УДК 517.984

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. П. Курдюмов

Курдюмов Виталий Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KurdyumovVP@yandex.ru

Для дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в производных и интегральными краевыми условиями доказана базисность Рисса со скобками собственных и присоединенных функций. Для доказательства осуществляется сведение спектральной задачи исходного оператора к спектральной задаче для оператора первого порядка в пространстве вектор-функций размерности четыре, не содержащего инволюцию. Для преодоления трудностей, связанных с присутствием в уравнении четырехмерной задачи ненулевого коэффициента при неизвестной функции используется преобразование, зависящее от спектрального параметра, и позволяющее свести этот коэффициент к допускающему оценку $O(\lambda^{-1/2})$. Доказанное при выполнения некоторого условия регулярности утверждение о расположении собственных значений исходного оператора и полученное представление его резольвенты через интегральные операторы простой структуры вместе с полнотой системы собственных и присоединенных функций оператора, сопряженного к исходному, позволили доказать сформулированный результат.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, инволюция.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-392-405

Рассматривается функционально-дифференциальный оператор L:

$$ay''(x) + y''(1-x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y'(1-x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

с интегральными краевыми условиями:

$$U_i(y) = \int_0^1 y(\tau)\, d\sigma_i(\tau) = 0, \qquad (i = 1,2). \tag{2}$$

Предполагаем, что $a^2 \neq 1$, $p_i(x) \in C^1[0,1]$ $(i = 1,2)$, $\sigma_i(x)$ $(i = 1,2)$ — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.

Оператор (1) содержит инволюцию $\theta(x) = 1 - x$. В настоящее время дифференциальные и интегральные операторы с инволюцией интенсивно изучаются [1–6]. В данной работе рассматривается вопрос о базисности Рисса собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора (1), (2). Для дифференциальных и интегродифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями такая задача изучалась в [7–9]. В [6] доказана базисность Рисса со скобками с.п.ф. оператора первого порядка:

$$ay'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x) \tag{3}$$

и интегральными краевым условиями вида (2). Оператор (1), (2) — более сложный, чем (3), применяемый теперь метод является дальнейшим существенным развитием метода из [6].

1. Пусть $y = R_\lambda f$, где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора (1), (2) (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор). Тогда y удовлетворяет уравнению

$$ay''(x) + y''(1-x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y'(1-x) = \lambda y(x) + f(x) \tag{4}$$

и условию (2). Оператор отражения S определим следующим образом: если $f(x)$ — скалярная функция, то $Sf = f(1-x)$, если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), то $Sf = (f_1(x), f_2(1-x))^T$, если $f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2m}(x) \end{pmatrix}$, то $Sf(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(1-x) & f_{22}(1-x) & \dots & f_{2m}(1-x) \end{pmatrix}$.

Рассмотрим краевую задачу:

$$v''(x) + P_1(x)v'(x) - \lambda D_1 v(x) = n_1(x), \tag{5}$$

$$\int_0^1 S(\Gamma_1 v(t))\, d\sigma_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{6}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$, $P_1(x) = D_1\Gamma_1^{-1}P_2(x)\Gamma_1$, $D_1 = \operatorname{diag}(d_1, d_2)$, $d_1 = (a+1)^{-1}$, $d_2 = (a-1)^{-1}$, $P_2(x) = S\begin{pmatrix} p_1(x) - p_2(x) \\ p_2(x) - p_1(x)\end{pmatrix}$, $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $n_1(x) = D_1\Gamma_1^{-1}S(f(x), f(x))^T$.

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$R_\lambda f = v_1(x, \lambda) + v_2(x, \lambda), \tag{7}$$

где $v_j(x, \lambda)$ — компоненты решения задачи (5), (6). *Обратно, если $v(x, \lambda)$ удовлетворяет* (5), (6) *и соответствующая однородная краевая задача имеет только нулевое решение,то R_λ существует и выполняется* (7).

Доказательство. Положим $z(x) = S(y(x), y(x))^T$, тогда из (2), (4) получаем:

$$Az''(x) + P_2(x)z'(x) = \lambda z(x) + S(f(x), f(x))^T, \tag{8}$$

$$\int_0^1 Sz(t)d\sigma_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{9}$$

где $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a\end{pmatrix}$.

