительных тригонометрических многочленов изучаются ортонормированные базисы из последовательных сдвигов одного или нескольких многочленов. Показано, что базис из сдвигов одного многочлена существует в пространстве комплексных многочленов с номерами компонент от $m$ до $n$ на $\mathbb{Z}$, а также в пространстве действительных многочленов с номерами компонент от $0$ до $n$. Указан общий вид таких базисов. Показано, что в любом пространстве есть ортоподобная система (фрейм Парсеваля) из сдвигов одного многочлена. Найдены пространства, где нет базиса из сдвигов одного многочлена, но есть базисы из сдвигов двух многочленов.

*Ключевые слова:* тригонометрические многочлены, ортонормированные базисы сдвигов, ортоподобные системы сдвигов, фреймы сдвигов.

В последнее десятилетие при приближении и представлении функций широкое применение получили системы сдвигов и сжатий функций. Такие системы получаются из одной функции (или нескольких) сдвигами и сжатиями. Существует целая теория построения таким способом различных базисов, систем представления и анализа функций — теория всплесков (или вейвлетов), см. [1]. Такие системы используется в приложениях и компьютерной математике. Здесь рассматривается вопрос об ортогональных базисах из последовательных сдвигов одной или нескольких функций в некоторых пространствах тригонометрических многочленов, что может быть интересно не только с точки зрения теории, но и приложений. Рассматривается также вопрос об ортоподобных системах (фреймах Парсеваля) в тех же пространствах. Некоторые результаты данной статьи были представлены в [2].

Обозначим через $\mathbb{T}_Q$, где $Q$ — непустое конечное подмножество $\mathbb{Z}$, пространство комплексных тригонометрических многочленов:

$$T_Q(x) = \sum_{k\in Q} c_k e^{ikx},$$

где $c_k \in \mathbb{C}$.

Введем ядро

$$\boldsymbol{D}_Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|Q|}} \sum_{k\in Q} e^{i(kx-s_k)} \tag{1}$$

с покомпонентными сдвигами $s_k \in \mathbb{R}$, $k \in Q$, где $|Q|$ — количество элементов $Q$. Очевидно $\|\boldsymbol{D}_Q(x)\| = 1$ в пространстве Лебега $\mathrm{L}^2[0, 2\pi]$.

**Теорема 1.** *В пространстве комплексных тригонометрических многочленов* $\mathbb{T}_{[m,n]}$, *где* $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \leqslant n$, $[m,n] = \{k \in \mathbb{Z}:\ m \leqslant k \leqslant n\}$, *система сдвигов ядер* $\boldsymbol{D}_{[m,n]}(x)$

$$\boldsymbol{D}_{[m,n]}\left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1}j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}}\sum_{k=m}^{n} e^{i\left(k\left(x-\frac{2\pi r}{n-m+1}j\right)-s_k\right)}, \tag{2}$$

*где* $r \in \mathbb{Z}$ *и не имеет общих делителей с* $n-m+1$, $j = 0,1,\ldots,n-m$, *образует ортонормированный базис.*

*Любой ортонормированный базис в* $\mathbb{T}_{[m,n]}$, *состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена,* $\{T(x-j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *имеет вид* (2) *для некоторых покомпонентных сдвигов* $s_k \in \mathbb{R}$, $k \in Q$, *и некоторого* $r \in \mathbb{Z}$, *не имеющего общих делителей с* $n-m+1$.

**Доказательство.** Для доказательства ортогональности системы сдвигов ядра $\boldsymbol{D}_{[m,n]}(x)$ покажем, что ядра $\boldsymbol{D}_{[m,n]}(x)$ и $\boldsymbol{D}_{[m,n]}\left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1}j\right)$, $j = 1,\ldots,n-m$, ортогональны на $[0,2\pi]$. Действительно, используя ортогональность тригонометрической системы на $[0,2\pi]$, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{D}_{[m,n]}(x)\overline{\boldsymbol{D}_{[m,n]}}\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1}j\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}}\sum_{k=m}^{n} e^{i(kx-s_k)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}}\sum_{k=m}^{n} e^{-i\left(k\left(x-\frac{2\pi r}{n-m+1}j\right)-s_k\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi(n-m+1)}\int_0^{2\pi}\sum_{k=m}^{n} e^{i\frac{2\pi rjk}{n-m+1}}dx = \frac{e^{i\frac{2\pi r(n+1)j}{n-m+1}} - e^{i\frac{2\pi rmj}{n-m+1}}}{(n-m+1)\left(e^{i\frac{2\pi rj}{n-m+1}}-1\right)} = 0$$

