fic Bulletin. Mathematics & Physics], 2014, iss. 34, no. 5(176), pp. 12–16 (in Russian).
6. Rudin U. *Functional analysis*. McGraw-Hill, 1973, 424 p. (Rus. ed. : Rudin U. Functional analysis. Moscow, Mir, 1975, 449 p.)
7. Krasnoselsky M. A., Burd V. Sh., Kolesov Yu. S. *Nelineyniye pochty periodicheskiye kolebaniya* [Nonlinear almost periodic fluctuations]. Moscow, Nauka, 1970, 352 p. (in Russian).
8. Baskakov A. G., Duplishcheva A. Yu. Difference operators and operator matrices of the second order. *Izv. RAN. Ser. Matem.*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 3–20 (in Russian).
9. Baskakov A. G. Harmonic and Spectral Analysis of Power Bounded Operators and Bounded Semigroups of Operators on Banach Spaces. *Math. Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 164–178. DOI: 10.1134/S0001434615010198.

УДК 511.3

ОБОБЩЁННЫЕ ХАРАКТЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ И АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ Н. Г. ЧУДАКОВА

В. А. Матвеев[1], **О. А. Матвеева**[2]

[1]Аспирант кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, vladimir.matweev@gmail.com

[2]Аспирантка кафедры компьютерной алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, olga.matveeva.0@gmail.com

В случае числовых характеров известная гипотеза Н. Г. Чудакова, высказанная им в 1950 году, предполагает, что конечнозначный числовой характер $h(n)$, удовлетворяющий условиям: 1) $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p; 2) $S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = \alpha x + O(1)$, является характером Дирихле. Числовой характер, удовлетворяющий условиям гипотезы Н. Г. Чудакова, получил название *обобщённого характера*: главного в случае $\alpha \neq 0$ и неглавного, в противном случае. Для главных обобщённых характеров гипотеза Н. Г. Чудакова была доказана в 1964 году; для неглавных обобщённых характеров эта гипотеза остаётся открытой и по настоящее время. В работе даётся определение обобщённого характера в случае характеров числовых полей, высказывается аналог гипотезы Н. Г. Чудакова и приводится доказательство этого предположения в случае главных обобщённых характеров.

Ключевые слова: гипотеза Чудакова, обобщённые числовые характеры.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, а χ — конечнозначный характер, заданный на полугруппе целых идеалов поля $\mathbb{K}$.

Определение 1. Характер χ будем называть *обобщённым характером*, если выполняются следующие условия:
1) $\chi(\mathfrak{p}) \neq 0$ почти для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ поля $\mathbb{K}$;
2) $S(x) = \sum\limits_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a}) \leq x}} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1)$.

При этом обобщённый характер χ будем называть главным обобщённым характером, если $\alpha \neq 0$, и неглавным, в противном случае.

Замечание 1. В общем случае даже для характеров Дирихле числовых полей известна [1] только оценка вида

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a}) \leq x}} \chi(\mathfrak{a}) = \begin{cases} O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi \neq \chi_0, \\ \alpha x + O\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}}\right), & \chi = \chi_0, \end{cases}$$

где γ — некоторое натуральное число.

В данной работе мы укажем класс числовых полей, для которых существуют обобщённые характеры, выскажем аналог гипотезы Н. Г. Чудакова [2–4] о том, что такие характеры являются характерами Дирихле, и докажем это предположение для главных обобщённых характеров.

Отметим, что в основе доказательства этого утверждения лежит изучение аналитических свойств рядов Дирихле:

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

где χ — главный обобщённый характер.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

Определение 2. Характер Дирихле χ поля $\mathbb{K}$ называется норменным, если существует числовой характер Дирихле χ_1, такой, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ поля $\mathbb{K}$ выполняется равенство

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_1(N(\mathfrak{p})).$$

В работе [5] рассматривается задача описания числовых полей $\mathbb{K}$, для которых существуют норменные характеры Дирихле. В частности, если поле $\mathbb{K}$ есть композит циклических круговых расширений поля $\mathbb{Q}$ степеней $q_i^{n_i}$, где q_i — различные простые, то любой характер Дирихле поля $\mathbb{K}$ является норменным.

