8. Aldashev S. A. Correctness of Poincare's Problem in a Cylindric Domain for Laplace's Many-dimensional Equation. *Izvestiia NAN RK. Ser. fiziko-matematicheskaia* [Proc. NAN RK. Ser. Physics and Mathematics], Almaty, 2014, no. 3, pp. 62–67 (in Russian).
9. Mikhlin S. G. *Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia* [Many-dimensional Singular Integrals and Integral Equations]. Moscow, Physmathgiz, 1962, 254 p. (in Russian).
10. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam* [Handbook on Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1965, 703 p. (in Russian).
11. Beitmen G., Erdeii A. *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. 2* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2]. Moscow, Nauka, 1974, 295 p. (in Russian).

УДК 512

О КВАЗИМНОГОЧЛЕНАХ КАПЕЛЛИ

С. Ю. Антонов[1], **А. В. Антонова**[2]

[1]Антонов Степан Юрьевич, старший преподаватель кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovst-vm@rambler.ru

[2]Антонова Алина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Казанский государственный энергетический университет, antonovakazan@rambler.ru

В данной работе рассматривается класс многочленов типа Капелли в свободной ассоциативной алгебре $F\{Z\}$, где F — произвольное поле, Z — счетное множество. Интерес к этим объектам связан с предположением о том, что введенные многочлены (квазимногочлены Капелли) некоторой нечетной степени будут содержаться в базисе идеала Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$, когда $\mathrm{char}\, F = 0$. В связи с этим в статье приведены основные свойства квазимногочленов Капелли. В частности, указаны разложения этих многочленов через многочлены того же вида и установлены некоторые соотношения между их T-идеалами. Кроме того, опираясь на некоторые полученные свойства квазимногочленов Капелли, а также на теорему Ченга, мы показываем, что все квазимногочлены Капелли четной степени $2n$ $(n > 1)$ являются следствием стандартного многочлена S_n^- в случае, когда характеристика поля F не равна двум. Наконец, мы находим наименьшее $n \in N$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли четной степени $2n$ принадлежит идеалу тождеств матричной алгебры $M_m(F)$.

Ключевые слова: T-идеал, стандартный многочлен, многочлен Капелли.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-371-382

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — произвольное поле, m, k — любые натуральные числа. Описание идеала Z_2-градуированных тождеств Z_2-градуированной матричной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ представляет большой интерес для теории PI-алгебр. Решение этой задачи при $m = 2$, $k = 1$, $\mathrm{char}\, F = 0$ приведено в [1]. В [2] найдена наименьшая степень тождеств нечетной компоненты $M_1^{(m,k)}(F)$ Z_2-градуированной алгебры $M^{(m,k)}(F)$ и доказано, что двойной многочлен Капелли C_{2n-1} является минимальным тождеством этого подпространства. В [3] выдвинута гипотеза о том, что многочлен C_{2n-1} есть следствие более простых тождеств, причем для двух из них указан явный вид и приведены некоторые их свойства.

В данной работе мы продолжаем изучение этих многочленов, вводим новые объекты того же типа и устанавливаем некоторые соотношения между их T-идеалами, что представляет интерес в связи с нахождением базиса тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КАПЕЛЛИ

Пусть F — произвольное поле, $F\{Z\}$ — свободная ассоциативная алгебра над F, порожденная счетным множеством $Z = \{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, которое представим в виде $Z = X \bigcup Y$, где $X = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — непересекающиеся множества, $\{d\}^T$ — T-идеал алгебры $F\{Z\}$, порожденный многочленом d. Напомним, что двусторонний идеал I алгебры $F\{Z\}$ называется T-идеалом, если для любого эндоморфизма φ алгебры $F\{Z\}$ справедливо включение $\varphi(I) \subseteq I$. Далее, пусть $n > 1$ — какое-либо натуральное число, $I_n = \{1, \ldots, n\}$, S_n — симметрическая группа степени n, $A_n^+ = \{\pi \in S_n \mid \operatorname{sgn} \pi = 1\}$, $A_n^- = \{\tau \in S_n \mid \operatorname{sgn} \tau = -1\}$. Рассмотрим многочлены вида:

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \, \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} - \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)};$$

$$b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^+} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

$$h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_{n-1}^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

$$a_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

$$c_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

$$f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \, \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} y_{\tau(n)} =$$

$$= \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)} - \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in A_n^-} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

$$g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

$$b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_n^+} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

$$h_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in A_n^-} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

$$a_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

$$c_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in A_n^-} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \ldots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

которые в дальнейшем будем называть квазимногочленами Капелли нечетной и четной степени соответственно. Некоторые свойства многочленов f_{2n-1}, g_{2n-1}, f_{2n}, g_{2n} были установлены в работе [3]. Покажем, что аналогичными свойствами обладают и остальные многочлены.

