УДК 517.521.2+517.537

О ВОЗМОЖНЫХ ИНВАРИАНТАХ НА СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ

А. П. Буланов

Буланов Александр Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, Обнинский интститут атомной энергетики, bksen2002@yandex.ru

Цепная экспонента $L_B(z) = z \cdot B(z)$, имеющая последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| < \infty$, определяется последовательностью функций $B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}$, $B_1(z) = e^{b_2 \cdot z \cdot B_2(z)}$, $\ldots$, $B_{k-1}(z) = e^{b_k \cdot z \cdot B_k(z)}$,... (в работе используется обозначение $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, \ldots\rangle$). Аналогично определяется цепная экспонента $L_a(w) = w \cdot A(w)$, где $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \ldots\rangle$, имеющая последовательность показателей взаимно-обратных цепных экспонент до 4-го порядка. В работе установлен конкретный инвариант 4-го порядка, выраженный формой 3-й степени от показателей. Приводится пример двух числовых последовательностей, являющихся показателями взаимно-обратных цепных экспонент, подтверждающий надежность сделанных преобразований.

Ключевые слова: цепная экспонента, показатель, инвариант, форма, последовательность.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-383-391

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим две функции:

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \qquad L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{1}$$

где $B(z)$ и $A(w)$ — бесконечные цепные экспоненты:

$$B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot e^{b_2 \cdot z \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^z;\ b_1,\ b_2,\ \ldots\rangle\,, \tag{2}$$
$$A(w) = e^{a_1 \cdot w \cdot e^{a_2 \cdot w \cdot e^{\cdots}}} = \langle e^w;\ a_1,\ a_2,\ \ldots\rangle\,.$$

В последовательности $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ показатели $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| = \overline{b} < \infty$, а показатели $a_1, a_2, \ldots$ определяются рекуррентной формулой посредством $b_1, b_2, \ldots$ [1, с. 30, формула (5)], здесь — формула (4). Эти две цепные экспоненты образуют две функции Ламберта (1), которые могут быть взаимно-обратными функциями по отношению друг к другу. Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z;\ -b,\ -b,\ \ldots\rangle \tag{3}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции:

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w;\ b,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle\,.$$

Из формулы (3) мы видим равенство $b_1 = b_2$, тогда, включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3).

Это обобщение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (3) и гипер-функциями Ламберта (Lambert's W-function), которые ввел И. Н. Галидакис в 2004 г. W-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике [2–4].

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности точки $w = 0$ (или, наоборот, по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), т. е. по заданным показателям $b_1, b_2, \ldots$ найти показатели $a_1, a_2, \ldots$.

В общем случае легко определяются первые три показателя:

$$a_1 = -b_1, \qquad a_2 = b_2 - b_1, \qquad a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле, которую выразим в таком виде

Теорема 1. *Пусть в последовательности* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *показатели функции* $w = z \cdot B(z)$ *отличны от нуля,* $b_1 \neq b_2$, $\overline{\lim}_{n\to\infty}|b_n| < \infty$. *Тогда показатели* $a_4, a_5, \ldots, a_n \ldots$ *обратной функции* $z = w \cdot A(w)$ *определяются по формуле*

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} \cdot \left\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} \cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1! k_2! \cdots k_{n-1}!} \times \right.$$
$$\left. \times \left[(-(n+1))^{k_1-1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} b_3^{k_3} \cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_{n-1}^{k_{n-1}} \right] + b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \right\}. \tag{4}$$

В работе [1] в развернутом виде представлены две формулы для определения «обратного» показателя a_4 посредством b_1, b_2, b_3, b_4 и показателя a_5 посредством b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и a_1, a_2, a_3, a_4.

1. О СХОДИМОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ ЦЕПНЫХ ЭКСПОНЕНТ И О ПОЛУЧЕНИИ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ

Цепная экспонента (2) в окрестности точки $z = 0$ является аналитической функцией и ее степенной ряд [5, 6]

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^{(n)}(0)}{n!} \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n)}{n!} \cdot z^n, \tag{5}$$

где

$$H^{(n)}(b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot b_1^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \tag{6}$$