в силу равенства

$$\frac{2\pi r(n+1)j}{n-m+1} = \frac{2\pi rmj}{n-m+1} \pmod{2\pi}.$$

Система последовательных сдвигов ядра $\boldsymbol{D}_{[m,n]}\left(x - \frac{2\pi r}{n-m+1}j\right)$, $j = 0,1,\ldots,n-m$, образует ортонормированную систему, она принадлежит пространству $\mathbb{T}_{[m,n]}$ и количество элементов в ней $n-m+1$, что совпадает с размерностью пространства $\mathbb{T}_{[m,n]}$. Значит, это ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$.

Покажем теперь, что любой ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, имеет вид (2). При $n = m$ это утверждение очевидно верно. Предположим, что $n > m$. Если $T(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} c_k e^{ikx}$ — тригонометрический многочлен, система сдвигов которого $\{T(x-j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, то система его сдвигов $\{T(x-j\alpha)\}_{j=1}^{n-m+1}$ также образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$ и, значит, выполняется равенство

$$T(x-(n-m+1)\alpha) = \sum_{k=m}^{n} c_k e^{ik(x-(n-m+1)\alpha)} = e^{iw}T(x) = e^{iw}\sum_{k=m}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{3}$$

где $w \in [0,2\pi)$. Из (3) следует, что выполняются равенства

$$k(x-(n-m+1)\alpha) = kx + w \pmod{2\pi}, \quad k = m,\ldots,n. \tag{4}$$

Вычитая из равенства (4) при $k = n$ равенство при $k = n-1$, получаем $(n-m+1)\alpha = 0 \pmod{2\pi}$, т. е. $\alpha = \frac{2\pi r}{n-m+1}$, $r \in \mathbb{Z}$. Поскольку многочлены $T(x-j\alpha)$ различны при $j = 0,1,\ldots,n-m$, т. е. $rj$ не делится на $n-m+1$ при $j = 1,\ldots,n-m$, то $r$ не имеет общих делителей с $n-m+1$.

Из (3) видно, что скалярное произведение $\left(e^{ikx}, T(x-j\alpha)\right) = 2\pi\overline{c_k}e^{ikj\alpha}$. По предположению система сдвигов $\{T(x-j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$, поэтому по равенству Парсеваля в пространстве Лебега $\mathrm{L}^2[0,2\pi]$

$$2\pi = \|e^{ikx}\|^2 = \sum_{j=0}^{n-m}\left|\left(e^{ikx}, T(x-j\alpha)\right)\right|^2 = (n-m+1)\left|2\pi\overline{c_k}\right|^2.$$

Значит, найдется такое $s_k \in \mathbb{R}$, что

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}} e^{-is_k}.$$

Тригонометрический многочлен $T(x)$ имеет вид (1) для $Q = [m, n] \subset \mathbb{Z}$, а система его последовательных сдвигов $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-m}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид (2) из теоремы 1. Теорема доказана.

Обозначим через $\mathscr{T}_D$, где $D$ — непустое конечное подмножество множества $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, пространство действительных тригонометрических многочленов вида

$$T_D(x) = \frac{a_0}{2}\chi_D(0) + \sum_{0<k\in D} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $a_k$, $b_k \in \mathbb{R}$, $\chi_D$ — характеристическая функция множества $D$. Действительные тригонометрические многочлены допускают запись в комплексной форме:

$$T_D(x) = \sum_{|k|\in D} c_k e^{ikx},$$

где коэффициенты $c_0 = \dfrac{a_0}{2}\chi_D(0)$, $c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2}$ при $0 < k \in D$.