Полагая в (8), (9) $z(x) = \Gamma_1 v(x)$, получим систему (5), (6), и тем самым (7) установлено. Обратное получается, как и в [5, лемма 1]. ☐

Лемма 2. *Пусть $\lambda = \rho^2$. Преобразование*

$$v_1(x) = y_1(x), v_1'(x) = \rho y_2(x), v_2(x) = y_3(x), v_2'(x) = \rho y_4(x) \tag{10}$$

приводит задачу (5), (6) *к виду*

$$Y'(x) + \tilde{P}_1(x)Y(x) - \rho\tilde{D}_1 Y(x) = \frac{1}{\rho}\tilde{n}_1(x), \tag{11}$$

$$\int_0^1 \tilde{S}(\tilde{\Gamma}_1 Y(t))\, d\sigma_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{12}$$

где

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x))^T, \qquad \tilde{S}Y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(1-x), y_4(1-x))^T,$$

$$\tilde{P}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11}(x) & 0 & p_{12}(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{21}(x) & 0 & p_{22}(x)\end{pmatrix}, \qquad p_{ij}(x)\ (i = 1, 2) \text{ — элементы матрицы } P_1(x),$$

$$\tilde{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_2 & 0\end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Gamma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\tilde{n}_1(x) = (0, n_{11}(x), 0, n_{12}(x))^T, \qquad (n_{11}(x), n_{12}(x))^T = n_1(x).$$

Доказательство. Из (5) и (10) сразу следует (11), из (6) и (10) получим:

$$\int_0^1 S(\Gamma_1(y_1(t), y_3(t))^T)d\sigma_i(t) \qquad (i = 1, 2),$$

это и есть (12). □

Лемма 3. *Преобразование* $Y = \Gamma Z$ *приводит систему* (11), (12) *к виду*

$$Z'(x) + P(x)Z(x) - \rho DZ(x) = \frac{1}{\rho}m(x), \tag{13}$$

$$\int_0^1 \tilde{S}(\Gamma Z(t))d\sigma_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{14}$$

где $Z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $P(x) = \Gamma_2^{-1}\tilde{P}_1(x)\Gamma_2$, $D = \Gamma_2^{-1}\tilde{D}_1\Gamma_2 = \operatorname{diag}(q_1, -q_1, q_2, -q_2)$, $m(x) = \Gamma_2^{-1}\tilde{n}_1(x)$, $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1\Gamma_2$,

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ q_1 & -q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & q_2 & -q_2 \end{pmatrix}, \qquad q_i = \sqrt{d_i} \qquad (i = 1, 2).$$

Доказательство очевидно.

Приведем преобразование задачи (13), (14), чтобы матрица $P(x)$ перешла в матрицу с элементами, допускающими оценку $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ [10, с. 48–58]. Пусть $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_1(x), h_2(x), h_2(x))$, где $h_i(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x p_{ii}(t)\,dt\right)$ $(i = 1, 2)$; $p_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, а $H_1(x) = (r_{ij}(x))_{i,j=1}^4$ — матрица, имеющая нулевые диагональные элементы и являющаяся решением матричного уравнения $H_0'(x) + P(x)H_0(x) + H_1(x)D - DH_1(x) = 0$.

Лемма 4. *При больших* $|\rho|$ *неособое преобразование* $Z = H(x, \rho)W$, *где* $H(x, \rho) = H_0(x) + \rho^{-1}H_1(x)$, *приводит систему* (13), (14) *к виду*

$$W' + P_\rho(x)W - \rho DW = m(x, \rho), \tag{15}$$

$$U^i(W) = \int_0^1 S(\tilde{H}(t, \rho)W(t))d\sigma_i(t) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{16}$$

где $P_\rho(x) = \rho^{-1}H^{-1}(x, \rho)(H_1'(x) + P(x)H_1(x))$, $\tilde{H}(x, \rho)$ — *матрица, состоящая из первой и третьей строк матрицы* $\Gamma H(x, \rho)$, $m(x, \rho) = \rho^{-1}H^{-1}(x, \rho)m(x)$.

Доказательство устанавливается простой проверкой, если учесть, что вторая и четвертая строки матрицы Γ состоят из одних нулей, поэтому из одних нулей состоят такие строки и у матрицы $\Gamma H(x, \rho)$.