Для норменных характеров Дирихле поля $\mathbb{K}$ имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть χ — неглавный норменный характер Дирихле числового поля $\mathbb{K}$. Тогда*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a},\\ N(\mathfrak{a})\le x}} \chi(\mathfrak{a}) = O(1),$$

где константа не зависит от x.

Доказательство. В работе [5] показано, что L-функция Дирихле

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

в случае неглавного норменного характера χ раскладывается в конечное произведение L-функций Дирихле с неглавными числовыми характерами χ_i:

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{r} L(s,\chi_i). \tag{2}$$

Пусть $g(z) = \sum\limits_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) x^{N(\mathfrak{a})}$ и $g_i(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_i(n) x^n$ есть степенные ряды, отвечающие (т. е. с теми же коэффициентами) L-функциям Дирихле $L(s,\chi,\mathbb{K})$ и $L(s,\chi_i)$ соответственно.

В силу (2) имеет место равенство:

$$g(z) = g_1(z) \circ g_2(z) \circ \ldots \circ g_r(z), \tag{3}$$

где $g_1(z) \circ g_2(z)$ — произведение по Дирихле двух степенных рядов $g_1(x)$ и $g_2(z)$.

Рассмотрим случай произведения по Дирихле двух сомножителей:

$$g(z) = g_1(z) \circ g_2(z). \tag{4}$$

Каждый из сомножителей определяет рациональную функцию, голоморфную в точке $z = 1$, и, следовательно, частичные суммы этих рядов ограничены в совокупности на интервале $[0, 1)$.

Заметим, что ограниченность степенного ряда $g(z)$ при $z \to 1 - 0$ эквивалентна тому, что для любой точки $x < 1$ существует такое N, что при всех $n > N$ частичные суммы этого ряда $S_n(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x)| < M,$$

где константа M не зависит от n и x.

По условию для каждого x существует N такое, что частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N_1} \chi_1(n)x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{N_2} \chi_2(n)x^n$, где $N_1 > N$ и $N_2 > N$, ограничены константой M.

В силу абсолютной сходимости степенных рядов в единичном круге представим $g(x)$ и $g_1(x)\cdot g_2(x)$, где используется обычное произведение степенных рядов в виде

$$g(x) = \lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{nm}, \tag{5}$$

$$g_1(x)\cdot g_2(x) = \lim_{\substack{N_1\to\infty \\ N_2\to\infty}} \sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m}. \tag{6}$$

Отсюда в силу (5) для ограниченности сумматорной функции $S(x) = \sum\limits_{N(\mathfrak{a})\le x} \chi(\mathfrak{a})$ достаточно показать, что для любого $x \in [0,1)$ существует N такое, что

$$\left|\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{nm}\right| < M, \tag{7}$$

где $N_1 > N$, $N_2 > N$, и константа M не зависит от N и x.

В силу ограниченности $g_1(x)\cdot g_2(x)$ имеем:

$$\left|\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m}\right| < M. \tag{8}$$

Покажем, что из оценки (7) следует оценка вида

$$\left|\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} \chi_1(n)\chi_2(m)x^{n+m}x^{nm-(n+m)}\right| < M. \tag{9}$$

В силу абсолютной сходимости слагаемые суммы (9) можно расположить по возрастанию показателей степеней $x^{nm-(n+m)}$. Тогда, применив к сумме (9) неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n\right| \le \lambda_1 \max_{N_1\le N} \left|\sum_{n=1}^{N_1} a_n\right|,$$

где $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$, которое получается в результате применения формулы суммирования Абеля, мы в силу (8) получим неравенство (9), что доказывает (7).