сходится в круге $K = \{z : \ |z| < 1/(\overline{b}e)\}$. В этом же круге сходится и степенной ряд

$$w = z \cdot B(z) = w(0) + \frac{w'(0)}{1!} \cdot z + \frac{w''(0)}{2!} \cdot z^2 + \cdots = B(0) \cdot z + \frac{B'(0)}{1!} \cdot z^2 + \frac{B''(0)}{2!} \cdot z^3 + \cdots$$

В работе [7] показывается, как получается формула (4). Используя разложение обратной функции

$$z = z(w) = L_a(w) = w \cdot A(w), \tag{7}$$

аналитической в окрестности точки $w = 0$, по Лагранжу, имеем формулу

$$z^{(n+1)}(0) = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n). \tag{8}$$

Цепную экспоненту (7), показатели которой a_1, $a_2, \ldots$ подлежат определению, представим в виде двух степенных рядов. Во-первых, как формальное разложение в окрестности точки $w = 0$ в степенной ряд таким же способом, как осуществлено разложение цепной экспоненты (2), по формулам (5) и (6):

$$A(w) = A(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n = H_a^{(0)} + \frac{H_a^{(1)}}{1!} \cdot w + \frac{H_a^{(2)}}{2!} \cdot w^2 + \cdots + \frac{H_a^{(n)}}{n!} \cdot w^n \cdots, \tag{9}$$

где

$$H_a^{(n)} = H^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$$
$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot a_1^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot k_{n-1})^{k_n} \tag{10}$$

Во-вторых, функция $A(w)$ выражается посредством степенного ряда

$$z = z(w) = \frac{z'(0)}{1!} \cdot w + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w^2 + \dots + \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \cdot w^n + \dots$$

и системы равенств

$$z'(w) = A(w) + w \cdot A'(w), \quad z''(w) = 2A'(w) + w \cdot A''(w), \quad \dots, \quad z^{(n)}(w) = nA^{(n-1)}(w) + w \cdot A^{(n)}(w),$$

откуда получаем второе представление:

$$A(w) = \frac{z'(0)}{1!} + \frac{z''(0)}{2!} \cdot w + \frac{z'''(0)}{3!} \cdot w^2 + \dots + \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \cdot w^n + \dots \tag{11}$$

Заметим, что каждый коэффициент $H_a^{(n)}$ в разложении (9) выражен формулой (10) посредством показателей $a_1,\ a_2, \dots, a_n$, в то время как в разложении (11) коэффициент $z^{(n+1)}(0)$ выражен полиномом (8). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной w, получаем систему равенств:

$$\begin{gathered} H_a^{(0)} = A(0) = z'(0) = 1, \qquad 2H_a^{(1)} = 2A'(0) = z''(0), \qquad 3H_a^{(2)} = 3A''(0) = z'''(0), \qquad \dots, \\ nH_a^{(n-1)} = nA^{(n-1)}(0) = z^{(n)}(0), \qquad (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)A^{(n)}(0) = z^{(n+1)}(0), \qquad \dots \end{gathered}$$

Равенства в последней строке запишем в виде

$$\begin{aligned} z^{(n+1)}(0)|_a = (n+1)H_a^{(n)} = (n+1)H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = (n+1)A^{(n)}(0) = \\ = H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \dots, b_n) = z^{(n)}(0)|_b, \end{aligned} \tag{12}$$

поскольку из определений (6) и (10) следует

$$\begin{gathered} H^{(n)}(-(n-1) \cdot b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!} (-(n+1)b_1)^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_n \cdot k_{n-1})^{k_n} = \\ = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} (-(n+1)b_1)^{k_1} \cdot (b_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (b_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (b_{n-1} \cdot k_{n-2})^{k_{n-1}} + \\ + n!(-(n+1)b_1) b_2 b_3 \cdots b_{n-1} b_n, \\ H^{(n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_{n-1}!} \times \\ \times (a_1)^{k_1} \cdot (a_2 \cdot k_1)^{k_2} \cdot (a_3 \cdot k_2)^{k_3} \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} \cdot k_{n-2})^{k_{n-1}} + n!(a_1) a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n. \end{gathered}$$

Тогда из равенств (12) получаем рекуррентную формулу (4).