Лемма 5. *Если* $W(x, \rho) = (w_1(x, \rho), w_2(x, \rho), w_3(x, \rho), w_4(x, \rho))^T$ *является решением задачи* (15), (16), *то*

$$R_\lambda f = h_1(x)(w_1(x, \rho) + w_2(x, \rho)) + h_2(x)(w_3(x, \rho) + w_4(x, \rho)) + \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^4 r_i(x)w_i(x, \rho),$$

где $r_i(x) = \sum\limits_{j \neq i} r_{ji}(x)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что $R_\lambda f = y_1(x,\rho) + y_2(x,\rho)$. Тогда из леммы 3 следует что $R_\lambda f = \sum\limits_{i=1}^{4} z_i(x,\rho)$. Отсюда и из леммы 4 получаем утверждение леммы. $\square$

В дальнейшем рассматриваем полуплоскость $\operatorname{Re}\rho q_1 \geqslant 0$, которую разобьем на 2 сектора: $S_1 = \{\rho | \operatorname{Re}\rho q_1 \geqslant 0, \operatorname{Re}\rho q_2 \geqslant 0\}$ и $S_2 = \{\rho | \operatorname{Re}\rho q_1 \geqslant 0, \operatorname{Re}\rho q_2 \leqslant 0\}$, и для определенности будем рассматривать сектор S_1 (сектор S_2 рассматривается аналогично). Рассмотрим еще краевую задачу:

$$T'(x) - \rho D T(x) = m(x), \qquad U^i(T) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{17}$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$ и $m_i(x) \in C[0,1]$. $\square$

Лемма 6. *Для решения $T(x) = T_\rho m(x)$ задачи* (17), *справедлива формула*

$$T_\rho m(x) = \int\limits_0^1 g(x,t,\rho) m(t)\,dt - V(x,\rho)\Delta^{-1}(\rho)(\Phi_1^T(m,\rho), \Phi_2^T(m,\rho))^T,$$

где $g(x,t,\rho) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\rho), g_2(x,t,\rho), g_3(x,t,\rho), g_4(x,t,\rho))$, $g_1(x,t,\rho) = -\varepsilon(t,x)e^{\rho q_1(x-t)}$, $g_2(x,t,\rho) = \varepsilon(x,t)e^{-\rho q_1(x-t)}$, $g_3(x,t,\rho) = -\varepsilon(t,x)e^{\rho q_2(x-t)}$, $g_4(x,t,\rho) = \varepsilon(x,t)e^{-\rho q_2(x-t)}$, $\varepsilon(x,t) = 1$ *при* $t \leqslant x$, $\varepsilon(x,t) = 0$ *при* $t > x$; $V(x,\rho) = \operatorname{diag}(e^{\rho q_1(x-1)}, e^{-\rho q_1 x}, e^{\rho q_2(x-1)}, e^{-\rho q_2 x})$, $\Delta(\rho) = (U^1(V(x,\rho))^T, U^2(V(x,\rho))^T)^T$, $\Phi_i(m,\rho) = U^i(\int\limits_0^1 g(x,t,\rho)m(t)\,dt)$ $(i = 1,2)$.

Это утверждение получается, как и лемма 3, из [11].

Лемма 7. *Имеет место представление*

$$\Phi_i(m,\rho) = (R_{i1}(\rho), R_{i2}(\rho))^T \qquad (i = 1, 2), \tag{18}$$

где R_{is} $(s = 1,2)$ являются линейными комбинациями с ограниченными по ρ (при $|\rho|$ достаточно больших) коэффициентами интегралов $\int\limits_0^1 \varphi_{ik}(t)e^{-\rho q_j t}\,dt$ $(i,j = 1,2;\ k = 1,2,\ldots,8)$, $\varphi_{i1}(t) = \int\limits_0^{1-t} m_1(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i2}(t) = \int\limits_t^1 m_1(1-\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i3}(t) = \int\limits_t^1 m_2(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i4}(t) = \int\limits_0^{1-t} m_2(1-\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i5}(t) = \int\limits_0^{1-t} m_3(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i6}(t) = \int\limits_t^1 m_3(1-\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i7}(t) = \int\limits_t^1 m_4(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\varphi_{i8}(t) = \int\limits_0^{1-t} m_4(1-\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_i(\tau)$, $\psi(\tau)$ совпадает с одной из функций $h_i(\tau)$, $Sh_i(\tau)$ $(i = 1,2)$; $r_k(\tau)$, $S\tilde{r}_k(\tau)$ $(k = 1,2,3,4)$; $r_k(\tau)$ — те же, что и в лемме 5; $\tilde{r}_k(\tau) = \sum\limits_{i\neq k} \alpha_{ik} r_{ik}(\tau)$, α_{ik} — числа, равные 1 или -1.