Предложение 1. *Для любого* $s \in \{0, 1\}$ *многочлены* $b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$ *обладают следующими свойствами:*

1) *если отображение* $\varphi : I_n \to \mathbf{N}$ *не инъективно, а отображение* $\psi : I_{n-s} \to \mathbf{N}$ *произвольно, то* $b_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-s)}) = 0$, $h_{2n-s}(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \ldots, y_{\psi(n-s)}) = 0$;

2) *для любого* $\sigma \in S_n$ $b_{2n-s}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_{n-s}) = \operatorname{sgn} \sigma \, b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, y_1, \ldots, y_{n-s}) = \operatorname{sgn} \sigma \, h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;

3) *для любого* $\rho \in A_{n-s}^+$ $b_{2n-s}(x_1, \ldots, x_n, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(n-s)}) = b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_1, \ldots, x_n, y_{\rho(1)}, \ldots, y_{\rho(n-s)}) = h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$;

4) *для любого* $\omega \in A_{n-s}^-$ $b_{2n-s}(x_1, \ldots, x_n, y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(n-s)}) = h_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$, $h_{2n-s}(x_1, \ldots, x_n, y_{\omega(1)}, \ldots, y_{\omega(n-s)}) = b_{2n-s}(\bar{x}, \bar{y})$.

Доказательство. Проведем для многочлена $h_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$ при $s=1$, так как для остальных случаев оно аналогично.

1. Для отображений φ и ψ имеем:

$$h_{2n-1}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n-1)})=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\varphi(\pi(1))}y_{\psi(\tau(1))}\ldots y_{\psi(\tau(n-1))}x_{\varphi(\pi(n))}.$$

Если φ неинъективно, то для некоторых различных $i,j\in I_n$ справедливо равенство $\varphi(i)=\varphi(j)$.

Пусть π, τ — произвольные элементы группы S_n и множества A^-_{n-1} соответственно. Тогда для некоторых $a,b\in I_n$ $\pi(a)=i$, $\pi(b)=j$. Рассмотрим подстановку $\pi'\in S_n$, для которой

$$\pi'(v)=\begin{cases}\pi(v), & \text{если } v\notin\{a,b\},\\ j, & \text{если } v=a,\\ i, & \text{если } v=b.\end{cases}$$

Тогда

$$\operatorname{sgn}\pi x_{\varphi(\pi(1))}y_{\psi(\tau(1))}\ldots y_{\psi(\tau(n-1))}x_{\varphi(\pi(n))}+\operatorname{sgn}\pi' x_{\varphi(\pi'(1))}y_{\psi(\tau(1))}\ldots y_{\psi(\tau(n-1))}x_{\varphi(\pi'(n))}=$$
$$=\operatorname{sgn}\pi x_{\varphi(\pi(1))}y_{\psi(\tau(1))}\ldots y_{\psi(\tau(n-1))}x_{\varphi(\pi(n))}-\operatorname{sgn}\pi x_{\varphi(\pi'(1))}y_{\psi(\tau(1))}\ldots y_{\psi(\tau(n-1))}x_{\varphi(\pi'(n))}=0.$$

Отсюда следует, что $h_{2n-1}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},\,y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n-1)})=0$.

2. Для произвольного $\sigma\in S_n$ имеем:

$$h_{2n-1}(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)},y_1,\ldots,y_{n-1})=$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\sigma(\pi(1))}y_{\tau(1)}\ldots y_{\tau(n-1)}x_{\sigma(\pi(n))}=|\text{полагаем } \pi=\sigma^{-1}\alpha|=$$
$$=\sum_{\alpha\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\,\alpha x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(1))}y_{\tau(1)}\ldots y_{\tau(n-1)}x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(n))}=\operatorname{sgn}\sigma\, h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}).$$

3. Для любого $\rho\in A^+_{n-1}$ имеем:

$$h_{2n-1}(x_1,\ldots,x_n,y_{\rho(1)},\ldots,y_{\rho(n-1)})=$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\rho(\tau(1))}\ldots y_{\rho(\tau(n-1))}x_{\pi(n)}=|\text{ полагаем } \tau=\rho^{-1}\gamma\ |=$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\gamma\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(1))}\ldots y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(n-1))}x_{\pi(n)}=h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}).$$

4. Для любого $\omega\in A^-_{n-1}$ имеем:

$$h_{2n-1}(x_1,\ldots,x_n,y_{\omega(1)},\ldots,y_{\omega(n-1)})=$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\omega(\tau(1))}\ldots y_{\omega(\tau(n-1))}x_{\pi(n)}=|\text{ полагаем } \tau=\omega^{-1}\alpha\ |=$$
$$=\sum_{\pi\in S_n}\sum_{\alpha\in A^+_{n-1}}\operatorname{sgn}\pi x_{\pi(1)}y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(1))}\ldots y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(n-1))}x_{\pi(n)}=b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}). \qquad \square$$

Следствие 1. *Для любого натурального числа $n>1$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы равенства $\{b_{2n-1}\}^T=\{h_{2n-1}\}^T$, $\{b_{2n}\}^T=\{h_{2n}\}^T$.*

Предложение 2. *Для любого $s\in\{0,1\}$ многочлены $a_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$ обладают следующими свойствами:*

1) *если отображение $\psi: I_{n-s}\to\mathbf{N}$ не инъективно, а отображение $\varphi: I_n\to\mathbf{N}$ произвольно, то $a_{2n-s}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n-s)})=0$, $c_{2n-s}(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)},y_{\psi(1)},\ldots,y_{\psi(n-s)})=0$;*

2) *для любого* $\sigma \in S_{n-s}$ $a_{2n-s}(x_1,\dots,x_n,y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n-s)}) = \operatorname{sgn}\sigma\, a_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{2n-s}(x_1,\dots,x_n, y_{\sigma(1)},\dots,y_{\sigma(n-s)},) = \operatorname{sgn}\sigma\, c_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$;

3) *для любого* $\rho \in A_n^+$ $a_{2n-s}(x_{\rho(1)},\dots,x_{\rho(n)},y_1,\dots,y_{n-s}) = a_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{2n-s}(x_{\rho(1)},\dots,x_{\rho(n)}, y_1,\dots,y_{n-s}) = c_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$;

4) *для любого* $\omega \in A_n^-$ $a_{2n-s}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n)},y_1,\dots,y_{n-s}) = c_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$, $c_{2n-s}(x_{\omega(1)},\dots,x_{\omega(n)}, y_1,\dots,y_{n-s}) = a_{2n-s}(\bar{x},\bar{y})$.