Ясно, что наше утверждение имеет место для произведения по Дирихле любого конечного числа сомножителей. Тем самым, утверждение теоремы 1 полностью доказано. □

Замечание 2. Можно показать, что если χ — неглавный обобщённый характер числового поля, а χ_0 — главный характер Дирихле, то $\chi_0\chi$ — главный обобщённый характер числового поля.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ДИРИХЛЕ С ОБОБЩЁННЫМИ ХАРАКТЕРАМИ

Рассмотрим класс рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{10}$$

где χ — обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$.

Для рядов вида (10) докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Ряд Дирихле* (10) *определяет функцию, голоморфную почти во всех точках полуплоскости $\sigma > 0$, за возможным исключением точки $s = 1$, где она может иметь полюс первого порядка, и у которой на границе $\sigma = 0$ нет точек «типа полюса».*

Замечание 3. Здесь точка $s = it_0$ называется точкой «типа полюса», если $|f(\sigma + it_0) \to 0$ при $\sigma \to 0+$.

Доказательству теоремы 2 предпошлём доказательство двух утверждений.

Лемма 1. *Пусть χ — неглавный обобщённый характер. Тогда степенной ряд*

$$g(x) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}) x^{N(\mathfrak{a})} \tag{11}$$

определяет функцию, имеющую конечный односторонний предел в точке $x = 1$, т. е. предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0.$$

Замечание 4. Ограниченность сумматорной функции для характера χ обеспечивает только ограниченность функции (11) в окрестности точки $x = 1$.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим пространства $C[0,1]$ и $C[0,1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. Обозначим через $E_{n,\varepsilon}(g)$ и $E^*_{n,\varepsilon}(g)$ величины наилучшего приближения функции $g(x)$ вида (11) на отрезке $[0,1-\varepsilon]$ алгебраическими полиномами вида

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \le n} b(\mathfrak{a}) x^{N(\mathfrak{a})}, \qquad \hat{P}^*_n(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \le n} \chi(\mathfrak{a}) x^{N(\mathfrak{a})},$$

где $b(\mathfrak{a})$ — произвольные, а $\chi(\mathfrak{a})$ — мультипликативные коэффициенты. В случае ограниченности или непрерывности функции $g(x)$ на отрезке $[0,1]$ соответствующие величины обозначим $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$.

Из результатов работы [6] следует, что в случае существования конечных величин $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$ имеют место оценки вида

$$C_1 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E^*_{n,\varepsilon}(g)} \le \frac{E_n(g)}{E^*_n(g)} \le C_2 \frac{E_{n,\varepsilon}(g)}{E^*_{n,\varepsilon}(g)}, \tag{12}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от $g(x)$ и ε.

Из этой работы и асимптотики простых идеалов следует также, что

$$\frac{E_n(g)}{E^*_n(g)} = O(\ln^{-1} n). \tag{13}$$

Осталось заметить, что в силу ограниченности функций $g(x)$ вида (11) в окрестности $x = 1$ следует существование величин $E_n(g)$ и $E^*_n(g)$, и, следовательно, оценки (12), (13) доказывают утверждение леммы 1. □

Методы работы [6] позволяют доказать следующий результат.

Лемма 2. *Пусть χ — конечнозначный характер поля $\mathbb{K}$, для которого*

$$S(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \le x} \chi(\mathfrak{a}) = \alpha x + O(1), \quad \alpha \ne 0.$$

Тогда степенной ряд

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\mathfrak{a}, \\ N(\mathfrak{a}) = n}} \chi(\mathfrak{a}) - \alpha \right] x^n$$

имеет конечный предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x).$$

Доказательство теоремы 2. Запишем известное интегральное представление:

$$f(s) = s \int_1^{\infty} \frac{S(u)}{u^{s-1}} du.$$

Это представление в случае обобщённого характера даёт аналитическое продолжение $f(s)$ в полуплоскость $\sigma > 0$.