Введем ядро

$$\mathscr{D}_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|D \cup -D|}} \sum_{|k|\in D} e^{i(kx - s_k)}$$

с покомпонентными сдвигами $s_k \in \mathbb{R}$, $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и с $s_{-k} = -s_k$, $k \in D$, где $|D \cup -D|$ — количество элементов множества $D \cup -D = \{k \in \mathbb{Z} : \ |k| \in D\}$. Очевидно, $\|\mathscr{D}_D(x)\| = 1$ в пространстве Лебега $\mathrm{L}^2[0, 2\pi]$.

**Теорема 2.** *В пространстве $\mathscr{T}_{[o,n]}$ действительных тригонометрических многочленов, где $n \in \mathbb{Z}^+$, $[0, n] = \{k \in \mathbb{Z} : \ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, система сдвигов ядер $\mathscr{D}_{[0,n]}(x)$:*

$$\mathscr{D}_{[0,n]}\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \left(\pm 1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos\left(k\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j\right) - s_k\right)\right), \tag{5}$$

*где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, образует ортонормированный базис.*

*Любой ортонормированный базис в $\mathscr{T}_{[0,n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного действительного многочлена $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет вид* (5) *с некоторыми $s_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$.*

**Доказательство.** Действительные тригонометрические многочлены (5) по теореме 1 образуют ортонормированную систему из $2n+1$ элемента, что совпадает с размерностью пространства $\mathscr{T}_{[o,n]}$. Следовательно, это ортонормированный базис $\mathscr{T}_{[o,n]}$.

Любой ортонормированный базис в $\mathscr{T}_{[0,n]}$, состоящий из последовательных сдвигов одного действительного многочлена $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, будет ортонормированным базисом и в $\mathbb{T}_{[-n,n]}$ и по теореме 1 имеет вид (2):

$$\boldsymbol{D}_{[m,n]}\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}} \sum_{k=-n}^{n} e^{i\left(k\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1} j\right) - s_k\right)}$$

для некоторых покомпонентных сдвигов $s_k \in \mathbb{R}$, $-n \leqslant k \leqslant n$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с $2n+1$. Так как это действительный многочлен, то $s_0 = 0$ или $s_0 = \pi$, и $s_{-k} = -s_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, т. е. многочлен имеет вид (5). Теорема 2 доказана.

Вопрос о существовании ортонормированных базисов в пространствах $\mathbb{T}_Q$ и $\mathscr{T}_D$, состоящих из последовательных сдвигов одного комплексного или соответственно одного действительного многочлена, сложен и зависит от структуры конечных множеств $Q \subset \mathbb{Z}$ и $D \subset \mathbb{Z}^+$. Приведем сначала несколько простых утверждений и следствий теорем 1 и 2.

**Утверждение 1.** *Пусть* $\mathbb{T}_Q$ *и* $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$ *— пространства комплексных тригонометрических многочленов, где* $Q$ *и* $\mathfrak{Q}$ *— непустые конечные подмножества* $\mathbb{Z}$*, причем* $\mathfrak{Q} = mQ + l = \{k: \ k = mq + l, \ q \in Q\}$*, где* $l$ *и* $m \neq 0$ *— целые числа. Если в* $\mathbb{T}_Q$ *существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена*

$$T(x) = \sum_{q \in Q} c_q e^{iqx} \tag{6}$$

*вида* $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, то в пространстве* $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$ *ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного комплексного многочлена*

$$\mathfrak{T}(x) = \sum_{q \in Q} c_q e^{i(mq+l)x} \tag{7}$$

*вида* $\{\mathfrak{T}(x - j\alpha/m)\}_{j=0}^{n}$*.*

*А если в пространстве* $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$ *существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена вида* (7) $\{\mathfrak{T}(x - j\beta)\}_{j=0}^{n}$*, то в пространстве* $\mathbb{T}_Q$ *ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного комплексного многочлена вида* (6) $\{T(x - jm\beta)\}_{j=0}^{n}$*.*

Действительно, размерности пространств $\mathbb{T}_Q$ и $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$ одинаковы, нормы многочленов и их попарная ортогональность при указанных преобразованиях сохраняются, поэтому приведенные системы одновременно будут ортонормированными базисами соответствующих пространств комплексных тригонометрических многочленов.