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 1. □

Следствие 2. *Для любого натурального числа* $n > 1$ *в алгебре* $F\{Z\}$ *справедливы равенства* $\{a_{2n-1}\}^T = \{c_{2n-1}\}^T$, $\{a_{2n}\}^T = \{c_{2n}\}^T$.

Замечание 1. Из предложений 1 и 2 работы [3] следует, что $\{f_{2n-1}\}^T = \{g_{2n-1}\}^T$, $\{f_{2n}\}^T = \{g_{2n}\}^T$.

Совместно с многочленами $b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})$, $\dots$, $c_{2n}(\bar{x},\bar{y})$ рассмотрим транспонированные по отношению к ним многочлены

$$b^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$h^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^-_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$a^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in A^+_n}\sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\tau\, x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$c^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in A^-_n}\sum_{\tau\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\tau\, x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$b^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\tau\in A^+_n}\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)};$$
$$h^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\tau\in A^-_n}\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$a^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\tau\in S_n}\sum_{\pi\in A^+_n} \operatorname{sgn}\tau\, y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)},$$
$$c^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\tau\in S_n}\sum_{\pi\in A^-_n} \operatorname{sgn}\tau\, y_{\tau(n)}x_{\pi(n)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)}.$$

Утверждение 1. *Справедливы равенства*

1) *если* $(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } b^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n-1}b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}),\\ 2k-1, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } b^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n}h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y});\end{cases}$

2) *если* $(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } h^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n-1}h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}),\\ 2k-1, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } h^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n}b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y});\end{cases}$

3) *если* $n(n-1)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } a^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n-1}a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}),\\ 2k-1, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } a^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n}c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y});\end{cases}$

4) *если* $n(n-1)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } c^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n-1}c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y});\\ 2k-1, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } c^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = (-1)^{n}a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}).\end{cases}$

Доказательство. Проведем для первых равенств, поскольку для остальных оно аналогично. Итак,

$$b^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{\pi\in S_n}\sum_{\tau\in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}\pi\, x_{\pi(n)}y_{\tau(n-1)}x_{\pi(n-1)}\cdots y_{\tau(1)}x_{\pi(1)}.$$

Полагаем $\pi = \sigma\alpha$, $\tau = \rho\beta$, где $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, и заметим, что $\operatorname{sgn}\alpha = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} = (-1)^{n(n-1)/2}$, $\operatorname{sgn}\beta = (-1)^{(n-2)+(n-3)+\ldots+1} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} = (-1)^{n(n-1)/2}\cdot(-1)^{-2(n-1)/2} = (-1)^{n-1}\operatorname{sgn}\alpha$. Отсюда следует, что если

$$(n-1)(n-2)/2 = \begin{cases} 2k, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } \beta\in A^+_{n-1}, \text{ и тогда } \rho\in A^+_{n-1}; \\ 2k-1, \text{ где } k\in\mathbf{N}, & \text{то } \beta\in A^-_{n-1}, \text{ и тогда } \rho\in A^-_{n-1}; \end{cases}$$

и потому

$$b^*_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\alpha \sum\limits_{\sigma\in S_n}\sum\limits_{\rho\in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\dots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)} = (-1)^{n-1}b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}), \\ \operatorname{sgn}\alpha \sum\limits_{\sigma\in S_n}\sum\limits_{\rho\in A^-_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma x_{\sigma(1)}y_{\rho(1)}\dots y_{\rho(n-1)}x_{\sigma(n)} = (-1)^{n}h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}). \end{cases}$$ □

Утверждение 2. *Справедливы равенства*

1) *если* $n(n-1)/2 = 2k$, *где* $k\in\mathbf{N}$, *то* $b^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = a_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $h^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = c_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $a^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = b_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $c^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = h_{2n}(\bar{y},\bar{x})$;

2) *если* $n(n-1)/2 = 2k-1$, *где* $k\in\mathbf{N}$, *то* $b^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = -c_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $h^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = -a_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $a^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = -h_{2n}(\bar{y},\bar{x})$, $c^*_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = -b_{2n}(\bar{y},\bar{x})$.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 1. □

Предложение 3. *Справедливы равенства*

1) $b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i a_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\hat{i}}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}b_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y})x_i$;

2) $h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i c_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\hat{i}}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}h_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y})x_i$;

3) *если* $n=2k$, *то*

$$a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} x_{2i-1}b_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + x_{2i}h_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1} + a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i};$$

4) *если* $n=2k+1$, *то*

$$a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1}b_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i}h_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k+1} a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i};$$

5) *если* $n=2k$, *то*

$$c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} x_{2i-1}h_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + x_{2i}b_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}},\bar{y})x_{2i-1} + c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}},\bar{y})x_{2i};$$