2. НЕКОТОРЫЕ ШАГИ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ ИЗ ОСНОВНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ

Для выявления инвариантов и построения «равновесия» от этих равенств будем следовать двумя путями. О некоторых шагах первого пути было сказано в работе [8]. Равенства (12) дают рекуррентную формулу (4), по которой определяются все показатели типа «а». Если развернуть сумму в правой части этой формулы, то напишем слагаемые в количестве $2^n - 1$. В работе [9] представлена в развернутом виде формула для определения a_6 посредством $b_1, \dots, b_6$ и $a_1, \dots, a_5$. В правой части этой формулы в фигурной скобке имеем 63 слагаемых. Если же в тех слагаемых, в которых множителями являются a_k, заменить каждый множитель a_k его выражением, вычисленном по данной рекуррентной формуле (4) посредством $b_1,\ b_2, \dots, b_k$, то количество слагаемых во много раз увеличится, но среди них окажутся подобные. Здесь делается попытка сократить количество слагаемых путем выявления инвариантов. Некоторые слагаемые оставляем в обозначениях «a» и с обратным знаком переставляем в левую часть уравнения, полученного из основной формулы (4). Тогда основное равенство может оказаться инвариантом.

В работе [8] намечены некоторые «шаги» для выявления инвариантов. Умножая левую и правую части равенства (4) на $n!a_2a_3\cdots a_{n-1}$ и перемещая последнее слагаемое в правой части на первое место получаем уравнение

$$n!a_2a_3\dots a_{n-1}a_n = n!b_2b_3\dots b_{n-1}b_n + \left\{ \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\times \right.$$
$$\left. \times \left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\}. \tag{13}$$

Сумму в правой части в фигурной скобке этого равенства запишем в виде

$$\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=n} \frac{n!k_1^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_1!k_2!\cdots k_{n-1}!}\left[(-(n+1))^{k_1-1}b_1^{k_1-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{k_1-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right] =$$
$$= \sum_{j=n}^{2}\left\{\frac{n!}{j!}\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-j}\frac{j^{k_2}k_2^{k_3}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\left[(-(n+1))^{j-1}b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right]\right\} +$$
$$+n!\sum_{k_2+k_3+\ldots+k_{n-1}=n-1}\frac{k_2^{k_3}k_3^{k_4}\cdots k_{n-2}^{k_{n-1}}}{k_2!\cdots k_{n-1}!}\left[(b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\right].$$

Видно, что последняя сумма распадается на две суммы, в одной из которых слагаемые являются типа «b», а другая сумма имеет точно такие же слагаемые, только буквы b заменяются буквами a.

Последующие шаги заключаются в том, что содержимое в каждой квадратной $[\,\cdot\,]$ скобке, где $k_1 = j \geqslant 2$, мы помещаем в две квадратные скобки (т. е. $[\,\cdot\,] = [\,\cdot\,]_{(a,b)} + [\,\cdot\,]_a$) в виде

$$[\,\cdot\,]_{(a,b)} = [(-(n+1))^{j-1}(b_1^{j-1}b_2^{k_2}b_3^{k_3}\cdots b_{n-1}^{k_{n-1}} - a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}})], \tag{14}$$
$$[\,\cdot\,]_a = [((-(n+1))^{j-1} - 1)a_1^{j-1}a_2^{k_2}a_3^{k_3}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}]. \tag{15}$$

Если слагаемое «a» в квадратной скобке (14) (с коэффициентом, стоящим перед квадратной скобкой) переставить в левую часть равенства (13), то мы имеем слагаемое в одном из инвариантов. Слагаемое же в квадратной скобке (15) подлежит преобразованиям вместе с другими «a»-слагаемыми с целью получения инвариантов для фиксированного n, используя инварианты, полученные для меньших n.

Для следования вторым путем выявления инвариантов нам понадобится формула, по которой можно представить форму $H^{(n)}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ (и форму $H^{(n)}(-(n+1)b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$) n-го порядка посредством форм, порядок которых строго меньше:

$$H^{(0)}(1) = 1, \qquad H^{(1)}(a_1) = a_1, \qquad H^{(2)}(a_1, a_2) = 2a_1a_2 + a_2^2,$$
$$H^{(3)}(a_1, a_2, a_3), \qquad \ldots, \qquad H^{(n-1)}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}).$$

В работе [5, с. 60, лемма 7] доказана формула

$$H^{(n)}(g_r) = H^{(0)}(a_r)\cdot\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}H^{(n-m)}(g_{r+1}^m), \tag{16}$$