Рассмотрим преобразование Меллина:

$$f(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx, \tag{14}$$

где $g(e^{-x}) = \sum\limits_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})e^{-N(\mathfrak{a})x}$, $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.age

Запишем равенство (14) в виде

$$f(s)\Gamma(s) = \int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int_0^1 g(e^{-x})x^{s-1}dx.$$

Первый интеграл этого равенства абсолютно сходится при любом s. Действительно, для любого s

$$\left|\int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx\right| \leq \int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}} \left(\sum_{\mathfrak{a}} e^{-(N(\mathfrak{a})-\frac{1}{2})x}\right) x^{\sigma-1}dx < C.$$

Исследуем второй интеграл равенства (14). В силу леммы 1 и леммы 2 функции $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{\mathfrak{a},N(\mathfrak{a})=n}\chi(\mathfrak{a})\right)x^n$ (при $\alpha = 0$) и $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\sum\limits_{\mathfrak{a},N(\mathfrak{a})=n}\chi(\mathfrak{a}) - \alpha\right]x^n$ (при $\alpha \neq 0$) непрерывны на отрезке $[0,1]$ и раскладываются в степенные ряды с ограниченными в совокупности коэффициентами. Следовательно, в силу теоремы 6.1 монографии [7] существует последовательность полиномов $P_n(x)$, равномерно сходящаяся к $g(x)$ на отрезке $[-1,1]$, и их коэффициенты ограничены в совокупности.

Представим $f(s)$ следующим образом:

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left[\int_1^\infty g(e^{-x})x^{s-1}dx + \int_0^1 [g(e^{-x}) - P_n(e^{-x})]x^{s-1}dx + \int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx\right].$$

Отсюда получаем:

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|}\left[C_0 + \frac{\varepsilon_n}{\sigma} + \left|\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx\right|\right].$$

При надлежащем выборе n имеем:

$$|f(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|}\left[C_1 + \left|\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx\right|\right], \tag{15}$$

где константа C_1 не зависит от σ.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx.$$

Интегрируя его по частям, получаем:

$$\int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}dx = \frac{e^{-k}}{s} + \frac{ke^{-k}}{s(s+1)} + \ldots$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_0^1 e^{-kx}x^{s-1}\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} e^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\ldots(s+m)}. \tag{16}$$

Так как

$$\int_0^x e^t\,dt = e^x - 1 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{x^m}{m+1}, \qquad \int_0^x (e^t-1)\,dt = e^x - x - 1 = x^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{(m+2)!},$$

то

$$\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+2)!}.$$

Отсюда при $|t| > 2$ получаем:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{s(s+1)\dots(s+m)}\right| \le \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (m+2)} = \frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}.$$

Таким образом, в силу (16) имеем:

$$\left|\int_0^1 P_n(e^{-x})x^{s-1}dx\right| \le M\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^k}{k^2} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right)e^{-k} \le M_0.$$

Тогда в силу (15) получаем при $\sigma < 0$:

$$|f(s)| \le \frac{C}{|\Gamma(s)|} = O(1),$$

где константа зависит только от $|t|$, что и завершает доказательство теоремы 2. □

Следствие. *Пусть $\chi(\mathfrak{p}) \ne \chi_1(\mathfrak{p})$ только для конечного числа простых идеалов $\mathfrak{p}$, где χ_1 — характер Дирихле. Тогда χ не является обобщённым характером.*

3. АНАЛОГ ГИПОТЕЗЫ Н. Г. ЧУДАКОВА И ЕГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО В СЛУЧАЕ ГЛАВНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ХАРАКТЕРОВ

Для обобщённых характеров числовых полей выскажем предположение, которое является аналогом известной гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщённых числовых характеров. А именно можно предположить, что обобщённые характеры числовых полей являются характерами Дирихле. В случае главных обобщённых характеров будет доказана

Теорема 3. *Главный обобщённый характер числового поля $\mathbb{K}$ является характером Дирихле этого поля.*

Доказательству теоремы 3 предпошлём доказательство следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть P — подмножество простых идеалов поля $\mathbb{K}$, а D_1 — полугруппа целых идеалов, порождённая подмножеством P. Тогда имеет место равенство*

$$Q(s) = \sum_{\mathfrak{p}\in P} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{a}\in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \ln\varphi(N(\mathfrak{a})s),$$