6) *если* $n=2k+1$, *то*

$$c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1}h_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i}b_{2(n-1)}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} c_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y})x_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y})x_{2i}.$$

Доказательство. Проведем для первых равенств, поскольку для остальных оно аналогично. Итак, $b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n)$, причем для любого $i \in I_n$

$$x_i t_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S'_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $S'_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma\mu_i$, где $\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & n \\ i & 1 & \ldots & i-2 & i-1 & i+1 & \ldots & n \end{pmatrix}$, $\sigma(i) = i$. Заметим также, что $sgn\, \mu_i = (-1)^{i-1}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma\mu_i) x_{\sigma\mu_i(1)} y_{\tau(1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma\mu_i(n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}\, \sigma y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \ldots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \operatorname{sgn}\, \sigma y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \ldots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i a_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}}).$$

Докажем вторую часть первого равенства. Для этого заметим, что $b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) x_i$, причем для любого $i \in I_n$

$$v_i(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) x_i = \sum_{\pi \in \widetilde{S}_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $\widetilde{S}_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in \widetilde{S}_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma\rho_i$, где $\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \ldots & n & i \end{pmatrix}$, $\sigma(i) = i$. Заметим также, что $\operatorname{sgn} \rho_i = (-1)^{n-i}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma\rho_i) x_{\sigma\rho_i(1)} y_{\tau(1)} \ldots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma\rho_i(n)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in A^+_{n-1}} \operatorname{sgn}\, \sigma x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \ldots x_{\sigma(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma(i+1)} y_{\tau(i)} \ldots x_{\sigma(n)} y_{\tau(n-1)} x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} b_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}) x_i. \qquad \square$$

Предложение 4. *Справедливы равенства*

1) $b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i a_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{i}})$;

2) *если* $n = 2k$, *то*

$$b_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} h_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1} + b_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i};$$

3) *если* $n = 2k+1$, *то*

$$b_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i};$$

4) $h_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i c_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{i}});$

5) *если* $n = 2k$, *то*

$$h_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1} + h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i};$$

6) *если* $n = 2k+1$, *то*

$$h_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i-1}})y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{k} b_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}})y_{2i};$$

7) *если* $n = 2k$, *то*

$$a_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} x_{2i-1} b_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + x_{2i} h_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i}})y_i;$$

8) *если* $n = 2k+1$, *то*

$$a_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} b_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i} h_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{2i}}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i}})y_i;$$

9) *если* $n = 2k$, *то*

$$c_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k} x_{2i-1} h_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + x_{2i} b_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i}})y_i;$$

10) *если* $n = 2k+1$, *то*

$$c_{2n}(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{k+1} x_{2i-1} h_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i-1}}) + \sum_{i=1}^{k} x_{2i} b_{2n-1}(\bar{y},\bar{x}_{\widehat{2i}}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} c_{2n-1}(\bar{x},\bar{y}_{\widehat{i}})y_i.$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3. □

Утверждение 3. *Для любого натурального числа* $n > 2$ *в алгебре* $F\{Z\}$ *справедливы включения*

1) $\{b_{2n-1}\}^T \supseteq \{b_{2n}\}^T \supseteq \{b_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{b_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots;$
2) $\{h_{2n-1}\}^T \supseteq \{h_{2n}\}^T \supseteq \{h_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{h_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots;$
3) $\{a_{2n-1}\}^T \supseteq \{a_{2n}\}^T \supseteq \{a_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{a_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots;$
4) $\{c_{2n-1}\}^T \supseteq \{c_{2n}\}^T \supseteq \{c_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{c_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots;$
5) $\{f_{2n-1}\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T \supseteq \{f_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{f_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots;$
6) $\{g_{2n-1}\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T \supseteq \{g_{2(n+1)-1}\}^T \supseteq \{g_{2(n+1)}\}^T \supseteq \ldots.$

Доказательство. Включения 1), 2) вытекают из следствия 1, предложений 3 и 4; включения 3), 4) — из следствия 2, предложений 3 и 4; включения 5), 6) следуют из замечания 1, предложений 3 и 4 работы [3]. □

2. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ КАПЕЛЛИ

В этом пункте мы продолжим изучение свойств квазимногочленов Капелли. Ввиду однообразности рассуждений мы ограничимся рассмотрением лишь многочленов f_{2n-1} и f_{2n}. Пусть q, n — любые натуральные числа, для которых $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $j = \{j_1, \dots, j_q\}$ — произвольное подмножество множества $I_n = \{1, \dots, n\}$, $i = I_n \backslash j = \{i_1, \dots, i_{n-q}\}$, $l = \{l_1, \dots, l_{q-1}\} (q > 1)$, $p = \{p_1, \dots, p_q\} (q < n-1)$ — какие-либо подмножества множества I_{n-1}, $a = I_{n-1} \setminus l = \{a_1, \dots, a_{n-q}\}$, $b = I_{n-1} \setminus p = \{b_1, \dots, b_{n-1-q}\}$, $r = n - q$. При этом будем считать, что $j_1 < \dots < j_q$, $i_1 < \dots < i_r$, $l_1 < \dots < l_{q-1}$, $p_1 < \dots < p_q$, $a_1 < \dots < a_r$, $b_1 < \dots < b_{r-1}$.

