References

1. Gal'perin A., Countrymen A. N. *Matematicheskie bil'iardy* [Mathematical Billiards]. Moscow, Nauka, 1990, 288 p. (in Russian).
2. Rademacher H., Toepliz O. *Chisla i figury* [Numbers and Shapes]. Moscow, Nauka, 1964, 264 p. (in Russian).
3. Tabachnikov S. *Geometry and Billiards*. Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 2005. 176 p. (Rus. ed.: Tabachnikov S. Geometriia i billiardy. Moscow, Izhevsk, NITs «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», Izhevskii institut komp'iuternykh issledovanii, 2011, 180 p.)

УДК 517.538.52+517.538.53

КВАДРАТИЧНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А. П. Старовойтов

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории функций, Гомельский государственный университет им. Фр. Скорины, Беларусь, Svoitov@gsu.by

В работе изучаются экстремальные свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^{2}$ с произвольными различными действительными показателями λ_0, λ_1, λ_2. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

ВВЕДЕНИЕ

Диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) и $(n-1)$-го порядка для набора экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^{k}$ называют $k+1$ многочлен $A_0(z)$, $A_1(z)$,..., $A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^{k} A_p(z)\, e^{pz} = O\left(z^{kn+n-1}\right), \qquad z \to 0, \tag{1}$$

где предполагается, что хотя бы один многочлен $A_p(z)$ тождественно не равен нулю.

Такие аппроксимации введены в рассмотрение Эрмитом (C. Hermite) [1] в 1883 г. Ещё раньше, при доказательстве трансцендентности числа e, Эрмит [2] определил $k+1$ многочлен $Q_{kn}(z)$, $P_{kn}^1(z)$,..., $P_{kn}^k(z)$ степени, не выше kn, для которых

$$R_n^j(z) := Q_{kn}(z)\, e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O\left(z^{kn+n+1}\right), \qquad z \to 0. \tag{2}$$

Набор рациональных функций $\pi_{kn,\,kn}^j(z; e^{j\xi}) = P_{kn}^j(z)/Q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ принято называть диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) n-го порядка (по поводу терминологии см. [3]). В [4] показано, что с помощью аппроксимаций Эрмита – Паде I типа можно также доказать трансцендентность числа e.

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющих равенствам (1), (2), принадлежит Паде (H. Padé) [5], а построенные в обоих случаях многочлены совпадают. В многомерном случае ($k \geqslant 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работы К. Малера (K. Mahler) [4] (об участии других авторов в создании формальной теории см., например, [6]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество приложений [6–8].

При $k=1$ приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, и хорошо известно, что аппроксимации Паде $\pi_{n,\,n}(z; e^{\xi}) = P_n^1(z)/Q_n(z)$ обладают рядом экстремальных свойств, в частности, являются локально наилучшими рациональными аппроксимациями e^z.

В данной статье рассматриваются квадратичные ($k=2$) диагональные аппроксимации Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\left\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\right\}$ с произвольными различными комплексными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Для многочленов $A_n^0(z)$, $A_n^1(z)$, $A_n^2(z)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющих условиям

$$R_n(z) = \sum_{p=0}^{2} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{3n-1}\right), \qquad z \to 0, \tag{3}$$

найдена асимптотика остаточного члена $R_n(z)$ и установлено, что при действительных $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^2$ являются решением следующей экстремальной задачи: *при заданном n найти многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0, 1, 2$, степени, не выше n, со старшим коэффициентом многочлена $a_n^2(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве*

$$E_n = E_n(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2; \rho) = \min_{\{a_n^p(z)\}_{p=0}^2} \left\| \sum_{p=0}^{2} a_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} \right\|_\rho,$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, а $D_\rho = \{z : |z| \leqslant \rho\} \subset \mathbb{C}$.

Поскольку найти точные значения E_n не представляется возможным, конечной целью задачи является нахождение асимптотики убывания последовательности $\{E_n\}_{n=1}^\infty$.