Доказательство. Положим

$$F_1 = F_1(x,\rho) = -\int\limits_x^1 e^{\rho q_1(x-t)} m_1(t)\,dt, \qquad F_2 = F_2(x,\rho) = \int\limits_0^x e^{-\rho q_1(x-t)} m_2(t)\,dt,$$

$$F_3 = F_3(x,\rho) = -\int\limits_x^1 e^{\rho q_2(x-t)} m_3(t)\,dt, \qquad F_4 = F_4(x,\rho) = \int\limits_0^x e^{-\rho q_2(x-t)} m_4(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 g(x,t,\rho)m(t)\,dt = (F_1, F_2, F_3, F_4)^T.$$

Поэтому

$$\tilde{H}(x,\rho)(F_1,F_2,F_3,F_4)^T = (Q_1,Q_2)^T + \frac{1}{\rho}(Q_3,Q_4)^T,$$

где

$$Q_1 = h_1(x)(F_1 + F_2) + h_2(x)(F_3 + F_4),$$
$$Q_2 = h_1(x)(F_1 + F_2) - h_2(x)(F_3 + F_4), \qquad Q_3 = \sum_{i=1}^{4} r_i(x)F_i, \qquad Q_4 = \sum_{i=1}^{4} \tilde{r}_i(x)F_i.$$

Значит,

$$\Phi_i(m,\rho) = (U_i(Q_1) + \frac{1}{\rho}U_i(Q_3), U_{i+2}(Q_2) + \frac{1}{\rho}U_{i+2}(Q_4))^T \qquad (i=1,2), \tag{19}$$

где U_i $(i=1,2)$ определяется из (2), $U_i(y) = U_{i-2}(Sy)$ $(i=3,4)$.

Далее, в $F_i(x,\rho)$ $(i=1,2,3,4)$ выполним замену переменных так, чтобы соответствующая экспонента всегда была $e^{-\rho q_j t}$. Теперь, подставляя эти выражения для F_i в Q_j и проводя в $U_i(Q_j)$ надлежащие перестановки порядков интегрирования, из (19), получаем (18). Лемма доказана. □

2. Следующая лемма очевидна.

Лемма 8. *Если $f(x) \in C[0,1]$, $\nu(x)$ — функция ограниченной вариации и $\nu(+0) = \nu(0)$, то*

$$\lim_{\operatorname{Re}\rho\to+\infty} \int_0^1 f(x)e^{-\rho x}\,d\nu(x) = 0.$$

Представим матрицу $\tilde{H}(x,\rho)$ в виде

$$\tilde{H}(x,\rho) = \tilde{H}_0(x) + \frac{1}{\rho}\tilde{H}_1(x),$$

тогда

$$\tilde{H}_0(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_2(x) \\ h_1(x) & h_1(x) & -h_2(x) & -h_2(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть выполняется условие

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \tag{20}$$

где $\alpha_i = \sigma_i(+0) - \sigma_i(0)$, $\beta_i = \sigma_i(1) - \sigma_i(1-0)$ $(i=1,2)$.

Обозначим $\varphi(\rho) = \det\Delta_1(\rho)$, где $\Delta_1(\rho) = (U_0^1(V(x,\rho))^T, U_0^2(V(x,\rho))^T)^T$, $U_0^i(V(x,\rho)) = \int\limits_0^1 S(\tilde{H}_0(t)\times$ $\times V(t,\rho))\,d\sigma_i(t)$ $(i=1,2)$, и через S_δ обозначим область, получающуюся из ρ-плоскости удалением всех нулей $\varphi(\rho)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Считаем что $\arg q_1 \neq \arg q_2 + k\pi$ $(k=0,1)$ (противоположный случай приводит к упрощению последующих рассуждений).

Лемма 9. *Нули целой функции $\varphi(\rho)$ находятся в некоторых полосах $|\operatorname{Re}\rho q_j| \leqslant h$ $(j=1,2)$, причем число нулей в каждом прямоугольнике $\{|\operatorname{Re}\rho q_j| \leqslant h,\ |Im\rho q_j - t| \leqslant 1\}$ $(j=1,2)$ ограниченно при всех вещественных t. В S_δ справедлива оценка*

$$|\varphi(\rho)| \geqslant C(1 + |e^{-2\rho q_1}| + |e^{-2\rho q_2}| + |e^{-2\rho(q_1+q_2)}|), \tag{21}$$

где $C > 0$ и не зависит от ρ.