Из утверждения 1 и теоремы 1 получаем следствие.

**Следствие 1.** *В пространстве комплексных тригонометрических многочленов* $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$*, где* $\mathfrak{Q} \subset \mathbb{Z}$ *и является конечной арифметической прогрессией целых чисел,* $\mathfrak{Q} = \{k: \ k = mq + l, \ q = 1, \ldots, n\}$*, где* $m, l \in \mathbb{Z}$*, система сдвигов ядер* $\boldsymbol{D}_{\mathfrak{Q}}(x)$*:*

$$\boldsymbol{D}_{\mathfrak{Q}}\left(x - \frac{2\pi r}{mn} j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \sum_{k \in \mathfrak{Q}} e^{i\left(k\left(x - \frac{2\pi r}{mn} j\right) - s_k\right)} \tag{8}$$

*где* $r \in \mathbb{Z}$ *и не имеет общих делителей с* $n$*,* $j = 0, 1, \ldots, n-1$*, образует ортонормированный базис.*

*Любой ортонормированный базис в* $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$*, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена* $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n-1}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, имеет вид* (8) *для некоторых покомпонентных сдвигов* $s_k \in \mathbb{R}$*,* $k \in \mathfrak{Q}$*, и некоторого* $r \in \mathbb{Z}$*, не имеющего общих делителей с* $n$*.*

**Утверждение 2.** *Пусть* $\mathscr{T}_Q$ *и* $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$ *— пространства действительных тригонометрических многочленов, где* $Q$ *и* $\mathfrak{Q}$ *— конечные подмножества* $\mathbb{Z}^+$*, содержащие* $0$*, причем* $\mathfrak{Q} = mQ = \{k: \ k = mq, \ q \in Q\}$*, где* $m \in \mathbb{N}$*. Если в* $\mathscr{T}_Q$ *существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного действительного многочлена*

$$T_Q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0 < k \in D} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{9}$$

*вида* $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{n}$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, то в пространстве* $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$ *ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного действительного многочлена*

$$T_{\mathfrak{Q}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0 < k \in Q} (a_k \cos kmx + b_k \sin kmx) \tag{10}$$

*вида* $\{T(x - j\alpha/m)\}_{j=0}^{n}$*. А если в пространстве* $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$ *существует ортонормированный базис из последовательных сдвигов одного действительного многочлена вида* (10) $\{\mathfrak{T}(x - j\beta)\}_{j=0}^{n}$*, то в пространстве* $\mathscr{T}_Q$ *ортонормированным базисом будет система последовательных сдвигов одного действительного многочлена вида* (9) $\{\mathfrak{T}(x - jm\beta)\}_{j=0}^{n}$*.*

Действительно, размерности пространств $\mathscr{T}_Q$ и $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$ одинаковы, нормы многочленов и их попарная ортогональность при указанных преобразованиях сохраняются, поэтому приведенные системы одновременно будут ортонормированными базисами соответствующих пространств действительных тригонометрических многочленов.

Из утверждения 2 и теоремы 2 получаем следствие.

**Следствие 2.** *В пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$, где $\mathfrak{Q} \subset \mathbb{Z}^+$ является конечной, начинающейся с 0, возрастающей арифметической прогрессией целых чисел, $\mathfrak{Q} = \{k : \ k = mq, \ q = 0, \dots, n\}$, где $m \in \mathbb{N}$, система сдвигов ядер $\mathscr{D}_{\mathfrak{Q}}(x)$*

$$\mathscr{D}_{\mathfrak{Q}}\left(x - \frac{2\pi r}{m(2n+1)}j\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}\left(\pm 1 + \sum_{q=1}^{n} 2\cos\left(mq\left(x - \frac{2\pi r}{m(2n+1)}j\right) - s_q\right)\right),$$

*где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, образует ортонормированный базис.*

*Любой ортонормированный базис в $\mathscr{T}_{\mathfrak{Q}}$, состоящий из последовательных сдвигов одного многочлена, $\{T(x - j\alpha)\}_{j=0}^{2n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, имеет указанный вид для некоторых покомпонентных сдвигов $s_q \in \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, n$, и некоторого $r \in \mathbb{Z}$, не имеющего общих делителей с $2n+1$.*

Укажем теперь пространства тригонометрических многочленов, в которых нет ортонормированных базисов из последовательных сдвигов одного многочлена.

