УДК 517.938

ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАДАЧЕ ФАНЬЯНО

А. И. Рубинштейн, Д. С. Теляковский

[1] Доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва; профессор кафедры высшей математики, Московский государственный университет леса, Rubinshtein_aleksandr@mail.ru

[2] Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Dtelyakov@mail.ru

Даются два решения задачи Фаньяно о нахождении трёхзвенной биллиардной траектории в треугольнике.

Ключевые слова: биллиардная траектория, задача Фаньяно.

Пусть G — плоская область с гладкой или кусочно-гладкой границей ∂G. Биллиардной траекторией в G называется неограниченно продолжаемая ломаная, вершины (узлы) которой лежат на ∂G, все остальные точки — внутри G, а два звена с общей вершиной $M \in \partial G$ образуют равные углы с касательной, проведённой к ∂G в точке M — правило биллиардного отражения: «угол падения равен углу отражения». Биллиардное отражение в угловых точках ∂G считается невозможным, и траектория, попавшая в угловую точку, заканчивается в ней.

В общем случае биллиардная траектория состоит из бесконечной последовательности звеньев, но могут существовать и периодические траектории, которые представляются ломаными с конечным числом звеньев, проходимыми бесконечно много раз. В статье с элементарной точки зрения рассматривается вопрос о существовании периодических биллиардных траекторий в треугольниках.

Одной из первых задач о периодических биллиардных траекториях фактически является поставленная в 1775 г. задача Фаньяно (см. напр. [1, с. 99]), хотя в её исходной формулировке о биллиардах не упоминается.

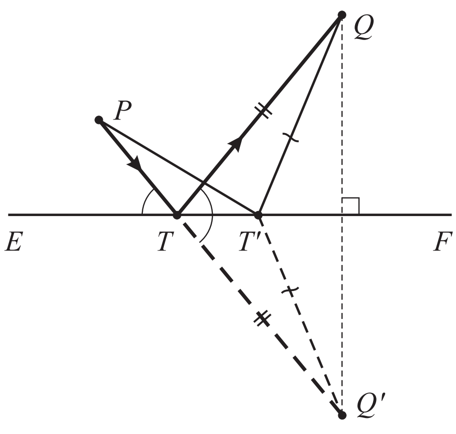
Задача Фаньяно 1. *Найти треугольник минимального периметра, вписанный в данный треугольник ABC.*

Поскольку $\triangle ABC$ является ограниченным и замкнутым множеством, а периметр вписанного треугольника непрерывно зависит от расположения его вершин на сторонах $\triangle ABC$, существуют вписанные треугольники максимального и минимального периметров. Треугольником максимального периметра является сам $\triangle ABC$. Треугольник минимального периметра может вырождаться в отрезок, исходящий из одной из вершин $\triangle ABC$, в этом случае длина этого отрезка считается два раза.

Покажем, что если невырожденный вписанный треугольник минимального периметра существует, то он является трёхзвенной биллиардной траекторией, вписанной в треугольник ABC.

Действительно, сумма расстояний от точек P и Q, лежащих с одной стороны от прямой EF до точки T этой прямой минимальна, если $\measuredangle PTE = \measuredangle QTF$ (рис. 1, *а*). Поэтому T — это такая точка прямой EF, что исходящий из P луч после биллиардного отражения от EF в точке T пройдёт через точку Q.

Пусть $M_1M_2M_3$ — невырожденный треугольник минимального периметра, вписанный в $\triangle ABC$ (рис. 1, *б*). Тогда углы $\angle M_3M_1A$ и $\angle M_2M_1B$ равны, так как в противном случае, изменяя положение



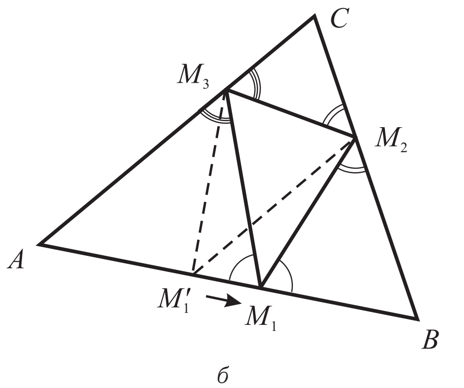


Рис. 1

точки M_1 на стороне AB, периметр $\triangle M_1M_2M_3$ можно было бы уменьшить, что противоречит предположению о минимальности периметра $\triangle M_1M_2M_3$. Значит, луч M_1M_2 является биллиардным отражением луча M_3M_1 от стороны AB. Рассматривая аналогично остальные вершины $\triangle M_1M_2M_3$, видим, что $M_1M_2M_3$ — замкнутая трёхзвенная биллиардная траектория, вписанная в $\triangle ABC$. Поэтому задачу Фаньяно можно переформулировать следующим образом.