Доказательство. Имеем:

$$S(\tilde{H}_0(t)V(t,\rho)) = \begin{pmatrix} h_1(t)e^{\rho q_1(t-1)} & h_1(t)e^{-\rho q_1 t} & h_2(t)e^{\rho q_2(t-1)} & h_2(t)e^{-\rho q_2 t} \\ h_1(1-t)e^{-\rho q_1 t} & h_1(1-t)e^{-\rho q_1(1-t)} & -h_2(1-t)e^{-\rho q_2 t} & -h_2(1-t)e^{-\rho q_2(1-t)} \end{pmatrix}.$$

Тогда по лемме 8

$$\varphi(\rho) = d_1(\rho) + d_2(\rho), \tag{22}$$

где

$$d_1(\rho)=\begin{vmatrix} h_1(0)e^{-\rho q_1}\alpha_1+h_1(1)\beta_1 & h_1(0)\alpha_1+h_1(1)e^{-\rho q_1}\beta_1 \\ h_1(0)\alpha_1+h_1(0)e^{-\rho q_1}\beta_1 & h_1(1)e^{-\rho q_1}\alpha_1+h_1(0)\beta_1 \\ h_1(0)e^{-\rho q_1}\alpha_2+h_1(1)\beta_2 & h_1(0)\alpha_2+h_1(1)e^{-\rho q_1}\beta_2 \\ h_1(1)\alpha_2+h_1(0)e^{-\rho q_1}\beta_2 & h_1(1)e^{-\rho q_2}\alpha_2+h_2(0)\beta_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} h_2(0)e^{-\rho q_2}\alpha_1+h_2(1)\beta_1 & h_2(0)\alpha_1+h_2(1)e^{-\rho q_2}\beta_1 \\ -h_2(1)\alpha_1-h_2(0)e^{-\rho q_2}\beta_1 & -h_2(1)e^{-\rho q_2}\alpha_1-h_2(0)\beta_1 \\ h_2(0)e^{-\rho q_2}\alpha_2+h_2(1)\beta_2 & h_2(0)\alpha_2+h_2(1)e^{-\rho q_2}\beta_2 \\ -h_2(1)\alpha_2-h_2(0)e^{-\rho q_2}\beta_2 & -h_2(1)e^{-\rho q_2}\alpha_2-h_2(0)\beta_2 \end{vmatrix},$$

а $d_2(\rho)=o(1)$ при $\operatorname{Re}\rho q_1\to+\infty$, $\operatorname{Re}\rho q_2\to+\infty$; $d_2(\rho)=o(1)e^{-\rho q_2}$ при $\operatorname{Re}\rho q_1\to+\infty$, $\operatorname{Re}\rho q_2\to-\infty$; $d_2(\rho)=o(1)e^{-2\rho q_1}$ при $\operatorname{Re}\rho q_1\to-\infty$, $\operatorname{Re}\rho q_2\to+\infty$; $d_2(\rho)=o(1)e^{-2\rho(q_1+q_2)}$ при $\operatorname{Re}\rho q_1\to-\infty$, $\operatorname{Re}\rho q_2\to-\infty$.

Далее, имеем $d_1(\rho)=\gamma(e^{-2\rho q_1}-1)(e^{-2\rho q_2}-1)$, где $\gamma=4h_1(0)h_2(0)h_1(1)h_2(1)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$.

В силу условия регулярности (20) нули $d_1(\rho)$ находятся в некоторых полосах $|\operatorname{Re}\rho q_j|\leqslant|h_1|$ $(j=1,2)$, и вне δ-окрестностей этих нулей имеет место очевидная оценка:

$$|d_1(\rho)|\geqslant C(1+|e^{-2\rho q_1}|+|e^{-2\rho q_2}|+|e^{-2\rho(q_1+q_2)}|). \tag{23}$$