При $k = 2$ и $\lambda_p = p$, $p = 0, 1, \ldots, k$, для $\rho = 1$ данная задача была поставлена и решена П. Борвейном (P. B. Borwein) [9]. Ф. Вилонский (F. Wielonsky) [10] исследовал случай, когда $k \geqslant 2$ и $\rho < \pi/k$. Ранее при $k = 1$ решение близких по содержанию задач для круга и отрезка получено Л. Трефезеном (L. N. Trefethen) [11] и Д. Браессом (D. Braess) [12].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\rho < \pi/(\lambda_2 - \lambda_0)$, а $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные действительные числа. Тогда при $n \to \infty$*

$$E_n \sim \frac{n!\,(\lambda_2 - \lambda_0)^{n+1}(\lambda_2 - \lambda_1)^{n+1}}{(3n+2)!}\, \rho^{3n+2}.$$

Теорема 1 является обобщением теорем П. Борвейна [9] и Ф. Вилонского [10] при $k = 2$. Она получена в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений остаточного члена $R_n(z)$ и многочленов $A_n^p(z)$. Асимптотические свойства остаточных членов $R_n^j(z)$ аппроксимаций Эрмита – Паде II типа с помощью метода Лапласа описаны в работе автора [13] (см. также работу [14]). В данном случае применяется метод перевала в сочетании с методом Лапласа. Технология их применения является результатом дальнейшего совершенствования методов работ [10, 13].

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что без существенных изменений оно проходит и в общем случае, т. е. для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$ при произвольных действительных λ_p и $k \geqslant 2$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом и следующем параграфах считаем, что $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ – произвольные различные комплексные числа, упорядоченные по модулю, т. е. $|\lambda_0| \leqslant |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2|$.

Полиномы $A_n^0(z)$, $A_n^1(z)$, $A_n^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (3), могут быть получены решением линейной системы $3n-1$ однородных уравнений с $3n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ — граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j, $j = 0, 1, 2$ принадлежат его внутренности. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2, \tag{4}$$

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \tag{5}$$

где $\varphi(\xi) = (\xi - \lambda_0)(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)$, удовлетворяют (3) и всем другим условиям.

Далее будем рассматривать нормированную функцию $R_n(z)$, полученную делением $R_n(z)$ на старший коэффициент многочлена $A_n^2(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем равенство (4) $n-1$ раз при $p=2$. В результате получим, что численное значение старшего коэффициента $A_n^2(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i\,(n-1)!}\int_{C_2}\frac{d\xi}{(\xi-\lambda_2)\,(\xi-\lambda_0)^n\,(\xi-\lambda_1)^n}\,,$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$(\lambda_2-\lambda_0)^{-n}(\lambda_2-\lambda_1)^{-n}/(n-1)!\,.$$

При изучении асимптотики интеграла в (5) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения (см. [15, гл. 7, § 43, теорема 2; § 45, теорема 2]).

Утверждение 1 (метод Лапласа). *Пусть $f(x)$, $S(x)$ — непрерывные на отрезке $[a,\,b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем*

$$I_n=\int_a^b f(x)\,e^{nS(x)}\,d\,x\,.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0\in(a,\,b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a,\,b]$, т. е. $S(x)<S(x_0)$, $x\neq x_0$, $S''(x_0)\neq 0$, и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0. Тогда при $n\to+\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}}\;e^{n\,S(x_0)}\left(f(x_0)+O(1/n)\right)\,.$$

Утверждение 2 (метод перевала). *Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой области G, содержащей кусочно-гладкую кривую γ и*

$$F_n=\int_\gamma f(\xi)\,e^{nS(\xi)}\;d\,\xi\,.$$

Предположим, что $\max\{\,\mathrm{Re}\,S(\xi):\xi\in\gamma\}$ достигается только в точке z_0, которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е. $S'(z_0)=0$, $S''(z_0)\neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора (см. [15, гл. 7, § 45], в которых $\mathrm{Re}\,S(\xi)<\,\mathrm{Re}\,S(z_0)$. Тогда при $n\to\infty$

$$F_n=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}}\;e^{n\,S(z_0)}\left(f(z_0)+O(1/n)\right)\,. \tag{6}$$