где $g_r = g_r(z) = a_r\cdot e^{a_{r+1}\cdot z\cdot e^{a_{r+2}\cdot z\cdot e^{\cdots}}} = a_r\cdot e^{g_{r+1}}$, а формы $H^{(n)}(g_r)$, $H^{(n-m)}(g_{r+1}^m)$ в нынешних обозначениях представляются так:

$$H^{(n)}(g_r) = a_r\cdot H^{(n)}(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{r+n}),$$
$$H^{(n-m)}(g_{r+1}^m) = a_{r+1}^m\cdot H^{(n-m)}(m\cdot a_{r+2}, a_r + 3, \ldots, a_{r+n-m+1}).$$

Таким образом, мы имеем представление

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_a = (n+1)H^{(n)}(a_1,a_2,\dots,a_n) = (n+1)\binom{n}{1}a_1H^{(n-1)}(a_2,a_3,\dots,a_n)+$$

$$+(n+1)\binom{n}{2}a_1^2H^{(n-2)}(2a_2,a_3,\dots,a_{n-1})+\dots+(n+1)\binom{n}{k}a_1^kH^{(n-k)}(ka_2,a_3,\dots,a_{n-k+1})+\dots+$$

$$+(n+1)\binom{n}{n-1}a_1^{n-1}H^{(1)}((n-1)a_2)+(n+1)a_1^n, \tag{17}$$

$$z^{(n+1)}(0)\Big|_b = \binom{n}{1}(-(n+1)b_1)H^{(n-1)}(b_2,b_3,\dots,b_n)+\binom{n}{2}(-(n+1)b_1)^2\times$$

$$\times H^{(n-2)}(2b_2,b_3,\dots,b_{n-1})+\dots+\binom{n}{k}(-(n+1)b_1)^kH^{(n-k)}(kb_2,b_3,\dots,b_{n-k+1})+\dots+$$

$$+\binom{n}{n-1}(-(n+1)b_1)^{n-1}H^{(1)}((n-1)b_2)+(-(n+1)b_1)^n. \tag{18}$$

Так как $a_1=-b_1\neq 0$, то можно поделить на $(n+1)a_1$ равенства (17) и (18), при этом в равенстве (14) величину $-b_1$ заменим на a_1.

Тогда имеем разность

$$\frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\bigg|_a - \frac{z^{(n+1)}(0)}{(n+1)a_1}\bigg|_{b=0} = \Big[nH^{(n-1)}(a_2,a_3,\dots,a_n)-nH^{(n-1)}(b_2,b_3,\dots,b_n\Big]+$$

$$+\left[\binom{n}{2}a_1H^{(n-2)}(2a_2,a_3,\dots,a_{n-1})-\binom{n}{2}(n+1)a_1H^{(n-2)}(2b_2,b_3,\dots,b_{n-1})\right]+\ldots+$$

$$+\left[\binom{n}{n-1}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)a_2)-\binom{n}{n-1}(n+1)^{n-2}a_1^{n-2}H^{(1)}((n-1)b_2)\right]+$$

$$+\left[a_1^{n-1}-(n+1)^{n-1}a_1^{n-1}\right]. \tag{19}$$

Если в правой части равенства (19) мы обнаруживаем «равновесную» пару типа $\phi(a)-\phi(b)$, то перемещая слагаемое $-\phi(b)$ в левую часть, где пока еще стоит ноль, мы тем самым строим инвариант n-го порядка. Видно, что разность в первых квадратных скобках является равновесной парой. Разности во вторых квадратных скобках и последующих не являются равновесными и подлежат преобразованиям.

3. ИНВАРИАНТЫ 4-ГО ПОРЯДКА

Далее рассмотрим, как этим путем получить инвариант 4-го порядка, исходя из равенства (19) при $n=4$. Определение порядка инварианта на данной здесь совокупности связано с тем, какой наибольший индекс имеет показатель в данном инварианте, причем этот показатель фигурирует множителем в некотором слагаемым в 1-й степени. Но прежде приведем несколько простых инвариантов на совокупности первых показателей, которые будут использованы как непосредственно, так и в качестве аргументов полиномов (в частности, линейных функций), которые могут оказаться инвариантами:

$$\Delta_0=\Delta_0(a)=\Delta_0(b)=a_1^2=b_1^2,$$
$$\Delta_1=\Delta_1(a)=2a_2-a_1=2b_2-b_1=\Delta_1(b),$$
$$\Delta_2=\Delta_2(a)=a_2a_3-a_2^2=b_2b_3-b_2^2=\Delta_2(b),$$
$$\varkappa_1=\varkappa_1(a)=a_2^2-2a_1a_2+a_2a_3=b_2^2-2b_1b_2+b_2b_3=\varkappa_1(b),$$
$$\varkappa_2=\varkappa_2(a)=a_2(a_2-a_1)=a_2b_2=b_2(b_2-b_1)=\varkappa_2(b),$$
$$\varkappa_{1,k}=a_{k-1}a_k+b_{k-1}b_k,\qquad k=2,3,\dots$$