где

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{a} \text{ — единичный идеал}, \\ (-1)^k, & \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1\cdot\mathfrak{p}_2\cdot\ldots\cdot\mathfrak{p}_r,\ \mathfrak{p}_i \ne \mathfrak{p}_j,\ \mathfrak{p}_i \in P, \\ 0, & \mathfrak{p}^2|\mathfrak{a}, \end{cases}$$

а

$$\varphi(s) = \prod_{\mathfrak{p}\in P}\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}\in D_1} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Доказательство. Положим норму единичного идеала равной единице.

Во-первых, имеем:

$$\ln\varphi(\sigma) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mathfrak{p}\in P} \frac{1}{m}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^{m\sigma}} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}Q(m\sigma).$$

Во-вторых, получаем:

$$\sum_{\mathfrak{a}\in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})}\ln(N(\mathfrak{a})s) = \sum_{\mathfrak{a}\in D_1}\frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}Q(N(\mathfrak{a})s) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{Q(rs)}{r}\sum_{N(\mathfrak{a})|r}\mu(\mathfrak{a}) = Q(s).$$

Здесь мы воспользовались свойством функции $\mu(\mathfrak{a})$ (см. [8, § 2.5]):

$$\sum_{N(\mathfrak{a})|r} \mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1, & r = 1, \\ 0, & r \neq 1. \end{cases}$$

□

Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathfrak{m}$ — произведение простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $\chi(\mathfrak{p}) = 0$, и χ_0 — главный характер Дирихле модуля $\mathfrak{m}$.

Обозначим

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi_0(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Известно, что L-функция $L(s, \chi, \mathbb{K})$ имеет в точке $s = 0$ нуль конечного порядка. Пусть k — порядок этого нуля. Будем говорить, что $f(s)$ имеет в точке $s = 0$ «нуль m-го порядка», если существует такая последовательность $\sigma_n \to 0$, что

$$0 < \frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^m} < C, \qquad \frac{|f(\sigma_n)|}{\sigma_n^{m+1}} \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Рассмотрим случай $k \le m$. Запишем равенство:

$$f(s) = L(s, \chi_0, \mathbb{K}) \cdot \varphi(s), \qquad \sigma > 0,$$

где функция

$$\varphi(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0,1}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{\substack{\mathfrak{p}, \\ \chi(\mathfrak{p}) \neq 0,1}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right) \tag{17}$$

определена в точке s.

В силу предположения $k \le m$ и теоремы 2 функция $\varphi(s)$ ограничена в точках $s = \sigma_n$, $n > N_0$, и, следовательно,

$$\operatorname{Re} \ln \varphi(\sigma_n) < C_1, \quad C_1 > 0. \tag{18}$$

Пусть γ — число, $|\gamma| = 1$, и пусть

$$\varphi_1(s) = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \left(1 - \frac{\gamma}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}.$$

Точно так же, как и в лемме 3, выводится формула

$$\sum_{\mathfrak{p} \in P} \frac{\gamma}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{a} \in D_1} \frac{\mu(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})} \ln \varphi_1(N(\mathfrak{a})s). \tag{19}$$

Обозначим через P_k, $k = \overline{1, l}$, множество простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $\chi(\mathfrak{p}) = \gamma_k$, где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ — различные значения $\chi(\mathfrak{a})$, не равные 0 и 1.

Тогда для функции $\ln \varphi(s)$, где $\varphi(s)$ определена равенством (17), имеет место выражение

$$\ln \varphi(s) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} + \sum_{k=1}^{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}}. \tag{20}$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s}.$$

В силу леммы 3, формулы (19) и того факта, что $\ln \varphi_1(N(\mathfrak{a})s) \sim 2^{-N(\mathfrak{a})\sigma}$ для любого $\sigma > 0$ для точки $s = \sigma + it$, в которой определена функция $\ln \varphi(s)$, имеет место оценка вида

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{\mathfrak{p} \in P_k} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum_{k=1}^{l} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in P_k, \\ N(\mathfrak{p}) \le n_0}} \frac{1 - \gamma_k}{N(\mathfrak{p})^s} + O(1), \tag{21}$$

где $n_0 \sigma > 1$.