**Теорема 3.** *Пусть $Q$ — подмножество $\mathbb{Z}$, $Q = -Q$, $0 \notin Q$, существует такое $n \in Q$, что $(n+1) \in Q$. Тогда в пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_Q$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного многочлена вида $\{T_Q(x - j\alpha)\}_{j=0}^{|Q|-1}$, где $|Q|$ — число элементов $Q$, $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Предположим, что такой ортонормированный базис есть и он состоит из сдвигов многочлена

$$T_Q(x) = \sum_{r \in Q} c_r e^{irx},$$

откуда в силу базисности его сдвигов в $\mathbb{T}_Q$ имеем:

$$c_r \neq 0, \quad \text{при} \quad r \in Q; \qquad \alpha \neq 0.$$

В силу инвариантности относительно сдвигов система функций $T_Q(x - j\alpha)$, $j = 1, 2, \dots, |Q|$, также является ортонормированным базисом в $\mathbb{T}_Q$, поэтому $T_Q(x - |Q|\alpha) = e^{i\omega} T_Q(x)$, где $\omega \in [0, 2\pi)$. Значит,

$$c_r e^{ir(x - |Q|\alpha)} = c_r e^{i(rx + \omega)} \quad \text{при } r \in Q. \tag{11}$$

При $r = (n+1) \in Q$ из (11) следует, что $(n+1)|Q|\alpha = 2p\pi - \omega$, $p \in \mathbb{Z}$. При $r = n$ из (10) следует, что $n|Q|\alpha = 2q\pi - \omega$, $q \in \mathbb{Z}$. Вычитая из первого равенства второе, получаем, что

$$|Q|\alpha = 2k\pi \quad \text{для некоторого целого } k \neq 0 \text{ (поскольку } \alpha \neq 0). \tag{12}$$

Если $r\alpha$ при некотором натуральном $r \in Q$ кратно $2\pi$, то все тригонометрические многочлены $T_Q(x - j\alpha)$, $j = 0, 1, \dots, |Q| - 1$, имеют одинаковые компоненты с номерами $\pm r$, $c_r e^{irx}$ и $c_{-r} e^{-irx}$, что противоречит базисности этих многочленов в пространстве $\mathbb{T}_Q$. Если $r\alpha$ при всех $r \in Q$ не кратно $2\pi$, то для всех $r \in Q$ из (12) имеем равенства

$$\sum_{j=0}^{|Q|-1} e^{ir(x - j\alpha)} = \frac{e^{ir(x - |Q|\alpha)} - e^{irx}}{e^{-ir\alpha} - 1} = 0.$$

Значит, сумма

$$\sum_{j=0}^{|Q|-1} T_Q(x - j\alpha) \equiv 0, \tag{13}$$

а это противоречит предположению, что функции, слагаемые суммы (13), образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{T}_Q$. Теорема 3 доказана.

Из утверждения 1 и теоремы 3 получаем следующее следствие.

**Следствие 3.** *Пусть $Q$ — подмножество $\mathbb{Z}$, $Q = -Q$, $0 \notin Q$, существует такое $n \in Q$, что $(n+1) \in Q$, а $\mathfrak{Q} = mQ + l = \{k : \ k = mq + l, \ q \in Q\}$, где $m, l \in \mathbb{Z}$. Тогда в пространстве* *комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_{\mathfrak{Q}}$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного многочлена вида $\{T_{\mathfrak{Q}}(x-j\alpha)\}_{j=0}^{|\mathfrak{Q}|-1}$, где $|\mathfrak{Q}|$ — число элементов $\mathfrak{Q}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Из теоремы 3 получаем также следующее следствие.

**Следствие 4.** *Если $D$ — подмножество $\mathbb{N}$, содержащее два натуральных числа подряд, то в пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathscr{T}_D$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного действительного многочлена вида $\{T_D(x-j\alpha)\}_{j=0}^{2|D|-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Действительно, если бы такой ортонормированный базис существовал, то он был бы ортонормированным базисом и в пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_Q$, где $Q=-D\cup D$, что невозможно по теореме 3.