Выбор ветви корня в (6) *определяется из условий*

$$\arg\sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}}=\varphi_0\,,$$

где φ_0 — угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наибыстрейшего спуска, проходящая через точку z_0, т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\mathrm{Im}\,S(z)=\,\mathrm{Im}\,S(z_0)$ при $z\in l$; $\mathrm{Re}\,S(z)<\,\mathrm{Re}\,S(z_0)$ при $z\in l$, $z\neq z_0$.

2. АСИМПТОТИКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА $R_n(z)$

Теорема 2. *Равномерно по z на компактах в $\mathbb{C}$ при $n\to\infty$*

$$R_n(z)\sim\frac{e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}{3}z}}{(3n-1)!}\,z^{3n-1}\,. \tag{7}$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\lambda_0 = 0$. Общий случай сводится к рассматриваемому, если равенство (3) умножить на $e^{-\lambda_0 z}$.

В интеграле (5) перейдём к новой переменной, полагая $z = nw$. Тогда

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w}\varphi(\xi)]^n}\ . \tag{8}$$

Будем искать критические точки функции $\psi(\xi) = e^{-\xi w}\varphi(\xi)$, т.е. нули $\psi'(\xi)$. Они являются корнями уравнения

$$w\varphi(\xi) = \varphi'(\xi),$$

которое можно записать в виде

$$w = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \lambda_1} + \frac{1}{\xi - \lambda_2}\,. \tag{9}$$

Поскольку контур C_∞ должен охватывать все точки λ_j, то будем искать критическую точку, достаточно удалённую от нуля. В этом случае, сделав замену $\zeta = 1/\xi$, представим правую часть равенства (9) в виде степенного ряда

$$w = 3\zeta + (\lambda_1 + \lambda_2)\zeta^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\zeta^3 + \ldots\ . \tag{10}$$

Обращая ряд (10) с использованием формул Бурмана – Лагранжа [15, гл. 5, § 31] и возвращаясь к прежней переменной ξ, получим зависимость поведения критической точки ξ_0 от значений w, которые с учётом замены $z = nw$ находятся в достаточно малой окрестности нуля:

$$\xi_0 = \frac{3}{w} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{3} + O(w)\,. \tag{11}$$

Определим теперь контур C_∞ так, чтобы он проходил через ξ_0, охватывал все точки $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, а модуль функции $\psi(\xi)$ достигал на C_∞ своего наименьшего значения в единственной точке ξ_0. С этой целью рассмотрим линии уровня функций $\varphi(\xi)$ и $e^{-w\xi}$, проходящие через точку ξ_0:

$$L = \{\xi \in \mathbb{C} :\ |\,\varphi(\xi)| = |\,\varphi(\xi_0)|\}\,,$$
$$L_1 = \{\xi \in \mathbb{C} :\ |\,e^{-w\xi}| = |\,e^{-w\xi_0}|\}\,.$$

L является лемнискатой, а L_1 — прямой, проходящей через ξ_0 и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол, равный $\arg(i/w)$. Уравнение лемнискаты L запишем в виде

$$\left|\varphi(\xi_0) + \frac{\varphi'(\xi_0)}{1!}(\xi - \xi_0) + \ldots + \frac{\varphi'''(\xi_0)}{3!}(\xi - \xi_0)^3\right| = \left|\varphi(\xi_0)\right|.$$

Опираясь на предыдущее соотношение и равенство $\varphi'(\xi_0) = w\varphi(\xi_0)$, легко показать, что угловой коэффициент касательной к L в точке ξ_0 равен $tg(\arg(i/w))$. Таким образом, L_1 является касательной к L в точке ξ_0.