Для второго слагаемого для любого $\sigma > 0$ существует такое m_0 ($m_0\sigma > 1$), что верна оценка вида

$$\sum_{k=1}^{l}\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{\mathfrak{p}\in P_k}\frac{1-\gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{m=2}^{m_0}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_k,\\ N(\mathfrak{p})\le n_0}}\frac{1-\gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} + O(1). \tag{22}$$

Таким образом, в силу (20)–(22) для любого $\sigma > 0$ имеет место оценка вида

$$\ln\varphi(s) = \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_k,\\ N(\mathfrak{p})\le n_0}}\frac{1-\gamma_k}{N(\mathfrak{p})^{s}} + \sum_{m=1}^{m_0}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_k,\\ N(\mathfrak{p})\le n_0}}\frac{1-\gamma_k^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}}\right) + O(1) \tag{23}$$

для любой точки s, где определена функция $\ln\varphi(s)$.

В силу следствия к теореме 2 число простых идеалов $\mathfrak{p}$, для которых $\chi(\mathfrak{p}) \ne 0, 1$, не может быть конечным. Следовательно, для любой константы $M > 0$ найдётся такое $\sigma_0 > 0$, что для σ_n, $0 < \sigma_n \le \sigma_0$, существует такое n_0, что имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_k,\\ N(\mathfrak{p})\le n_0}}\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\sigma_n}} > M. \tag{24}$$

Заметим, что из оценки (23) следует оценка вида

$$\operatorname{Re}\ln\varphi(\sigma_n) > C_3\sum_{k=1}^{l}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_k,\\ N(\mathfrak{p})\le n_0}}\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{\sigma_0}},$$

которая в совокупности с оценкой (24) противоречит оценке (18), что и доказывает, что при всех $\mathfrak{p}$

$$\chi(\mathfrak{p}) = \chi_0(\mathfrak{p}).$$

В случае, когда $k > m$, нужно рассмотреть равенство

$$L(s, \chi_0, \mathbb{K}) = f(s)\varphi(s),$$

где

$$\varphi(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p},\\ \chi(\mathfrak{p})\ne 0,1}}\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)\cdot\prod_{\substack{\mathfrak{p},\\ \chi(\mathfrak{p})\ne 0,1}}\left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

и провести приведённые выше рассуждения для $\operatorname{Re}(-\ln\varphi(\sigma_n))$.

Таким образом, теорема 3 полностью доказана. □

Библиографический список

1. *Хейльбронн Х.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел. М. : Мир, 1968. С. 310–346.
2. *Чудаков Н. Г., Линник Ю. А.* Об одном классе вполне мультипликативных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 193–196.
3. *Чудаков Н. Г., Родосский К. А.* Об обобщённом характере // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, №3. С. 1137–1138.
4. *Глазков В. В.* Характеры мультипликативной полугруппы натуральных чисел // Исследования по теории чисел : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1968. № 2. С. 3–40.
5. *Кузнецов В. Н., Сецинская Е. В., Кривобок В. В.* К задаче о разложении в произведение L-функций Дирихле числовых полей // Чебышевский сб. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 51–64.
6. *Водолазов А. М., Кузнецов В. Н.* К вопросу аналитического продолжения рядов Дирихле с вполне мультипликативными коэффициентами // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам : межвуз. сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 1. С. 43–59.
7. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972, 368 с.
8. *Постников А. Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М. : Наука, 1971, 416 с.