Из утверждения 2 и следствия 4 получаем следующее следствие.

**Следствие 5.** *Пусть $D$ — подмножество $\mathbb{N}$, содержащее два натуральных числа подряд, а $\mathfrak{D}=mD+l=\{k:\ k=mq+l,\ q\in D\}$, где $m\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}^+$. Тогда в пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathscr{T}_{\mathfrak{D}}$ не существует ортонормированного базиса из сдвигов одного действительного многочлена вида $\{\mathfrak{T}_D(x-j\alpha)\}_{j=0}^{2|D|-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.*

Приведем еще одно простое утверждение.

**Утверждение 3.** *Пусть $Q$ — подмножество $\mathbb{Z}$, являющееся конечным объединением таких непустых непересекающихся множеств $Q_p$, $p=1,\dots,P$, что в каждом пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_{Q_p}$, $p=1,\dots,P$, существует ортонормированный базис из сдвигов одного комплексного многочлена вида $\left\{\mathfrak{T}_{Q_p}(x-j\alpha_p)\right\}_{j=0}^{2|Q_p|-1}$, $\alpha_p\in\mathbb{R}$. Тогда объединение таких базисов будет ортонормированным базисом в пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_Q$.*

Из него и теорем 1 и 3 получаем следующее следствие.

**Следствие 5.** *Пусть $Q=[-n,-m]\cup[m,n]$, где $0<m<n$, тогда в пространстве комплексных тригонометрических многочленов $\mathbb{T}_Q$ не существует ортонормированного базиса из последовательных сдвигов одного комплексного многочлена, но есть ортонормированный базис из последовательных сдвигов двух комплексных многочленов $T_{[-n,-m]}(x-j\alpha)$ и $T_{[m,n]}(x-j\alpha)$, $j=0,\dots,n-m$ (причем можно взять $T_{[-n,-m]}(x)=T_{[m,n]}(-x)$ или $T_{[-n,-m]}(x)=\overline{T_{[m,n]}(x)}$).*

Из следствий 4 и 5 получаем следующее следствие.

**Следствие 6.** *В пространстве действительных тригонометрических многочленов $\mathscr{T}_{[m,n]}$, где $0<m<n$, не существует ортонормированного базиса из последовательных сдвигов одного действительного многочлена, но есть ортонормированный базис из последовательных сдвигов двух действительных многочленов $\mathscr{T}_1(x-j\alpha)$ и $\mathscr{T}_2(x-j\alpha)$, $j=0,\dots,n-m$.*

Действительно, по следствию 5 существует ортонормированная система из последовательных сдвигов двух сопряженных комплексных многочленов $T_{[m,n]}(x-j\alpha)$ и $\overline{T_{[m,n]}(x-j\alpha)}$, $j=0,\dots,n-m$. А тогда система из последовательных сдвигов двух действительных многочленов

$$\frac{T_{[m,n]}(x-j\alpha)+\overline{T_{[m,n]}(x-j\alpha)}}{\sqrt{2}},\qquad \frac{T_{[m,n]}(x-j\alpha)-\overline{T_{[m,n]}(x-j\alpha)}}{\sqrt{2}i},\qquad j=0,\dots,n-m,$$

является ортонормированной системой в пространстве $\mathscr{T}_{[m,n]}$, и количество элементов в ней совпадает с размерностью пространства.

**Определение.** Система элементов $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства $H$ (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *ортоподобной*, если для любого элемента $f\in H$ верно равенство $f=\sum\limits_j(f,\varphi_j)\varphi_j$.

Умножая это равенство скалярно на $f$, получим равенство $\|f\|^2=\sum\limits_j\|(f,\varphi_j)\|^2$, которое определяет фреймы Парсеваля. Поэтому всякая ортоподобная система является фреймом Парсеваля. Известно, что всякий фрейм Парсеваля является ортоподобной системой (см. [1, § 1.8.2]).