Задача Фаньяно 2. *Найти трёхзвенную биллиардную траекторию, вписанную в данный треугольник ABC.*

То, что трёхзвенная биллиардная траектория в треугольнике ABC имеет минимальную длину среди треугольников, вписанных в $\triangle ABC$, является проявлением свойства экстремальности длин биллиардных траекторий — вписанная в ∂G ломаная экстремальной длины (имеющая локальный максимум или минимум) является периодической биллиардной траекторией [1, с. 97–98].

Если биллиардная траектория отражается от прямолинейного участка границы области G, то при симметричном отображении области G относительно этого участка границы ∂G образ отражённого звена траектории лежит на продолжении звена траектории до отражения. На рис. 1, *а* отрезок TQ', симметричный отражённому звену TQ, лежит на продолжении звена PT. Это называется распрямлением биллиардной траектории. Рассматривать распрямлённые траектории, особенно для биллиардов внутри многоугольников, часто бывает удобнее, чем траектории в исходной области.

Наиболее известными решениями задачи Фаньяно являются решения Г. А. Шварца и Л. Фейера [2, с. 36–44]. Эти решения существенно используют свойство экстремальности длины биллиардной траектории. Приведём два решения задачи Фаньяно, не использующие свойства экстремальности длины периодической биллиардной траектории. Одно решение основано на методе распрямления биллиардной траектории, другое является чисто геометрическим.

Предположим, что $M_1M_2M_3$ — трёхзвенная биллиардная траектория в треугольнике ABC (рис. 2, *а*). Распрямим эту траекторию начиная со звена M_1M_2. Для этого потребуются выполнить две симметрии: сначала относительно отрезка CB, а потом относительно отрезка CA' ($\triangle A'BC$ — образ $\triangle ABC$ при первой симметрии, а $\triangle A'B'C$ — образ $\triangle A'BC$ при второй). Ясно, что $\triangle A'B'C$ получается при повороте $\triangle ABC$ вокруг точки C на угол $2\measuredangle BCA$. Распрямлённая траектория является отрезком, соединяющим начальную точку траектории M_1 и точку M_1' — образ M_1 при повороте.

Покажем сначала, что трёхзвенная биллиардная траектория может существовать только в остроугольных треугольниках. Распрямлённая траектория M_1M_1', должна целиком лежать в объединении $\triangle ABC \cup \triangle A'BC \cup \triangle A'B'C$ и пересекать отрезки CB и CA'. Если угол $\angle BCA$ прямой, то точка M_1' лежит на CM_1, и, значит, траектория $M_1M_2M_3$ должна пройти через вершину C (рис. 2, *б*), если же угол $\angle BCA$ тупой, то точка M_1' и отрезок CB лежат по разные стороны от прямой CM_1 (рис. 2, *в*). Ни в одном из этих случаев биллиардная траектория существовать не может.