Кроме того, положим $J_q = \{j \subset I_n \,|\, Card\, j = q\}$, $L_{q-1} = \{l \subset I_{n-1} \,|\, Card\, l = q-1\}$, $P_q = \{p \subset I_{n-1} \,|\, Card\, p = q\}$, $A_n^+ = \{\pi \in S_n \,|\, \operatorname{sgn} \pi = 1\}$, $A_n^- = \{\pi \in S_n \,|\, \operatorname{sgn} \pi = -1\}$. Каждому элементу $j \in J_q$, $l \in L_{q-1}$, $p \in P_q$ поставим в соответствие подстановку $\alpha_j \in S_n$, $\gamma_l \in S_{n-1}$, $\varepsilon_p \in S_{n-1}$, где $\alpha_j = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r \\ j_1 & \dots & j_q & i_1 & \dots & i_r \end{pmatrix}$, $\gamma_l = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q-1 & q & \dots & q+r-1 \\ l_1 & \dots & l_{q-1} & a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix}$, $\varepsilon_p = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+r-1 \\ p_1 & \dots & p_q & b_1 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix}$, и обозначим через $J_q^+ = \{j \in J_q \,|\, \operatorname{sgn} \alpha_j = 1\}$, $J_q^- = \{j \in J_q \,|\, \operatorname{sgn} \alpha_j = -1\}$, $L_{q-1}^+ = \{l \in L_{q-1} \,|\, \operatorname{sgn} \gamma_l = 1\}$, $L_{q-1}^- = \{l \in L_{q-1} \,|\, \operatorname{sgn} \gamma_l = -1\}$, $P_q^+ = \{p \in P_q \,|\, \operatorname{sgn} \varepsilon_p = 1\}$, $P_q^- = \{p \in P_q \,|\, \operatorname{sgn} \varepsilon_p = -1\}$.

Предложение 5. *Справедливы равенства*

1) *при* $1 < q < n-1$ $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = R_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + R_{-+}(\bar{x}, \bar{y})$, *где*

$$R_{++}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^+} f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) f_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}) - g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) g_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R_{--}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^-} f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) f_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}) - g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) g_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{l \in L_{q-1}^-} g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) f_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}) - f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) g_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^-} \sum_{l \in L_{q-1}^+} g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) f_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}}) - f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{a}}) g_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}}, \bar{x}_{\hat{j}})$$

(запись $\bar{z}_{\hat{c}}$ означает, что из множества переменных $\{z_1, \dots, z_k\}$ удалены переменные с индексами из множества c);

2) *при* $1 < q < n-1$ $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = Q_{++}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{--}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) + Q_{-+}(\bar{x}, \bar{y})$, *где*

$$Q_{++}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p \in P_q^+} f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) f_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}) - g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) g_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}),$$

$$Q_{--}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p \in P_q^-} f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) f_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}) - g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) g_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}),$$

$$Q_{+-}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^+} \sum_{p \in P_q^-} g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) f_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}) - f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) g_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}),$$

$$Q_{-+}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q^-} \sum_{p \in P_q^+} g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) f_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}) - f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}}, \bar{y}_{\hat{b}}) g_{2r-1}(\bar{x}_{\hat{j}}, \bar{y}_{\hat{p}}).$$

Доказательство. Проведем для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. В связи с этим заметим, что

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j \in J_q} \sum_{l \in L_{q-1}} t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}),$$

где

$$t_{jl}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n(j)} \sum_{\tau \in S_{n-1}(l)} \operatorname{sgn}\, \pi \cdot \delta_{sgn\, \pi \operatorname{sgn}\, \tau} (x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \dots x_{\pi(q)}) \cdot (y_{\tau(q)} x_{\pi(q+1)} \dots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}),$$

$$S_n(j)=\{\pi\in S_n\,|\,\pi(I_q)=j,\,\pi(\{q+1,\dots,n\})=i\},$$
$$S_{n-1}(l)=\{\tau\in S_{n-1}\,|\,\tau(I_{q-1})=l,\,\tau(\{q,\dots,n-1\})=a\}.$$

Нетрудно видеть, что для любых $\pi\in S_n(j)$, $\tau\in S_{n-1}(l)$ верны равенства

$$\pi=\sigma_\pi\mu_\pi\alpha_j,\qquad \tau=\rho_\tau\omega_\tau\gamma_l,$$

где

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}1&\dots&q&q+1&\dots&q+r\\ j_1&\dots&j_q&i_1&\dots&i_r\end{pmatrix},\qquad \mu_\pi=\begin{pmatrix}j_1&\dots&j_q&i_1&\dots&i_r\\ j_1&\dots&j_q&\pi(i_1)&\dots&\pi(i_r)\end{pmatrix},$$
$$\sigma_\pi=\begin{pmatrix}j_1&\dots&j_q&i_1&\dots&i_r\\ \pi(j_1)&\dots&\pi(j_q)&i_1&\dots&i_r\end{pmatrix},\qquad \gamma_l=\begin{pmatrix}1&\dots&q-1&q&\dots&q+r-1\\ l_1&\dots&l_{q-1}&a_1&\dots&a_r\end{pmatrix},$$
$$\omega_\tau=\begin{pmatrix}l_1&\dots&l_{q-1}&a_1&\dots&a_r\\ l_1&\dots&l_{q-1}&\tau(a_1)&\dots&\tau(a_r)\end{pmatrix},\qquad \rho_\tau=\begin{pmatrix}l_1&\dots&l_{q-1}&a_1&\dots&a_r\\ \tau(l_1)&\dots&\tau(l_{q-1})&a_1&\dots&a_r\end{pmatrix}.$$