При $k=2$ $\varkappa_{1,2}=\Delta_0$, при $k=3$ $\varkappa_{1,3}=2a_2a_3-a_1\Delta_1$,

$$\varkappa_{2,k}=a_{k-1}a_ka_{k+1}+b_{k-1}b_kb_{k+1},\qquad k=2,3,\dots.$$

При $k=2$

$$\varkappa_{2,2}=\Delta_0\Delta_1.$$

Если равенство, которое преобразовывается (и делается попытка из него получить инвариант), содержит в правой части слагаемое типа $cb_1\varkappa$ (или типа $ca_1\varkappa$), где $\varkappa$ — инвариант, то это слагаемое можно представить в виде «равновесной» пары:

$$cb_1\varkappa = \frac{c}{2}(2b_1)\varkappa = \frac{c}{2}(b_1 - a_1)\varkappa = \frac{c}{2}b_1\varkappa - \frac{c}{2}a_1\varkappa.$$

Прежде чем из уравнения

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 0$$

строить инвариант, нам понадобится такая же разность, но порядка на единицу меньше. Из формул разложения (16), (17) и (18) имеем:

$$\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a = \binom{3}{1}H^{(2)}(a_2, a_3) + \binom{3}{2}a_1H^{(1)}(2a_2) + a_1^2 = 3H^{(2)}(a_2, a_3) + 6a_1a_2 + a_1^2,$$

отсюда

$$3H^{(2)}(a_2, a_3) = \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - 6a_1a_2 - a_1^2. \tag{20}$$

Аналогично из равенств

$$\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b = \binom{3}{1}H^{(2)}(b_2, b_3) + \binom{3}{2}(4a_1)H^{(1)}(2b_2) + (4a_1)^3 = 3H^{(2)}(b_2, b_3) + 6(4a_1)b_2 + (4a_1)^2$$

имеем:

$$3H^{(2)}(b_2, b_3) = \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 6(4a_1)b_2 - (4a_1)^2. \tag{21}$$

Далее представим $H^{(2)}(2a_2, a_3)$ и $H^{(2)}(2b_2, b_3)$ через $H^{(2)}(a_2, a_3)$ и $H^{(2)}(b_2, b_3)$ соответственно. Имеем:

$$H^{(2)}(2a_2, a_3) = 2(2a_2a_3) + (2a_2)^2 = 2(2a_2a_3 + a_2^2 + a_2^2) = 2(H^{(2)}(a_2, a_3) + a_2^2), \tag{22}$$

$$H^{(2)}(2b_2, b_3) = 2(H^{(2)}(b_2, b_3) + b_2^2). \tag{23}$$

Используя опять формулы разложения (16), (17) и (18), получим представление

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + \binom{4}{2}a_1H^{(2)}(2a_2, a_3) + \binom{4}{3}a_1^2H^{(1)}(3a_2) + a_1^3; \tag{24}$$

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + \binom{4}{2}(5a_1)H^{(2)}(2b_2, b_3) + \binom{4}{3}(5a_1)^2H^{(1)}(3b_2) + (5a_1)^3. \tag{25}$$

Каждое второе слагаемое этих двух равенств преобразуем, используя равенства (22), (20), (23) и (21):

$$\begin{aligned} 3\cdot 2\cdot a_1H^{(2)}(2a_2, a_3) &= 4a_1\cdot 3(H^{(2)}(a_2, a_3) + a_2^2) = 4a_1(3H^{(2)}(a_2, a_3) + 3a_2^2) = \\ &= 4a_1\left[\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - 6a_1a_2 - a_1^2\right) + 3a_2^2\right], \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot 2\cdot (5a_1)H^{(2)}(2b_2, b_3) &= 4(5a_1)(3H^{(2)}(b_2, b_3) + 3b_2^2) = \\ &= 4(a_1 + 4a_1)\left[\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 6(4a_1)b_2 - (4a_1)^2\right) + 3b_2^2\right] = \\ &= 4a_1\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b + 16a_1\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 4(5a_1)24a_1b_2 - 4(5a_1)16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Теперь в представлении (24) вместо второго слагаемого помещаем правую часть равенств (26), а в представлении (25) вместо второго слагаемого ставим правую часть равенств (27). Имеем