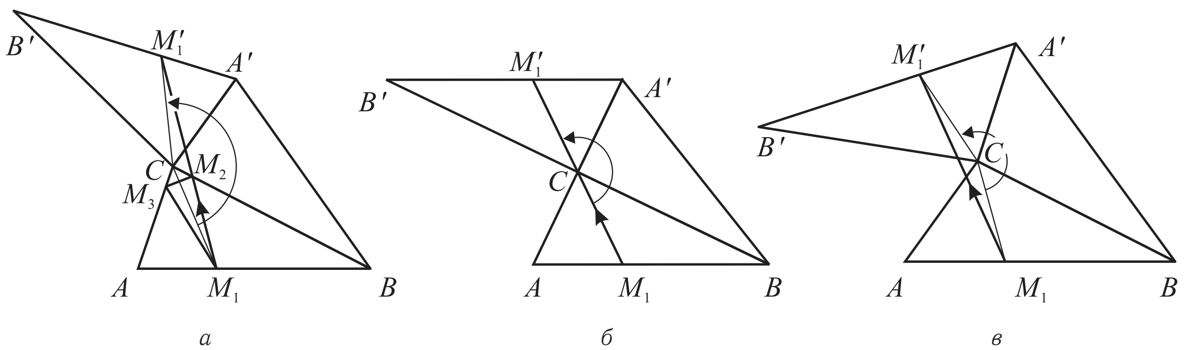
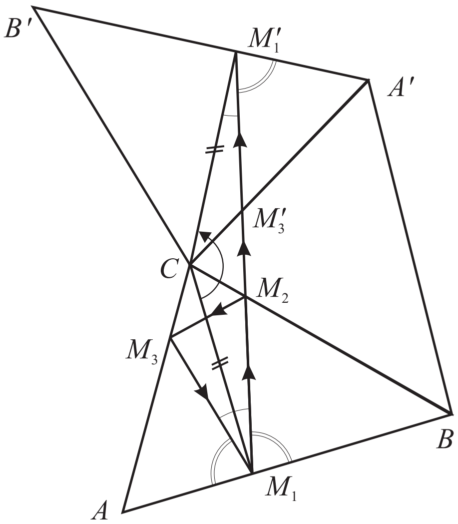


Рис. 2

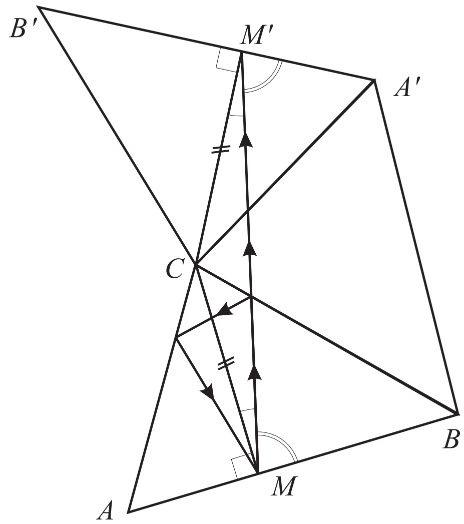
Значит, искать трёхзвенные биллиардные траектории имеет смысл только в остроугольных треугольниках. Пусть отрезок M_1M_1' — распрямление периодической биллиардной траектории $M_1M_2M_3$ (рис. 3, *а*). Поскольку M_1' — образ точки M_1 при повороте $\triangle ABC$ вокруг точки C, то длины отрезков CM_1 и CM_1' равны, треугольник CM_1M_1' равнобедренный и, значит, углы $\angle CM_1M_1'$ и $\angle CM_1'M_1$ равны. Углы $\angle M_3M_1A$ и $\angle M_2M_1B$ равны, поскольку траектория $M_1M_2M_3$ биллиардная. Угол $\angle M_3'M_1'A'$ образ угла $\angle M_3M_1A$ при повороте вокруг точки C. Поэтому углы $\angle M_2M_1B$ и $\angle M_3'M_1'A'$ равны. Отсюда и из равенства $\measuredangle M_1'M_1C = \measuredangle M_1M_1'C$ следует равенство углов $\angle CM_1B$ и $\angle CM_1'A'$. Но угол $\angle CM_1'A'$ — образ угла $\angle CM_1A$ при повороте вокруг C. Таким образом, углы $\angle CM_1A$ и $\angle CM_1B$

равны и, значит, они прямые. Следовательно, точка M_1 — основание высоты, опущенной из вершины C на сторону AB. Аналогично доказываем, что точки M_2 и M_3 являются основаниями высот, опущенных из A на BC и из B на CA соответственно. Значит, трёхзвенная биллиардная траектория, если она существует, соединяет основания высот треугольника $\triangle ABC$. Отсюда, в частности, следует единственность решения задачи Фаньяно.