При достаточно малых $|w|$ лемниската L является [16, гл. 3, § 3.3] жордановой аналитической кривой и охватывает все нули $\varphi(\xi)$, а прямая L_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых (полуплоскость Ω) содержит L. В полуплоскости Ω модуль $e^{-w\xi}$ больше модуля $e^{-w\xi_0}$. Лемниската L разбивает плоскость на две связные области — внутреннюю и внешнюю. Если ξ принадлежит внешней области, то $|\varphi(\xi)| > |\varphi(\xi_0)|$.

Учитывая возможность деформирования контура интегрирования в интеграле (8), построим теперь необходимый контур C_∞. Для этого возьмём отрезок с центром в точке ξ_0, принадлежащий L_1, и соединим его концы гладкой жордановой кривой, которая лежит в полуплоскости Ω и охватывает L. Построенный контур C_∞ соответствует всем необходимым требованиям.

В силу принципа аргумента при обходе точкой ξ контур C_∞ в положительном направлении приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно 6π. Поэтому C_∞ можно разбить на два контура C_∞^j, $j = 0, 1$, так, что на контуре C_∞^1 приращение аргумента функции $\varphi(\xi)$ равно 5π. Без ограничения общности можно считать, что ξ_0 лежит внутри контура C_∞^0, и $-\pi/2 \leqslant \arg\varphi(\xi) \leqslant \pi/2$ при $\xi \in C_\infty^0$. В противном случае, правую часть равенства (8) следует умножить и разделить на $e^{in\alpha}$, где действительное число α выбирается так, чтобы $-\pi/2 \leqslant \arg(e^{i\alpha}\varphi(\xi)) \leqslant \pi/2$, и далее вместо $\varphi(\xi)$ рассматривать функцию $e^{i\alpha}\varphi(\xi)$.

Определим функцию $S(\xi)$, полагая

$$S(\xi) = w\xi - \ln\varphi(\xi), \qquad \xi \in C_\infty^0,$$

где $\ln\varphi(\xi) = \ln|\varphi(\xi)| + i\arg_0\varphi(\xi)$ — однозначная ветвь логарифма, для которой $\arg_0\varphi(\xi) \in \in [-\pi/2, \pi/2]$. $S(\xi)$ является сужением на $C_\infty^0 \subset G$ однозначной аналитической функции $S(\xi)$, определённой в односвязной области G, не содержащей нулей $\varphi(\xi)$. В этой области

$$S'(\xi) = w - \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = w - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi-\lambda_1} - \frac{1}{\xi-\lambda_2}\,,$$
$$S''(\xi) = \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi-\lambda_1)^2} + \frac{1}{(\xi-\lambda_2)^2}\,,$$

и $S'(\xi_0) = 0$, $S''(\xi_0) \neq 0$.

Заметим, что для всех $\xi \in C_\infty$

$$\frac{1}{|\psi(\xi)|^n} = e^{n(\operatorname{Re}(w\xi) - \ln|\varphi(\xi)|)}\,,$$

а функция $\operatorname{Re}(w\xi) - \ln|\varphi(\xi)|$ достигает на C_∞ своего наибольшего значения в единственной точке ξ_0. Введём в рассмотрение интегралы

$$F_j(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty^j} \frac{d\xi}{[e^{-\xi w}\varphi(\xi)]^n}\ , j = 0, 1\,.$$

Рассуждая как при доказательстве неравенств (8) в [15, гл. 7, § 45], нетрудно показать, что

$$|F_1(n)| \leqslant c\left|e^{n(S(\xi_0)-\delta)}\right|, \tag{12}$$

где c, $\delta > 0$ — постоянные. Интеграл $F_0(n)$ представляется в виде

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty^0} e^{nS(\xi)}\,d\xi\,.$$