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a = 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + 4a_1\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - 6a_1a_2 - a_1^2 + 3a_2^2\right) + 12a_1^2a_2 + a_1^3 =$$

$$= 4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) + 4a_1 \cdot \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a + 12a_1a_2b_2 - 3a_1a_1^2. \tag{28}$$

(попутно заметим, что в правой части этих равенств $\varkappa_2 = a_2b_2 = a_2(a_2 - a_1)$ — инвариант и $\Delta_0 = a_1^2 = b_1^2$ тоже инвариант)

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b + 16a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b - 4(5a_1)\cdot 24a_1b_2 -$$
$$-4(5a_1)\cdot 16a_1^2 + 4(5a_1)3b_2^2 + 300a_1^2b_2 + 125a_1^3 = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b +$$
$$+16a_1[3(2b_2b_3 + b_2^2) + 24a_1b_2 + 16a_1^2] - 480a_1^2b_2 - 320a_1^3 + 60a_1b_2^2 + 300a_1^2b_2 + 125a_1^3. \tag{29}$$

В квадратных скобках в правой части этого равенства есть множитель b_3. Поместим его в инвариант $\varkappa_3 = \varkappa_{1,3} = a_2a_3 + b_2b_3$ следующим образом:

$$2b_2b_3 = b_2b_3 + b_2b_3 = b_2b_3 + a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2a_3 = (b_2b_3 + a_2a_3) + a_1^2 - 2a_1a_2 = \varkappa_3 - a_1\Delta_1 = \varkappa_3 - a_1(2a_2 - a_1),$$

используем эту разность вместо $2b_2b_3$ в равенстве (29). Далее раскрываем скобки, приводим подобные и получаем:

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b + 48a_1\varkappa_3 + 48a_1^3 - 96a_1^2a_2 + 48a_1b_2^2 +$$
$$+16a_1 24a_1b_2 + 16^2a_1^3 - 180a_1^2b_2 - 195a_1^3 + 60a_1b_2^2 =$$
$$= 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b + 48a_1\varkappa_3 + 108a_1b_2^2 + 204a_1^2b_2 - 96a_1^2a_2 + 109a_1^3. \tag{30}$$

Так как $b_2 = a_2 - a_1$ и $b_2^2 = a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2$, то имеем

$$a_1(108a_2^2 - 108a_2a_1 + 13a_1^2) = a_1(108a_2b_2 + 13\Delta_0) = 108a_1\varkappa_2 + 13a_1\Delta_0$$

и тогда в правой части равенства (30) последние четыре слагаемых дают две «равновесные» пары, такие, как последние два слагаемых в правой части равенства (28). Таким образом, мы получим равенство

$$\left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_b = 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) + 4a_1 \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b + 48a_1\varkappa_3 + 108a_1\varkappa_2 + 13a_1\Delta_0. \tag{31}$$

Теперь, возвращаясь к равенству (19) для $n = 4$, имеем разность, полученную из представлений (28) и (31):

$$0 = \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(5)}(0)}{5a_2}\right|_b = \left[4H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - 4H^{(3)}(b_2, b_3, b_4)\right] +$$
$$+ \left[4a_1\left(\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b\right) - 48a_1\varkappa_3\right] + \left[96a_1\varkappa_2 - 16a_1\Delta_0\right]. \tag{32}$$

Мы видим, что полученная здесь разность $\left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_a - \left.\frac{z^{(4)}(0)}{4a_1}\right|_b$ равна нулю, и это существенно упрощает равенство (32). Такое обстоятельство возможно и при $n > 4$. Здесь мы сократим правую часть равенства (32) на 4, представим множитель a_1 в виде $\frac{1}{2}2a_1 = \frac{1}{2}(a_1 - b_1)$ и получим в правой части «равновесные пары»:

$$0 = H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4) - 6(a_1 - b_1)\varkappa_3 - 12(a_1 - b_1)\varkappa_2 - 2(a_1 - b_1)\Delta_0 =$$
$$= \left[H^{(3)}(a_2, a_3, a_4) - H^{(3)}(b_2, b_3, b_4)\right] - \left[(a_1 - b_1)(6\varkappa_3 + 12\varkappa_2 + 2\Delta_0)\right]. \tag{33}$$