Поэтому из (22) и (23) получаем, что существуют $0<h<h_2$ такие, что $\varphi(\rho)$ ограничена в полуполосе $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h_2, \operatorname{Re}\rho q_2\geqslant h_2\}$, нули $\varphi(\rho)$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re}\rho q_2\geqslant h_2$, лежат в полуполосе $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h,\ \operatorname{Re}\rho q_2\geqslant h_2\}$, и на линиях $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|=h, \operatorname{Re}\rho q_2\geqslant h_2\}$ ее модуль отделен от нуля. А функция $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$ ограничена в полуполосе $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h_2, \operatorname{Re}\rho q_2\leqslant -h_2\}$, нули $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$, расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re}\rho q_2\leqslant-h_2$, лежат в полуполосе $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h, \operatorname{Re}\rho q_2\leqslant-h_2\}$ и на линиях $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|=h, \operatorname{Re}\rho q_2\leqslant-h_2\}$ ее модуль отделен от нуля. Применяя теорему из [12, § 2.3, с. 27] к функции $\varphi(\rho)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\rho q_2\geqslant h_2$ и к функции $\varphi(\rho)e^{2\rho q_2}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\rho q_2\leqslant-h_2$, получаем утверждение леммы для нулей $\varphi(\rho)$, расположенных в полосе $|\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h$. Аналогично доказывается это утверждение и для нулей $\varphi(\rho)$, расположенных в полосе $|\operatorname{Re}\rho q_2|\leqslant h$. Оценка (21) легко следует из [12, § 2.3, с. 27]. Лемма доказана. □

Лемма 10. *Для всех достаточно больших $|\rho|$ в области $S_\delta\cap S_1$ имеет место оценка*

$$\det\Delta(\lambda)\geqslant C,$$

где $C>0$ и не зависит от ρ.

Доказательство. Имеем $\Delta(\rho)=\Delta_1(\rho)+\Delta_2(\rho)$, где $\Delta_2(\rho)$ — матрица, у которой все элементы есть $O(\rho^{-1})$. Утверждение леммы теперь легко следует из леммы 9.

В дальнейшем считаем выполненным условие (20), и пусть $\operatorname{Re}\frac{iq_2}{q_1}>0$. Обозначим через Π_j $(j=1,2)$ полуполосы $\Pi_1=\{\rho q_1|\ |\operatorname{Re}\rho q_1|\leqslant h, Im\rho q_1\geqslant h_1\}$, $\Pi_2=\{\rho q_2|\ |\operatorname{Re}\rho q_2|\leqslant h, Im\rho q_2\leqslant -h_1\}$, где h — то же, что и в лемме 9, и пусть ρ_k — нули $\varphi(\rho)$ из леммы 9. Удалим из Π_j $(j=1,2)$ все точки $\rho_k q_j$ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ. Получившиеся области обозначим $\Pi_j(\delta)$ и через $\Pi_{j,1}(\delta)$ обозначим часть $\Pi_j(\delta)$, когда $\operatorname{Re}\rho q_j\geqslant0$.

Лемма 11. *Если $\rho q_1\in\Pi_{1,1}(\delta)$ или $\rho q_2\in\Pi_{2,1}(\delta)$ и $|\rho|$ достаточно велико, то существует единственное решение задачи* (17), *для компонент которого имеют место представления:*

$$(T\rho m)_1=-\int\limits_x^1 e^{\rho q_1(x-t)}m_1(t)\,dt+T_1(m,\rho)e^{\rho q_1(x-1)}, \tag{24}$$

$$(T\rho m)_2=\int\limits_0^x e^{-\rho q_1(x-t)}m_2(t)\,dt+T_2(m,\rho)e^{-\rho q_1 x}, \tag{25}$$

$$(T\rho m)_3 = -\int\limits_x^1 e^{\rho q_2(x-t)} m_3(t)dt + T_3(m,\rho)e^{\rho q_2(x-1)}, \tag{26}$$

$$(T\rho m)_4 = \int\limits_0^x e^{-\rho q_2(x-t)} m_4(t)\, dt + T_4(m,\rho)e^{\rho q_2 x}, \tag{27}$$

где $T_i(m,\rho)$ $(i = 1,2,3,4)$ — линейные комбинации тех же интегралов, что и в лемме 7 с ограниченными по ρ коэффициентами.

Доказательство. Нетрудно видеть, что указанные ρ принадлежат сектору S_1, и тогда утверждение леммы следует из лемм 6 и 7, если учесть, что в силу леммы 10 элементы матрицы $\Delta^{-1}(\rho)$ ограниченны по ρ. □

Пусть $\varphi(t,f)$ — одна из функций $\varphi_{ij}(t)$ из леммы 7, когда $m_i(x)$ $(i = 1,2,3,4)$ заменены на произвольную функцию $f(x) \in C[0,1]$.