Так как $\max\{\operatorname{Re}S(\xi) : \xi \in C_\infty^0\}$ достигается только в точке ξ_0, которая является внутренней точкой контура C_∞^0 и простой точкой перевала, то для нахождения асимптотики этого интеграла применим утверждение 2. В результате получим:

$$F_0(n) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}\ e^{n\,S(\xi_0)}\,(1 + O(1/n))\ .$$

Из неравенств (12) и предыдущего равенства следует, что основной вклад в асимптотику $R_n(nw)$ вносит интеграл $F_0(n)$. Поэтому

$$R_n(nw) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(\xi_0)}}\ e^{n\,S(\xi_0)}\,(1 + O(1/n))\ . \tag{13}$$

Точка ξ_0 достаточно далеко удалена от нуля. Поэтому

$$S(\xi_0) = w\xi_0 - 3\ln\xi_0 - \ln\Big(1 - \frac{\lambda_1}{\xi_0}\Big) - \ln\Big(1 - \frac{\lambda_2}{\xi_0}\Big) = w\xi_0 + 3\ln\frac{1}{\xi_0} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\xi_0} + O\Big(\frac{1}{\xi_0^2}\Big)\,.$$

Отсюда из (11) следует, что

$$S(\xi_0) = 3 + 3\ln\frac{w}{3} + \frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}\,w + O(\,w^2\,)\,.$$

Тогда

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n}\left(\frac{w}{3}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}\,nw}(1 + O(nw^2))\,.$$

Если перейти здесь от переменной w к z, то получим

$$e^{nS(\xi_0)} = e^{3n}\left(\frac{z}{3n}\right)^{3n} e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}\big(1+O(z^2/n)\big). \tag{14}$$

Из полученного ранее выражения для $S''(\xi)$ следует, что

$$S''(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2}\Big(1+2\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\xi_0}+O\big(1/\xi_0^2\big)\Big).$$

Отсюда из (11) находим, что

$$S''(\xi_0) = \frac{w^2}{3}(1+O(w)),$$

поэтому

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{\frac{-3}{w^2}}\ (1+O(w)).$$

Учитывая, что для выбранного контура C_∞ угол $\varphi_0 = \arg(i/w)$, переходя к переменной z, окончательно получаем:

$$\sqrt{\frac{-1}{S''(\xi_0)}} = \sqrt{3}\,\frac{i}{w}\ (1+O(w)) = i\sqrt{3}\,\frac{n}{z}\ (1+O(z/n)). \tag{15}$$

Из (13), (14) и (15) следует, что

$$R_n(z) = \sqrt{\frac{3n}{2\pi}}\ \left(\frac{e}{3n}\right)^{3n} z^{3n-1}\, e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}\ (1+O(1/n)).$$

Отсюда с учётом формулы Стирлинга вытекает справедливость асимптотического равенства (7) для любого комплексного числа z.

Равномерность асимптотики в (7) следует из теоремы Витали [17, гл. 4, § 1] и того, что последовательность функций $(3n-1)!\,e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z/3}\,R_n(z)/z^{3n-1}$ равномерно ограничена по модулю на компактах в $\mathbb{C}$. Действительно,

$$|R_n(nw)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta e^{n\,(\,\mathrm{Re}\,(w\zeta(t))-\ln|\varphi(\zeta(t))|)}\,|\,\zeta'(t)|\,dt,$$

где контур интегрирования C_∞ прежний и параметризуется вещественным параметром $t\in[\alpha,\beta]$. Если обозначить через $[\alpha_1,\beta_1]$ отрезок, соответствующий параметризации контура C_∞^0, то при достаточно больших n

$$|R_n(nw)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n\ \mathrm{Re}\,S(\zeta(t))}\,|\,\zeta'(t)|\,dt, \tag{16}$$

Для нахождения асимптотики интеграла в (16) применим утверждение 1. В результате получим, что

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{n\ \mathrm{Re}\,S(\zeta(t))}\,|\,\zeta'(t)|\,dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n\,[\,\mathrm{Re}\,S(\zeta(t))]''_{t=t_0}}}\ e^{n\ \mathrm{Re}\,S(\xi_0)}|\,\zeta'(t_0)|\,(1+O(1/n)), \tag{17}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0)=\xi_0$.