Теперь покажем, что в произвольном остроугольном треугольнике ABC существует трёхзвенная биллиардная траектория. Пусть M — основание высоты, опущенной из вершины C треугольника ABC на сторону AB (рис. 3, *б*). Пусть, как и раньше, $\triangle A'B'C$ получается из $\triangle ABC$ при двух последовательных симметриях, при этом точка M' треугольника $A'B'C$ соответствует точке $M \in \triangle ABC$. Начнём биллиардную траекторию из точки M в направлении MM'. Отрезок MM' является распрямлением этой траектории после двух последовательных отражений от сторон BC и CA, и поскольку точка M' соответствует точке M, то после двух отражений траектория возвращается в исходную точку M. Для того чтобы показать, что эта траектория является биллиардной, достаточно проверить, что в точке M угол падения равен углу отражения, т. е. надо установить равенство углов $\angle M'MB$ и $\angle MM'A'$ (угол в $\triangle ABC$, соответствующий углу $\angle MM'A'$, является углом, под которым траектория возвращается в точку M после двух отражений). Но эти углы равны, так как они дополняют до прямых углов равные углы равнобедренного треугольника CMM'. Этим существование трёхзвенной биллиардной траектории в произвольном остроугольном треугольнике доказано.



а



б

Рис. 3

Что касается задачи Фаньяно в первоначальной формулировке, то в прямоугольных и тупоугольных треугольниках вписанный треугольник минимального периметра (а он существует всегда в отличие от вписанной биллиардной траектории) вырождается в отрезок, исходящий из одной из вершин $\triangle ABC$, длина которого считается два раза. Ясно, что таким отрезком минимальной длины является высота, опущенная из вершины тупого или прямого угла треугольника.

Теперь приведём второе, чисто геометрическое решение задачи Фаньяно. Пусть $A_1B_1C_1$ — трёхзвенная биллиардная траектория в остроугольном треугольнике ABC, точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах $\triangle ABC$, противоположных соответственно вершинам A, B и C.

В $\triangle ABC$ обозначим α, β и γ величины углов при вершинах A, B и C, a, b и c — длины противоположных этим вершинам сторон. Пусть φ, ψ и θ — величины углов, которые образуют звенья траектории $A_1B_1C_1$ со сторонами $\triangle ABC$ в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно (рис. 4, *а*).

Покажем сначала, что $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ и $\theta = \gamma$. Действительно, так как величина угла при вершине A в треугольниках ABC и AB_1C_1 равна α, то $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ и $\alpha = \pi - (\psi + \theta)$. Углы при вершине A_1 в $\triangle A_1B_1C$ и $\triangle A_1BC_1$ равны φ. Поэтому $\varphi = \pi - (\gamma + \psi)$ и $\varphi = \pi - (\beta + \theta)$. Из этих выражений для φ и α получаем:

$$2\varphi = \pi - (\gamma + \psi) + \pi - (\beta + \theta) = \pi - (\beta + \gamma) + \pi - (\psi + \theta) = 2\alpha.$$

Равенства $\psi = \beta$ и $\theta = \gamma$ доказываются аналогично. Поскольку по смыслу задачи углы φ, ψ и θ острые, то из равенств $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$ и $\gamma = \theta$ ещё раз, уже из других соображений, чем при первом решении задачи Фаньяно, получаем, что трёхзвенная биллиардная траектория может существовать только в остроугольном треугольнике.

Теперь найдём длины отрезков, на которые узлы биллиардной траектории делят стороны $\triangle ABC$ (рис. 4, б). По теореме синусов, применённой к $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_1B_1C$, имеем:

$$\frac{z}{\sin\beta} = \frac{b-y}{\sin\gamma}, \qquad \frac{x}{\sin\gamma} = \frac{c-z}{\sin\alpha}, \qquad \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{a-x}{\sin\beta}, \tag{1}$$

а по теореме синусов, применённой к $\triangle ABC$, получаем ещё такие соотношения