Лемма 12. *Если $f(x) \in C[0,1]$, то справедлива оценка*

$$\|\varphi(t,f)\| \leqslant C\|f\|, \tag{28}$$

где $C > 0$ и не зависит от $f(x)$, а $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi(t,f) = \int\limits_0^{1-t} f(t+\tau)\psi(\tau)d\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_1(\tau)$ не убывает. Тогда

$$\|\varphi(t,f)\|^2 \leqslant \int\limits_0^1 |\psi(\tau)|\, d\sigma_1(\tau) \int\limits_0^{1-\tau} |\varphi(t,f)||f(t+\tau)|\, dt. \tag{29}$$

Внутренний интеграл по теореме Коши – Буняковского оценивается сверху величиной $\|\psi(t,f)\| \times \times \|f\|$. Поэтому из (29) получаем:

$$\|\varphi(t,f)\|^2 \leqslant \|\varphi(t,f)\|\|f\| \int\limits_0^1 |\psi(\tau)|\, d\sigma_1(\tau). \tag{30}$$

Так как $\|\varphi(t,f)\| < \infty$, то из (30) получаем (28). Лемма доказана. □

По лемме 12 $\varphi(t,f)$ как оператор по f продолжается по непрерывности на все $L_2[0,1]$. Это продолжение мы также обозначим через $\varphi(t,f)$. Тем самым мы можем рассмотреть задачу (17), когда $m(x) \in L_2^4[0,1]$.

Имеет место

Лемма 13. *Если $\rho q_1 \in \Pi_{1,1}(\delta)$ или $\rho q_2 \in \Pi_{2,1}(\delta)$ и $|\rho|$ достаточно велико, то для краевой задачи (17) при $m(x) \in L_2^4[0,1]$ существует единственное решение $T_\rho m(x)$ и для его компонент имеют место формулы (24)–(27), в которых $\varphi_{ij}(t)$ из леммы 7 заменяются на соответствующие операторы $\varphi(t,f)$ в $L_2[0,1]$.*

3. Считаем, что $f(x)$ в задаче (5), (6) принадлежит $L_2[0,1]$, тогда $m(x) \in L_2^4[0,1]$.

Лемма 14. *Если ρ — то же, что и в лемме 13, то существует единственное решение задачи (15), (16), причем*

$$W(x,\rho) = \frac{1}{\rho}T_\rho p_1(x) + \frac{1}{\rho^2}T_\rho p_2(x) - \frac{1}{\rho^2}T_\rho M_\rho p_1(x) + O(\frac{\|f\|}{\rho^3}), \tag{31}$$

где $p_1(x) = H_0^{-1}(x)m(x)$, $p_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, $M_\rho = H_2(x)(E + M_{1,\rho})^{-1}T_\rho$, $H_2(x) = = H_0^{-1}(x)(H_1'(x) + P(x)H_1(x))$, $M_{1,\rho}m(x) = T_\rho P_\rho(x)m(x)$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$.

Доказательство. Имеем из (15):

$$W(x,\rho)=T_\rho(m(x,\rho)-P_\rho(x)W(x,\rho)). \tag{32}$$

Так как $P_\rho(x)=O(\frac{1}{\rho})$, то оператор $E+M_{1,\rho}$ ограниченно обратим. Поэтому из (32) получаем:

$$\begin{aligned}W(x,\rho)=(E+M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x,\rho)=T_\rho m(x,\rho)-M_{1,\rho}(E+M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x,\rho)=\\ =T_\rho m(x,\rho)-T_\rho P_\rho(E+M_{1,\rho})^{-1}T_\rho m(x,\rho).\end{aligned} \tag{33}$$

Но

$$m(x,\rho)=\frac{1}{\rho}p_1(x)+\frac{1}{\rho^2}p_2(x)+O\left(\frac{\|f\|}{\rho^3}\right),\qquad P_\rho(x)=\frac{H_2(x)}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right).$$

Поэтому с учетом того, что T_ρ ограничен по ρ, из (33) получаем (31). Лемма доказана. □