Обозначим сумму $6\varkappa_3+12\varkappa_2+2\Delta_0$ (где $\varkappa_3=\varkappa_{1,3}=a_2a_3+b_2b_3$, $\varkappa_2=a_2b_2$, $\Delta_0=a_1^2=b_1^2$) через $\overline{\varkappa_3}$, тогда из равенства (33) получим инвариант 4-го порядка

$$H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)-a_1\overline{\varkappa_3}=H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)-b_1\overline{\varkappa_3}. \tag{34}$$

Как уже отмечалось в работе [8] рассматривались некоторые шаги первого пути выявления инвариантов из (4). Там были представлены несколько инвариантов 4-го порядка, которые были получены один из другого сокращением количества слагаемых. Последний из них (см. в работе [8] формулу (16)) записан в виде

$$\Delta_{3,5}(a)=\Delta_{3,5}(b)=4b_2b_3b_4+2b_2b_3^2-3b_1\left(2\Delta_2+\frac{3}{4}\Delta_1^2+\frac{1}{4}b_1^2\right). \tag{35}$$

Таким образом здесь имеем инвариант 4-го порядка (35), полученного из (4) первым путем, и инвариант 4-го порядка (34), полученного вторым путем, выраженного через форму $H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)$ и другого инварианта 3-го порядка. Использование второго пути предполагает, что инвариант 5-го порядка будет содержать форму $H^{(4)}(a_2,a_3,a_4,a_5)$. Применяя обозначения, которые были введены в работе [8], запишем (34) в виде

$$\Delta_{3,6}(a)=\Delta_{3,6}(b)=H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)-b_1\overline{\varkappa_3}.$$

Теорема 2. *На совокупности показателей взаимно-обратных функций $w=z\cdot B(z)$ и $z=w\cdot A(w)$ формы третьей степени*

$$\Delta_{3,5}(a)=\Delta_{3,5}(b)=4b_2b_3b_4+2b_2b_3^2-3b_1\cdot\left(2\Delta_2+\frac{3}{4}\Delta_1^2+\frac{1}{4}b_1^2\right),$$
$$\Delta_{3,6}(a)=\Delta_{3,6}(b)=H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)-b_1\overline{\varkappa_3} \tag{36}$$

являются инвариантами 4-го порядка.

Так же, как в работе [8], осуществим проверку формулы (36) по известным чередующимся показателям $b_1=b_3=\beta$, $b_2=b_4=1$, $a_1=a_3=-\beta$, $a_2=1-\beta$, $a_4=\frac{1}{2}-\beta$. Имеем

$$H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)=1-12\beta+27\beta^2-16\beta^3, \qquad H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)=1+12\beta+3\beta^3.$$

Первая «равновесная» разность $H^{(3)}(a_2,a_3,a_4)-H^{(3)}(b_2,b_3,b_4)=-24\beta+24\beta^2-16\beta^3$. Вторая «равновесная» разность $-(a_1-b_1)\overline{\varkappa_3}=-2a_1\overline{\varkappa_3}=24\beta-24\beta^2+16\beta^3$. По этому примеру можно судить о надежности преобразований.

Библиографический список

1. *Буланов А. П.* О рекуррентной формуле определения показателей обратной функции Ламберта // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 16-й Сарат. зим. шк. Саратов, 2012. С. 29–32.
2. *Дубинов А. Е., Галидакис И. Н.* Явное решение уравнения Кеплера // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 3(139). С. 365–370.
3. *Galidakis I. N.* On an application of Lambert's W function to infinite exponentials // Complex Var. Theory Appl. 2004. Vol. 49, № 11. P. 759–780.
4. *Galidacis I. N.* On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z)=z$ // Complex Variables. 2005. Vol.50, № 13. P. 977–997.
5. *Буланов А. П.* Регулярность степеней бесконечной кратности // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 49–78. DOI: 10.4213/im210.
6. *Буланов А. П.* Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающими поочередно два значения // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 11. С. 3–34. DOI: 10.4213/sm607.
7. *Буланов А. П.* Цепные экспоненты и функции Ламберта // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 64–71.
8. *Буланов А. П.* Об инвариантах на совокупности

показателей взаимно обратных функций Ламберта, представленных цепными экспонентами // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы Воронеж. зим. матем. шк. Воронеж, 2013. С. 295–303.