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

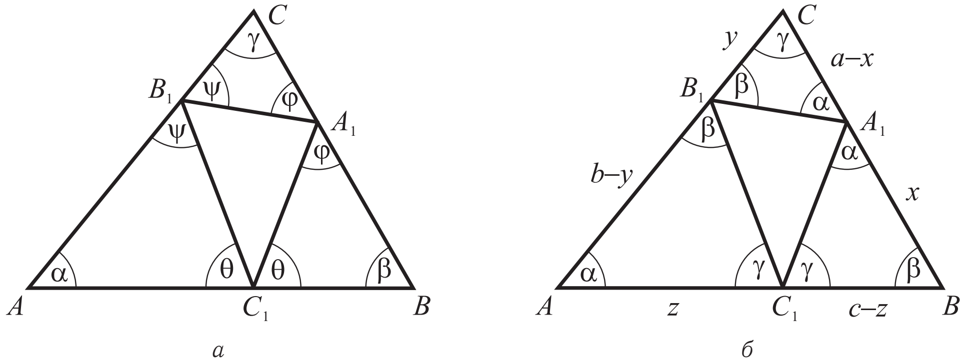


Рис. 4

Найдём x из системы линейных уравнений (1). Последовательно исключая y и z из этой системы, получаем:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(a-x), \qquad b - y = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,z \implies b = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(a-x) + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,z,$$

$$z = \frac{b\sin\beta - (a-x)\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad c - z = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,x \implies c = \frac{b\sin\beta + 2x\sin\alpha - a\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

Выражаем x из последнего соотношения

$$x = \frac{1}{2}\Big(a + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\,c - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,b\Big).$$

Из соотношений (2) следует, что $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{a}$ и $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{a}$. Поэтому окончательно имеем:

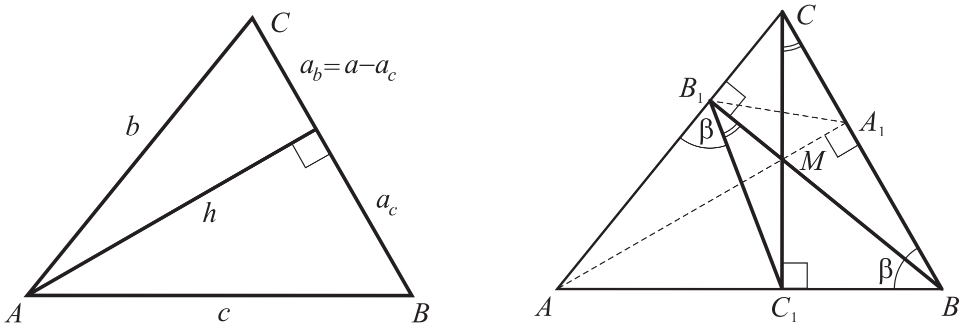
$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a}\right).$$

Теперь найдём длины отрезков, на которые сторону BC делит опущенная на неё из вершины A высота (рис. 5, *а*). По теореме Пифагора, $h^2 + a_c^2 = c^2$ и $h^2 + a_b^2 = b^2$. Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$a_c^2 - (a - a_c)^2 = c^2 - b^2 \implies 2a \cdot a_c - a^2 = c^2 - b^2 \implies a_c = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a}\right).$$

Так как длины отрезков x и a_c совпадают, то точка A_1 является основанием высоты, опущенной из A на BC. Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 находятся в основаниях двух других высот треугольника ABC. Таким образом, если в треугольнике (как было показано, необходимо остроугольном) есть биллиардная траектория, то она соединяет основания высот треугольника.

Теперь проверим, что треугольник с вершинами в основаниях высот остроугольного треугольника даёт решение задачи Фаньяно. Прямоугольные треугольники MB_1C и MC_1B подобны (рис. 5, *б*), поскольку их углы при вершине M являются вертикальными. Поэтому $\dfrac{B_1M}{CM} = \dfrac{C_1M}{BM}$. Значит, подобны и $\triangle B_1MC_1$ и $\triangle CMB$ — их углы при вершине M равны как вертикальные, а прилегающие стороны пропорциональны. Значит, величины углов этих треугольников при вершинах B_1 и C равны, но тогда равны и углы $\angle CBA$ и $\angle C_1B_1A$, дополняющие эти углы до прямых. Равенство $\measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle CBA$ доказывается аналогично. Так как $\measuredangle CB_1A_1 = \measuredangle C_1B_1A$, то отражение траектории $A_1B_1C_1$ в точке B_1 является биллиардным. Аналогично рассматривая остальные вершины $\triangle A_1B_1C_1$ получаем, что $A_1B_1C_1$ — трёхзвенная биллиардная траектория.



а *б*

Рис. 5

Легко видеть, что в произвольном прямоугольном треугольнике существуют шестизвенные биллиардные траектории. Они начинаются перпендикулярно гипотенузе, и каждое их звено проходит на периоде два раза в противоположных направлениях (рис. 6, *а, б*).