Положим $B_n(i)=\{\mu\in S_n\,|\,\mu_{|j}=id\}$, $C_n(j)=\{\sigma\in S_n\,|\,\sigma_{|i}=id\}$, $D_{n-1}(a)=\{\omega\in S_{n-1}\,|\,\omega_{|l}=id\}$, $T_{n-1}(l)=\{\rho\in S_{n-1}\,|\,\rho_{|a}=id\}$. Очевидно, что $B_n(i)\cong S_r$, $C_n(j)\cong S_q$, $D_{n-1}(a)\cong S_r$, $T_{n-1}(l)\cong S_{q-1}$. Тогда

$$t_{jl}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{\sigma\in C_n(j)}\sum_{\mu\in B_n(i)}\sum_{\rho\in T_{n-1}(l)}\sum_{\omega\in D_{n-1}(a)}\operatorname{sgn}(\sigma\mu\alpha_j)\delta_{sgn(\sigma\mu\alpha_j)\operatorname{sgn}(\rho\omega\gamma_l)}\times$$
$$\times(x_{\sigma\mu\alpha_j(1)}y_{\rho\omega\gamma_l(1)}\dots x_{\sigma\mu\alpha_j(q)})\cdot(y_{\rho\omega\gamma_l(q)}x_{\sigma\mu\alpha_j(q+1)}\dots y_{\rho\omega\gamma_l(n-1)}x_{\sigma\mu\alpha_j(n)})=$$
$$=\operatorname{sgn}\alpha_j\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{sgn\alpha_j\operatorname{sgn}(\sigma\mu)\operatorname{sgn}\gamma_l\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}y_{l_{\rho(1)}}\dots x_{j_{\sigma(q)}})\times$$
$$\times(y_{a_{\omega(1)}}x_{j_{\mu(1)}}\cdots y_{a_{\omega(r)}}x_{i_{\mu(r)}}).$$

Следовательно,

$$f_{2n-1}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q}\sum_{l\in L_{q-1}}t_{jl}(\bar{x},\bar{y})=$$
$$=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{sgn(\sigma\mu)\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)-$$
$$-\sum_{j\in J_q^-}\sum_{l\in L_{q-1}^-}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{sgn(\sigma\mu)\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)+$$
$$+\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^-}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{sgn(\sigma\mu)\,-\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)-$$
$$-\sum_{j\in J_q^-}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in S_r}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{-sgn(\sigma\mu)\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots).$$

Для первого слагаемого $F_1(\bar{x},\bar{y})$ в последнем равенстве имеем:

$$F_1(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in A_r^+}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta_{sgn\sigma\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)+$$
$$+\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in S_r}\sum_{\mu\in A_r^-}\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\mu\,\delta_{-sgn\sigma\operatorname{sgn}(\rho\omega)}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)=$$
$$=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in A_r^+}\sum_{\mu\in A_r^+}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta_{sgn\sigma\operatorname{sgn}\rho}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)+$$
$$+\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in A_r^-}\sum_{\mu\in A_r^+}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta_{sgn\sigma\,-sgn\rho}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)-$$

$$-\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in A_r^+}\sum_{\mu\in A_r^-}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta_{-sgn\sigma\operatorname{sgn}\rho}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)-$$

$$-\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}\sum_{\sigma\in S_q}\sum_{\rho\in S_{q-1}}\sum_{\omega\in A_r^-}\sum_{\mu\in A_r^-}\operatorname{sgn}\sigma\,\delta_{-sgn\sigma\, -sgn\rho}(x_{j_{\sigma(1)}}\cdots)(y_{a_{\omega(1)}}\cdots)=$$

$$=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l\in L_{q-1}^+}f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}})f_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}},\bar{x}_{\hat{j}})-g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}})g_{2r}(\bar{y}_{\hat{l}},\bar{x}_{\hat{j}})=R_{++}(\bar{x},\bar{y}).$$

Аналогичным образом приходим к равенствам $F_2(\bar{x},\bar{y})=R_{--}(\bar{x},\bar{y})$, $F_3(\bar{x},\bar{y})=R_{+-}(\bar{x},\bar{y})$, $F_4(\bar{x},\bar{y})=R_{-+}(\bar{x},\bar{y})$. □

Пусть $l'=\{l'_1,\ldots,l'_{q-1}\}(q>1)$, $p'=\{p'_1,\ldots,p'_q\}(q<n)$ — какие-либо подмножества множества I_n, $a'=I_n\setminus l'=\{a'_1,\ldots,a'_{n+1-q}\}$, $b'=I_n\setminus p'=\{b'_1,\ldots,b'_{n-q}\}$, $r=n-q$. При этом будем считать, что $l'_1<\ldots<l'_{q-1}$, $p'_1<\ldots<p'_q$, $a'_1<\ldots<a'_{r+1}$, $b'_1<\ldots<b'_r$. Кроме того, положим $L'_{q-1}=\{l'\subset I_n\,|\,Card\,l'=q-1\}$, $P'_q=\{p'\subset I_n\,|\,Card\,p'=q\}$. Каждому элементу $l'\in L'_{q-1}$, $p'\in P'_q$ поставим в соответствие подстановку $\omega_{l'}\in S_n$, $\varepsilon_{p'}\in S_n$, где $\omega_{l'}=\begin{pmatrix}1&\ldots&q-1&q&\ldots&q+r\\ l'_1&\ldots&l'_{q-1}&a'_1&\ldots&a'_{r+1}\end{pmatrix}$, $\varepsilon_{p'}=\begin{pmatrix}1&\ldots&q&q+1&\ldots&q+r\\ p'_1&\ldots&p'_q&b'_1&\ldots&b'_r\end{pmatrix}$, и обозначим через $L'^{+}_{q-1}=\{l'\in L'_{q-1}\,|\,\operatorname{sgn}\omega_{l'}=1\}$, $L'^{-}_{q-1}=\{l'\in L'_{q-1}\,|\,\operatorname{sgn}\omega_{l'}=-1\}$, $P'^{+}_q=\{p'\in P'_q\,|\,\operatorname{sgn}\varepsilon_{p'}=1\}$, $P'^{-}_q=\{p'\in P'_q\,|\,\operatorname{sgn}\varepsilon_{p'}=-1\}$.