9. *Буланов А. П.* Шестой показатель обратной функции Ламберта, представленной цепной экспонентой // Комплексный анализ и приложения : материалы VI Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск, 2012. С. 5–10.

Invariants on a Set of Reciprocal Iterated Exponential Power Coefficients

S. P. Bulanov

Bulanov Aleksandr Pavlovich, Obninsk Institute for Nuclear Power Engineering, 1, Studgorodok, 249020, Obninsk, Kaluzhskaya obl., Russia, bksen2002@yandex.ru

A chain exponent $L_B(z) = z \cdot B(z)$, having a power sequence $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|b_n| < \infty$, is defined by a function sequence $B(z) = e^{b_1 \cdot z \cdot B_1(z)}$, $B_1(z) = e^{b_2 \cdot z \cdot B_2(z)}$, $\ldots$, $B_{k-1}(z) = e^{b_k \cdot z \cdot B_k(z)}$,… (we use the denotation $B(z) = \langle e^z; b_1, b_2, \ldots\rangle$ in the paper). Similarly, a chain exponent $L_a(w) = w \cdot A(w)$ is defined where $A(w) = \langle e^w; a_1, a_2, \ldots\rangle$, having a power sequence of mutually inverse chain exponents up to the 4-th order. In the paper, we find the concrete invariant of the 4-t order expressed by the form of 3-rd order with respect to powers. We give an example of two number sequences which are the powers of mutually inverse chain exponents adducing the truth of transformations performed.

Key words: chain exponent, power, invariant, form, sequence.

References

1. Bulanov A. P. O rekurrentnoi formule opredeleniia pokazatelei obratnoi funktsii Lamberta [About recurrence formula defining indicators of an inverse function of Lambert]. *Sovremennye problemy teorii funktsii i ikh prilozheniia : materialy 16-i Saratov. zim. shk.* [Modern Problems of Function Theory and Their Application : Proc. 16th Saratov Winters School], Saratov, 2012, pp. 29–32 (in Russian).
2. Dubinov A. E., Galidakis I. N. Explicit Solution of the Kepler Equation. *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2007, vol. 4, no. 3, pp. 213–216. DOI: 10.1134/S1547477107030028
3. Galidakis I. N. On an application of Lambert's W function to infinite exponentials. *Complex Var. Theory Appl.*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 759–780.
4. Galidacis I. N. On Solving the p-th Complex Auxiliary Equation $f^{(p)}(z) = z$. *Complex Variables*, 2005, vol. 50, no. 13, pp. 977–997.
5. Bulanov A. P. Regularity of infinite exponentials. *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 901–928. DOI: 10.1070/im1998v062n05ABEH000210.
6. Bulanov A. P. Infinite iterated power with alternating coefficients. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, iss. 11, pp. 1589–1620 DOI: 10.1070/SM2001v192n11ABEH000607
7. Bulanov A. P. Tsepnye eksponenty i funktsii Lamberta [Chain exponents and function Lambert]. *Tr. matem. tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Math. Center named N. I. Lobachevskian], 2011, vol. 43, pp. 64–71 (in Russian).
8. Bulanov A. P. Ob invariantakh na sovokupnosti pokazatelei vzaimno obratnykh funktsii Lamberta, predstavlennykh tsepnymi eksponentami [On invariants on the set of indicators of mutually inverse functions Lambert submitted chain exhibitors]. *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy : materialy Voronezh. zim. matem. shk.* [Modern Methods of Function Theory and Related Problems : Proc. Voronezh Winters School], Voronezh, 2013, pp. 295–303 (in Russian).
9. Bulanov A. P. *Shestoi pokazatel' obratnoi funktsii Lamberta, predstavlennoi tsepnoi eksponentoi* [The sixth indicator is the inverse function of Lambert presented chain exponent]. *Kompleksnyi analiz i prilozheniia : materialy VI Petrozavodsk. mezhdunar. konf.* [Complex analysis and applications : VI Petrozavodsk Intern. Conf.], Petrozavodsk, 2012, pp. 5–10 (in Russian).