Функция $\mathrm{Re}\,S(\zeta(t))$ в точке t_0 имеет максимум. Поэтому

$$[\,\mathrm{Re}\,S(\zeta(t))]''_{t=t_0} = -\,|S''(\xi_0)|\,|\zeta'(t_0)|^2\,(1+O(1/n))<0. \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18), переходя к переменной z и учитывая соотношения (14), (15), при достаточно больших n получим необходимое неравенство:

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{2\,|z|^{3n-1}}{(3n-1)!}\,\left|e^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{3}z}\right|. \qquad \square$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Вслед за Д. Браессом [12] рассмотрим сдвиг аппроксимаций Эрмита – Паде n-го порядка. Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ — произвольные действительные числа,

$$\tilde{a}_n^p(z) = n!\,(\lambda_2-\lambda_0)^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}\,A_{n+1}^p(z-z_n)\,, \qquad 0 \leqslant p \leqslant 2\,,$$
$$\tilde{R}_n(z) = n!\,(\lambda_2-\lambda_0)^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}\,R_{n+1}(z-z_n)\,, \qquad E_n^* = \|\tilde{R}_n\|_\rho\,,$$

где

$$z_n = \frac{(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\,\rho^2}{3(3n+2)}\,,$$

а множитель $n!\,(\lambda_2-\lambda_0)^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}$ в приведённых выше формулах нормализует многочлен $\tilde{a}_n^2(z)$ так, что его старший коэффициент равен 1.

Справедливость теоремы 1 вытекает из следующих лемм.

Лемма 1. *При* $n \to \infty$

$$E_n^* \sim \frac{n!\,(\lambda_2-\lambda_0)^{n+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{n+1}}{(3n+2)!}\,\rho^{3n+2}\,. \tag{19}$$

Доказательство. Из теоремы 2 при $n \to \infty$ имеем, что

$$R_{n+1}\,(z-z_n) = \frac{e^{\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}{3}\,(z-z_n)}}{(3n+2)!}\,(z-z_n)^{3n+2}\,\left(1+O(1/n)\right)\,. \tag{20}$$

Принимая во внимание соотношение

$$(z-z_n)^{3n+2} \sim z^{3n+2}\,e^{-\frac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}{3}\frac{\rho^2}{z}}\,,$$

из (20) для $|z| = \rho$ получим, что при $n \to \infty$

$$R_{n+1}\,(z-z_n) \sim \frac{\rho^{3n+2}}{(3n+2)!}.$$

Отсюда и из определения E_n^* следует (19). □

Лемма 2. *При* $\rho < \pi/(\lambda_2-\lambda_0)$ *и достаточно больших* n $E_n = E_n^*$.

Доказательство. Воспользуемся методом из работы [9]. Достаточно показать, что $E_n^* \leqslant E_n$ при больших n. Предположим, что это не так. Тогда $E_n < E_n^*$, и, следовательно, найдутся многочлены $a_n^p(z)$, $p = 0,1,2$, $\deg a_n^p \leqslant n$, $a_n^2(z)$ имеет старший коэффициент, равный 1, такие, что

$$\left\|\sum_{p=0}^{2} a_n^p(z)\,e^{\lambda_p z}\right\| < \left\|\sum_{p=0}^{2} \tilde{a}_n^p(z)\,e^{\lambda_p z}\right\|.$$

Отсюда и из полученных при доказательстве леммы 1 асимптотических равенств следует, что при достаточно больших n для $|z| = \rho$

$$\left|\sum_{p=0}^{2} a_n^p(z)\,e^{\lambda_p z}\right| < \left|\sum_{p=0}^{2} \tilde{a}_n^p(z)\,e^{\lambda_p z}\right|.$$