Предложение 6. *Справедливы равенства*

1) *при* $1<q\leqslant n-1$

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y})=R'_{++}(\bar{x},\bar{y})+R'_{--}(\bar{x},\bar{y})+R'_{+-}(\bar{x},\bar{y})+R'_{-+}(\bar{x},\bar{y}),$$

где

$$R'_{++}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l'\in L'^{+}_{q-1}}f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}})-g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R'_{--}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^-}\sum_{l'\in L'^{-}_{q-1}}f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}})-g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R'_{+-}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{l'\in L'^{-}_{q-1}}g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}})-f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}}),$$

$$R'_{-+}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^-}\sum_{l'\in L'^{+}_{q-1}}g_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})f_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}})-f_{2q-1}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{a}'})g_{2(r+1)-1}(\bar{y}_{\hat{l}'},\bar{x}_{\hat{j}});$$

2) *при* $1<q<n-1$

$$f_{2n}(\bar{x},\bar{y})=Q'_{++}(\bar{x},\bar{y})+Q'_{--}(\bar{x},\bar{y})+Q'_{+-}(\bar{x},\bar{y})+Q'_{-+}(\bar{x},\bar{y}),$$

где

$$Q'_{++}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{p'\in P'^{+}_q}f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})f_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'})-g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})g_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'}),$$

$$Q'_{--}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^-}\sum_{p'\in P'^{-}_q}f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})f_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'})-g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})g_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'}),$$

$$Q'_{+-}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^+}\sum_{p'\in P'^{-}_q}g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})f_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'})-f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})g_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'}),$$

$$Q'_{-+}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j\in J_q^-}\sum_{p'\in P'^{+}_q}g_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})f_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'})-f_{2q}(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{y}_{\hat{b}'})g_{2r}(\bar{x}_{\hat{j}},\bar{y}_{\hat{p}'}).$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 5. □

3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ СТАНДАРТНОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над F.

Определение. Многочлен $d \in F\{Z\}$ называется *полиномиальным тождеством алгебры* A, если для любого гомоморфизма $\varphi \in Hom_F(F\{Z\}, A)$ справедливо равенство $\varphi(d) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств алгебры A является T-идеалом алгебры $F\{Z\}$. Этот идеал называется идеалом тождеств алгебры A и обозначается символом $T[A]$. Заметим, что всякая конечномерная алгебра A обладает хотя бы одним полиномиальным тождеством, например, им является стандартный многочлен $S_n^-(z_1, \ldots, z_n) = \sum\limits_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi\, z_{\pi(1)} \cdots z_{\pi(n)}$ при $n > \dim A$. Но тогда, как показывает приводимое ниже предложение, начиная с некоторой степени тождествами алгебры A будут и квазимногочлены Капелли.

Предложение 7. *Для любого натурального числа $n > 1$ в алгебре $F\{Z\}$ справедливы включения*
1) $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$;
2) *если* $\operatorname{char} F \neq 2$, *то* $\{S_n^-\}^T \supseteq \{b_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{h_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{a_{2n}\}^T$, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{c_{2n}\}^T$.

Доказательство. Пусть σ — произвольный элемент группы A_n^+. Определим эндоморфизм φ_σ алгебры $F\{Z\}$, положив $\varphi_\sigma(z) = \begin{cases} x_i y_{\sigma(i)}, \text{ если } z = x_i,\ i = \overline{1,n}; \\ z, \text{ если } z \notin \{x_1, \ldots, x_n\}. \end{cases}$ Тогда

$$\sum_{\sigma \in A_n^+} \varphi_\sigma(S_n^-(\bar{x})) = \sum_{\sigma \in A_n^+} \left(\sum_{\pi \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\sigma\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\sigma\pi(n)} - \sum_{\omega \in A_n^-} x_{\omega(1)} y_{\sigma\omega(1)} \cdots x_{\omega(n)} y_{\sigma\omega(n)} \right).$$

Полагаем $\sigma = \rho_{\sigma\pi}\pi^{-1}$ в первой сумме и $\sigma = \mu_{\sigma\omega}\omega^{-1}$ во второй, получаем:

$$\sum_{\sigma \in A_n^+} \varphi_\sigma(S_n^-(\bar{x})) = \sum_{\pi \in A_n^+} \sum_{\rho \in A_n^+} x_{\pi(1)} y_{\rho(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\rho(n)} - \sum_{\omega \in A_n^-} \sum_{\mu \in A_n^-} x_{\omega(1)} y_{\mu(1)} \cdots x_{\omega(n)} y_{\mu(n)} = f_{2n}.$$

Следовательно, $\{S_n^-\}^T \supseteq \{f_{2n}\}^T$, отсюда и из замечания 1 получаем, что $\{S_n^-\}^T \supseteq \{g_{2n}\}^T$.