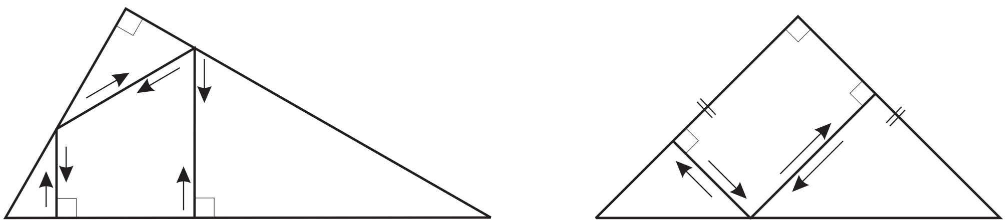

а *б*

Рис. 6

Если прямоугольный треугольник не является равнобедренным, то биллиардных траекторий с меньшим количеством звеньев не существует. Неизвестно, существуют ли периодические биллиардные траектории в произвольном тупоугольном треугольнике [3, с. 119].

Библиографический список

1. *Гальперин Г. А., Земляков А. Н.* Математические бильярды. М. : Наука, 1990. 288 с.
2. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. М. : Наука, 1964. 264 с.
3. *Табачников С.* Геометрия и биллиарды. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 180 с.

Remarks on Fagnano Problem

A. I. Rubinstein[1], D. S. Telyakovskii[2]

[1]National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe ave., Moscow, 115409, Russia; Moscow State Forest University, 1, 1st Institutskaya str., Mytischi, Moscow region, 141005, Russia, Rubinshtein_aleksandr@mail.ru

[2]National Research Nuclear University MEPhI, 31, Kashirskoe ave., Moscow, 115409, Russia, Dtelyakov@mail.ru

We provide two solutions to the Fagnano problem on finding a three-link billiard traectory in a triangle.

Key words: billiard traectory, Fagnano problem.

References

1. Gal'perin A., Countrymen A. N. *Matematicheskie bil'iardy* [Mathematical Billiards]. Moscow, Nauka, 1990, 288 p. (in Russian).
2. Rademacher H., Toepliz O. *Chisla i figury* [Numbers and Shapes]. Moscow, Nauka, 1964, 264 p. (in Russian).
3. Tabachnikov S. *Geometry and Billiards*. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 2005. 176 p. (Rus. ed.: Tabachnikov S. Geometriia i billiardy. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», Izhevskii institut komp'iuternykh issledovanii, 2011, 180 p.)

УДК 517.538.52+517.538.53

КВАДРАТИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории функций, Гомельский государственный университет им. Фр. Скорины, Беларусь, Svoitov@gsu.by

В работе изучаются экстремальные свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ с произвольными различными действительными показателями λ_0, λ_1, λ_2. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

ВВЕДЕНИЕ

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$ называют $k+1$ многочлен $A_0(z)$, $A_1(z)$,..., $A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)\, e^{pz} = O\left(z^{kn+n-1}\right)\,, \qquad z \to 0\,, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом (C. Hermite) [1] в 1883 г. Ещё раньше, при доказательстве трансцендентности числа e, Эрмит [2] определил $k+1$ многочлен $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^1(z)$,..., $P_{kn}^k(z)$ степени, не выше kn, для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z)\, e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O\left(z^{kn+n+1}\right)\,, \qquad z \to 0. \tag{2}$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn,\,kn}^j(z; e^{j\xi}) = P_{kn}^j(z)/Q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) n-го порядка (по поводу терминологии см. [3]). В [4] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита – Паде I типа можно также доказать трансцендентность числа e.

В одномерном случае $(k=1)$ общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде (H. Padé) [5], а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае $(k \geqslant 2)$ систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работы К. Малера (K. Mahler) [4] (об участии других авторов в создании формальной теории см., например, [6]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений [6–8].

При $k = 1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, и хорошо известно, что аппроксимации Паде $\pi_{n,\,n}(z; e^{\xi}) = P_n^1(z)/Q_n(z)$ обладают рядом экстремальных свойств, в частности, являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями e^z.

В данной статье рассматриваются квадратичные $(k=2)$ диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\right\}$ с произвольными различными комплексными