Тогда по теореме Руше функция

$$\sum_{p=0}^{2}(a_n^p(z)-\tilde{a}_n^p(z))\,e^{\lambda_p z}$$

имеет в D_ρ, по крайней мере, $3n+2$ нуля. Но это не так. Действительно, рассмотрим многочлены $b_n^p(z) = a_n^p(z)-\tilde{a}_n^p(z)$, $p = 0,1,2$. Сумма степеней всех этих многочленов $h \leqslant 3n-1$. Известно [18, задача 206.2], что функция $\sum_{p=0}^{2} b_n^p(z)\,e^{\lambda_p z}$ в круге D_ρ может иметь не более чем $h+2+(\lambda_2-\lambda_0)\rho/\pi$ нулей. Поскольку $\rho < \pi/(\lambda_2-\lambda_0)$, то число таких нулей не больше, чем $3n+1$. Полученное противоречие доказывает лемму 2. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Библиографический список

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. Vol. 21. P. 289–308.
2. *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Akad. Sci.(Paris). 1873. Vol. 77. P. 182–293.
3. *Mahler K.* Perfect systems // Comp. Math. 1968. Vol. 19, № 2. P. 95–166.
4. *Mahler K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus // J. Reine Angew. Math. 1931. Vol. 166. P. 118–150.
5. *Padé H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. (Paris). 1899. Vol. 16, № 3. P. 394–426.
6. *Aptekarev A. I., Stahl H.* Asymptotics of Hermite – Padé polynomials // Progress in Approximation Theory / eds. A. A. Gonchar, E. B. Saff. N. Y. ; Berlin : Springer-Verlag, 1992. P. 127–167.
7. *Mahler K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms // Math. Ann. 1967. Vol. 168. P. 200–227.
8. *Chudnovsky G. V.* Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // Lecture Notes in Math. Vol. 925. N. Y. ; Berlin : Springer-Verlag, 1982. P. 299–322.
9. *Borwein P. B.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function // Const. Approx. 1986. Vol. 62. P. 291–302.
10. *Wielonsky F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90, № 2. P. 283–298.
11. *Trefethen L. N.* The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 380–384.
12. *Braess D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x // J. Approx. Theory. 1984. Vol. 40, № 4. P. 375–379.
13. *Старовойтов А. П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14). С. 81–87.
14. *Аптекарев А. И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1981. № 1. С. 68–74.
15. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1989. 477 с.
16. *Walsh J. L.* Interpolaton and approximation by rational functions in the complex domain. Publ. by the Amer. Math. Soc., 1960. 508 p.
17. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1967. 486 с.
18. *Pólya G., Szegö G.* Problems and Theorems in Analysis. Vol. 1. Berlin : Springer-Verlag, 1972. 419 p.

Quadratic Hermite – Padé Approximants of Exponential Functions

A. P. Starovoitov

Gomel State University, 106, Sovetskaya str., Gomel, 246019, Belarus, Svoitov@gsu.by

The paper deals with extremal properties of diagonal quadratic Hermite – Pad'e approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Proved theorems complement known results of P. Borwein, F. Wielonsky.

Key words: Hermite – Pad'e approximants of type I, quadratic Hermite – Pad'e approximants, asymptotic equality, saddle-point method.

This work was supported by the Ministry of education of the Republic of Belarus.

References

1. Hermite C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques. *Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A*. 1883, vol. 21, pp. 289–308.
2. Hermite C. Sur la fonction exponentielle. *C. R. Akad. Sci. (Paris)*, 1873, vol. 77, pp. 18-293.
3. Mahler K. Perfect systems. *Comp. Math.*, 1968, vol. 19, no. 2, pp. 95–166.
4. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. *J. Reine Angew. Math.*, 1931, vol. 166, pp. 118–150.
5. Padé H. Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential. *Ann. École Norm. Sup. (Paris)*, 1899, vol. 16, no. 3, pp. 394–426.
6. Aptekarev A. I., Stahl H. Asymptotics of Hermite – Padé polynomials. *Progress in Approximation Theory* / eds. A. A. Gonchar, E. B. Saff, New York ; Berlin, Springer-Verlag, 1992, pp. 127–167.
7. Mahler K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms. *Math. Ann.*, 1967, vol. 168, pp. 200–227.
8. Chudnovsky G. V. Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π. *Lecture Notes in Math.*, vol. 925. New York ; Berlin, Springer-Verlag, 1982, pp. 299–322.
9. Borwein P. B. Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function. *Const. Approx.*, 1986, vol. 62, pp. 291–302.