Пусть $\operatorname{char} F \neq 2$. Легко проверить, что $2b_{2n} = f_{2n} + g_{2n} + C_{2n}$, $2a_{2n} = f_{2n} - g_{2n} + C_{2n}$, где $C_{2n} = \sum\limits_{\pi \in S_n} \sum\limits_{\tau \in S_n} sgn(\pi\tau) x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)}$, причем по теореме 1 из [4] (см. также [5]) $\{C_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$. Отсюда, а также из доказанных включений и следствий 1, 2 получаем, что $\{b_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$, $\{a_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$, $\{h_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$, $\{c_{2n}\}^T \subseteq \{S_n^-\}^T$. □

Пусть $A = M_m(F)$ — матричная алгебра над F. Тогда в силу теоремы Амицура – Левицкого [6] наименьшее n, при котором $S_n^- \in T[M_m(F)]$, равно $2m$.

Предложение 8. *Наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором каждый из квазимногочленов Капелли $b_{2n}, h_{2n}, a_{2n}, c_{2n}, f_{2n}, g_{2n} \in T[M_m(F)]$, равно $2m$.*

Доказательство. Проведем для многочлена b_{2n}, поскольку для остальных оно аналогично. Пусть $\operatorname{char} F \neq 2$ и $d(m, F)$ означает наименьшее $n \in \mathbf{N}$, при котором $b_{2n} \in T[M_m(F)]$. Тогда из предложения 7 следует, что $d(m, F) \leqslant 2m$, а из теоремы 4 работы [2] следует, что $d(m, F) > 2m - 1$. Отсюда $d(m, F) = 2m$. Так как коэффициенты многочлена b_{2n} равны ± 1, то ограничение $\operatorname{char} F \neq 2$ для матричной алгебры $M_m(F)$ становится несущественным и потому его можно снять. □

Библиографический список

1. *Аверьянов И. В.* Базис градуированных тождеств супералгебры $M_{1,2}(F)$ // Матем. заметки. 2009. Т. 85, вып. 4. С. 483–501. DOI: 10.4213/mzm4298.
2. *Антонов С. Ю.* Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Изв. вузов. Матем. 2012. № 11. С. 3–19.
3. *Антонов С. Ю.* Некоторые виды тождеств подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(m,k)}(F)$ // Учён. зап. Казан. гос.

ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, № 1. С. 189–201.
4. *Chang Q.* Some consequences of the standard polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. Vol. 104, № 3. P. 707–710.
5. *Антонов С. Ю., Антонова А. В.* К теореме Ченга// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С. 247–251.
6. *Amitsur S. A., Levitzki J.* Minimal identities for algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. Vol. 1, № 4. P. 449–463.

Quasi-polynomials of Capelli

S. Yu. Antonov[1], A. V. Antonova[2]

[1] Antonov Stepan Yuryevich, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovst-vm@rambler.ru

[2] Antonova Alina Vladimirovna, Kazan State Power Engineering University, 51, Krasnosel'skaya st., 420066, Kazan, Russia, antonovakazan@rambler.ru

This paper deals with the class of Capelli polynomials in free associative algebra $F\{Z\}$ where F is an arbitrary field and Z is a countable set. The interest to these objects is initiated by assumption that the polynomials (Capelli quasi-polynomials) of some odd degree introduced will be contained in the basis ideal Z_2-graded identities of Z_2-graded matrix algebra $M^{(m,k)}(F)$ when $\mathrm{char}\, F = 0$. In connection with this assumption the fundamental properties of Capelli quasi-polynomials have been given in the paper. In particularly, the decomposition of Capelli type polynomials have been given by the polynomials of the same type and some betweeness of their T-ideals have been shown. Besides, taking into account some properties of Capelli quasi-polynomials obtained and also the Chang theorem we show that all Capelli quasi-polynomials of even degree $2n$ $(n > 1)$ are consequence of standard polynomial S_n^- in case when the characteristic of field F is not equal to two. At last we find the least $n \in N$ at which any of Capelli quasi-polynomials of even degree $2n$ belongs to ideal of matrix algebra $M_m(F)$ identities.

Key words: T-ideal, standard polynomial, Capelli polynomial.

References

1. Averyanov I. V. Basis of graded identities of the superalgebra $M_{1,2}(F)$. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, iss. 4, pp. 467–483. DOI: 10.1134/S0001434609030195.
2. Antonov S. Yu. The least degree identities subspace $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2012, no. 11, pp. 1–16. DOI: 10.3103/S1066369X12110011.
3. Antonov S. Yu. Some types of identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of matrix superalgebra $M^{(m,k)}(F)$. *Kazan. Gos. Univ. Uchen. Zap. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 189–201 (in Russian).
4. Chang Q. Some consequences of the standard polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, vol. 104, no. 3, pp. 707–710.
5. Antonov S. Yu., Antonova A. V. To Chang Theorem. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 3, pp. 247–251 (in Russian).
6. Amitsur S. A., Levitzki J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1950, vol. 1, no. 4, pp. 449–463.