Generalized Characters Over Numerical Fields and a Counterpart of Chudakov Hypothesis

V. A. Matveev, O. A. Matveeva

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., 410012, Saratov, Russia, vladimir.matweev@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

The well-known Chudakov hypothesis for numeric characters, conjectured by Chudakov in 1950, suggests that finite-valued numeric character $h(n)$, which satisfies the following conditions: 1) $h(p) \neq 0$ for almost all prime p; 2) $S(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n) = \alpha x + O(1)$, is a Dirichlet character. A numeric character which satisfies these conditions is called a *generalized character*, principal if $\alpha \neq 0$ and non-principal otherwise. Chudakov hypothesis for principal characters was proven in 1964, but for non-principal ones thus far it remains unproved. In this paper we present a definition of generalized character over numerical fields, suggest an analog of Chudakov hypothesis for these characters and provide its proof for principal generalized characters.

Key words: Chudakov hypothesis, generalized numerical characters.

References

1. Kheil'bronn H. ζ-funktsii i L-funktsii [ζ-functions and L-functions]. *Algebraicheskaia teoriia chisel* [Algebraic Number Theory]. Moscow, Mir, 1968, pp. 310–346 (in Russian).
2. Chudakov N. G., Linnik J. A. On certain class of completely multiplicative functions. *USSR AS Reports*, 1950, vol. 74, iss. 2, pp. 193–196 (in Russian).
3. Chudakov N. G., Rodosskii K. A. On generalized character. *USSR AS Reports*, 1950, vol. 74, iss. 3, pp. 1137–1138 (in Russian).
4. Glazkov V. V. Characters of multiplicative semigroup of natural numbers. *Number theory research: Interacademic tractate collection*, Saratov, Saratov Univ. Press, 1968, vol. 2, pp. 3–40 (in Russian).
5. Kuznetsov V. N., Setsinskaia E. V., Krivobok V. V. On a problem of decomposition into a product of Dirichlet L-functions over numerical fields. *Chebyshevskii sbornik* [Chebyshev collection], 2004, vol. 5, iss. 3, pp. 51–64 (in Russian).
6. Vodolazov A. M., Kuznetsov V. N. On analytical continuation of Dirichlet series with multiplicative coefficients. *Research on algebra, number theory and complementary areas: Interacademic tractate collection*, Saratov, Saratov Univ. Press, 2003, iss. 1, pp. 43–59 (in Russian).
7. Dem'ianov V. F., Malozemov V. N. *Vvedenie v minimaks* [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1982, 368 p. (in Russian).
8. Postnikov A. G. *Vvedenie v analiticheskuiu teoriiu chisel* [Introduction to analytical number theory]. Moscow, Nauka, 1971, 416 p. (in Russian).

УДК 501.1

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. А. Рыжкова[1], И. А. Тришина[2]

[1]Аспирантка кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, anna-ryzhkova212@rambler.ru
[2]Аспирантка кафедры нелинейных колебаний, Воронежский государственный университет, I.A.Trishina@gmail.com

Введен в рассмотрение класс почти периодических на бесконечности последовательностей. Необходимость исследования таких последовательностей связана с тем, что они возникают при рассмотрении разностных уравнений. Основные результаты статьи связаны с доказательством почти периодичности на бесконечности решений разностных уравнений.

Ключевые слова: периодические на бесконечности последовательности, разностные уравнения, спектральная теория.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и — комплексное банахово пространство. Через $l^\infty = l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ обозначим банахово пространство ограниченных последовательностей $x : \mathbb{Z} \to X$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|$. Через c_0 обозначим (замкнутое) подпространство последовательностей из l^∞, убывающих на бесконечности, т. е. $\lim\limits_{|n| \to \infty} \|x(n)\| = 0$, $x \in c_0$. В пространстве l^∞ рассмотрим операторы сдвига $S(n) : l^\infty \to l^\infty$, $(S(n)x)(k) = x(k+n)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^\infty$. Используемые результаты из гармонического анализа, функции и векторов, содержатся в работах [1–7]. Следуя [1, 6, 7], дадим определение медленно меняющейся на бесконечности последовательности.