10. Wielonsky F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z. *J. Approx. Theory*, 1997, vol. 90, no. 2, pp. 283–298.
11. Trefethen L. N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4., pp. 380–384.
12. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4, pp. 375–379.
13. Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximants of the system Mittag – Leffler functions. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2013, no. 1(14), pp. 81–87 (in Russian).
14. Aptekarev A. I. Convergence of rational approximations to a set of exponents. *Russ. Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 1981, vol. 36, no. 1, pp. 81–86.
15. Sidorov Yu. V., Fedoruk M. V., Chabounine M. I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the theory of complex variable]. Moscow, Nauka, 1989, 477 p. (in Russian).
16. Walsh J. L. *Interpolaton and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Publ. by the Amer. Math. Soc., 1960. 508 p.
17. Markushevich A. I *Teoriia analiticheskikh fuktsii* [Theory of Analytical Functions]. Vol. I. Moscow, Nauka, 1967, 486 p. (in Russian).
18. Pólya G., Szegö G. *Problems and Theorems in Analysis*. Vol. 1. Berlin, Springer-Verlag, 1972, 419 p.

УДК 517.51+517.98

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ И ПОПОЛНЕНИЕ

П. А. Терехин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функции и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Введено и изучено новое понятие аффинной системы функций типа Уолша. На основе теоремы факторизации для операторов, перестановочных с мультисдвигом, установлено, что с каждой аффинной системой типа Уолша однозначно с точностью до унимодулярной постоянной связаны две другие аффинные системы типа Уолша, одна из которых ортонормирована, а другая полна. Показано, что классическая система Уолша является единственной с точностью до унимодулярной постоянной полной и ортонормированной аффинной системой. Приведены примеры полных и отдельно ортонормированных аффинных систем типа Уолша.

Ключевые слова: система Уолша, аффинная система функций, полнота, ортогональность, мультисдвиг, факторизация.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначим через $L_0^2 = L_0^2(0,1)$ пространство всех вещественно- или комплекснозначных периодических функций $f \in L^2(0,1)$ с нулевым интегральным средним на периоде:

$$f(t+1) = f(t), \qquad \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Рассмотрим в пространстве L_0^2 линейные операторы W_0 и W_1, заданные равенствами

$$W_0 f(t) = f(2t), \qquad W_1 f(t) = f(2t)w(t),$$

где $w(t)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1/2), \\ -1, & t \in (1/2,1). \end{cases}$$

Лемма 1. *Операторы* $W_0, W_1 : L_0^2 \to L_0^2$ *изометрические, их образы* $\mathrm{Im}\,(W_0)$ *и* $\mathrm{Im}\,(W_1)$ *ортогональны. Ортогональное дополнение прямой суммы* $\mathrm{Im}\,(W_0) \oplus \mathrm{Im}\,(W_1)$ *является одномерным подпространством, порожденным функцией* w.

Свойства операторов W_0, W_1, приведенные в лемме 1, проверяются непосредственно и могут быть записаны в следующем виде:

$$W_0^* W_0 = W_1^* W_1 = I, \qquad W_0^* W_1 = W_1^* W_0 = 0, \qquad W_0 W_0^* + W_1 W_1^* = I - P,$$

где I — тождественный оператор и P — ортопроектор на одномерное подпространство $\mathrm{span}\{w\}$.