**Теорема 4.** *Пусть $Q$ — конечное подмножество $\mathbb{Z}$, $Q\subset[m,n]$. Тогда система сдвигов ядер*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m+1)}}\sum_{k\in Q}e^{i\left(k\left(x-\frac{2\pi r}{n-m+1}j\right)-s_k\right)},$$

*где $r\in\mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $n-m+1$, $j=0,1,\dots,n-m$, образует ортоподобную систему (фрейм Парсеваля) в $\mathbb{T}_Q$.*

**Доказательство.** Эта система является ортогональной проекцией на $\mathbb{T}_Q$ системы сдвигов ядер (2), которая по теореме 1 образует ортонормированный базис в $\mathbb{T}_{[m,n]}$. А ортогональная проекция ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_{[m,n]}$ — ортоподобная система в $\mathbb{T}_Q$ (см. [1, § 1.8.2, 1.8.3]). Ведь любой элемент из $\mathbb{T}_Q$ можно разложить по ортонормированному базису из $\mathbb{T}_{[m,n]}$, а потом в разложении всюду заменить элементы ортонормированного базиса из $\mathbb{T}_{[m,n]}$ на их ортогональные проекции на $\mathbb{T}_Q$. Теорема доказана.

**Теорема 5.** *Пусть $D$ — конечное подмножество $\mathbb{Z}^+$, $D \subset [0,n]$, $0 \leqslant n$. Тогда система сдвигов ядер*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}\left(\pm 1\chi_D(0) + \sum_{k\in D} 2\cos\left(k\left(x - \frac{2\pi r}{2n+1}j\right) - s_k\right)\right),$$

*где $r \in \mathbb{Z}$ и не имеет общих делителей с $2n+1$, $j = 0, 1, \ldots, 2n$, образует ортоподобную систему (фрейм Парсеваля) в $\mathscr{T}_Q$.*

**Доказательство.** Эта система является ортогональной проекцией на $\mathscr{T}_Q$ системы сдвигов ядер (5), которая по теореме 2 образует ортонормированный базис в $\mathscr{T}_{[0,n]}$. А ортогональная проекция ортонормированного базиса из $\mathscr{T}_{[0,n]}$ — ортоподобная система в $\mathscr{T}_Q$. Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00417), гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект* НШ-1096.2014.1) *и грантов Правительства РФ (проекты ГК 02.G25.31.0030 и ГК 02.G36.31.0006.).*

### Библиографический список

1. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М. : Физматлит, 2005. 616 с.
2. *Лукашенко Т. П.* Ортогональные базисы сдвигов в пространствах тригонометрических многочленов // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 163–169.

## Orthogonal Basis of Shifts in Space of Trigonometric Polynomials

**T. P. Lukashenko**

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, lukashenko@mail.ru

The orthonormal basis of a system of shifts of one trigonometric polynomial exist in the space of complex trigonometric polynomials with components from $m$ to $n$ and in the space of real trigonometric polynomials with components from $0$ to $n$. Under condition $0 < m < n$ there is no orthogonal basis of shifts of one trigonometric polynomial in this space real trigonometric polynomials with components from $m$ to $n$. The system of shifts of two trigonometric polynomials are orthogonal basis in this space.

*Key words:* trigonometric polynomials, orthonormal basis of shifts, systems like orthogonal systems, frame of shifts.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no.* 14-01-00417) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools (project no.* НШ-1096.2014.1) *and grants of the Government of the Russian Federation (projects no.* ГК 02.G25.31.0030, ГК 02.G36.31.0006.).

### References

1. Novikov I. Y., Protasov V.Yu., Skopina M. A. Teoria vspleskov [Theory of Wavelets]. Moscow, Fizmathlit, 2005, 616 p (in Russian).
2. Lukashenko T. P. Ortogonal'nie bazisi sdvigov v prostranstvah trigonometricheskix mnogochlenov [Orthogonal basis of shifts in space of trigonometric polynomials]. *Sovremennie problemi teorii funktsiy i ih prilojenya: materialy 17 mezhdunar. Saratov. zimney shkoli* [Modern problems of function theory and their applications: Proc. of the Intern. 17-th Saratov Winter School], Saratov, 2014, pp. 163–169.