Лемма 15. *Существуют непрерывные функции $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ $(i=1,2,3,4;\ j=1,2)$ такие, что для $p_1(x)$ и $p_2(x)$ из леммы 14 имеют место соотношения:*

$$(T_\rho p_j)_1=-\int\limits_x^1 e^{\rho q_1(x-t)}\gamma_{1j}(t)f(t)dt-\int\limits_0^{1-x} e^{\rho q_1(x+t-1)}\delta_{1j}(t)f(t)dt+T_{1j}(f,\rho)e^{-\rho q_1(x-1)}, \tag{34}$$

$$(T_\rho p_j)_2=\int\limits_0^x e^{-\rho q_1(x-t)}\gamma_{2j}(t)f(t)dt+\int\limits_{1-x}^1 e^{-\rho q_1(x+t-1)}\delta_{2j}(t)f(t)dt+T_{2j}(f,\rho)e^{-\rho q_1 x}, \tag{35}$$

$$(T_\rho p_j)_3=-\int\limits_x^1 e^{\rho q_2(x-t)}\gamma_{3j}(t)f(t)dt-\int\limits_0^{1-x} e^{\rho q_2(x+t-1)}\delta_{3j}(t)f(t)dt+T_{3j}(f,\rho)e^{\rho q_2(x-1)}, \tag{36}$$

$$(T_\rho p_j)_4=\int\limits_0^x e^{-\rho q_2(x-t)}\gamma_{4j}(t)f(t)dt+\int\limits_{1-x}^1 e^{-\rho q_2(x+t-1)}\delta_{4j}(t)f(t)dt+T_{4j}(f,\rho)e^{-\rho q_2 x}, \tag{37}$$

где $T_{ij}(f,\rho)$ — линейные комбинации с ограниченными по ρ коэффициентами интегралов $\int\limits_0^1\varphi(t)e^{-\rho q_j t}dt$ $(j=1,2)$, где $\varphi(t)$ являются продолжениями в $L_2[0,1]$ по лемме 12 следующих, рассматреваемых как операторы по $f(x)$ интегралов

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{1-t} f(\tau+t)\theta(\tau+t)\psi(\tau)d\sigma_k(\tau), &&\int\limits_0^{1-t} f(1-\tau-t)\theta(1-\tau-t)\psi(\tau)d\sigma_k(\tau),\\ &\int\limits_t^1 f(\tau-t)\theta(\tau-t)\psi(\tau)d\sigma_k(\tau), &&\int\limits_t^1 f(1-\tau+t)\theta(1-\tau+t)\psi(\tau)d\sigma_k(\tau),\end{aligned} \tag{38}$$

когда $\theta(x)$ являются произвольными функциями среди $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ и $k=1,2$. Функции $\psi(\tau)$ — те же, что и в лемме 7.

Доказательство. По определению компоненты вектор-функций $p_j(x)$ можно представить в виде

$$(p_j(x))_i=\gamma_{ij}(x)f(x)+\delta_{ij}(1-x)f(1-x)\qquad(j=1,2),$$

где $\gamma_{ij}(x)$ и $\delta_{ij}(x)$ — непрерывные функции. Взяв в лемме 13 в качестве $m_i(x)=\gamma_{ij}(x)f(x)+$ $+\delta_{ij}(1-x)f(1-x)$, получим (34)–(37). Лемма доказана. □

Рассмотрим операторы $Q_\rho f=\int\limits_0^1 Q(x,t,\rho)f(t)\,dt$, где $Q(x,t,\rho)$ есть одна из функций:

$$\int\limits_x^1 e^{\rho q_1(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\rho)\,d\tau,\qquad \int\limits_0^x e^{-\rho q_1(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\rho)\,d\tau,$$

$$\int_x^1 e^{\rho q_2(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\rho)\,d\tau, \qquad \int_0^x e^{-\rho q_2(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\rho)d\tau,$$

$$e^{\rho q_1(x-1)}N(t,\rho), \qquad e^{-\rho q_1 x}N(t,\rho), \qquad e^{\rho q_2(x-1)}N(t,\rho), \qquad e^{-\rho q_2 x}N(t,\rho).$$

Здесь $M(x,t,\rho)$ есть либо $M_{ij}(x,t,\rho)$, либо $M_{ij}(x,1-t,\rho)$ при некоторых i,j. Функции $M_{ij}(x,t,\rho)$ $(i,j=1,2,3,4)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_ρ. Наконец, $N(t,\rho)$ — одна из следующих функций $(i,j=1,2)$:

$$\int_0^1 e^{-\rho q_j\tau}\,d\tau\int_0^{1-\tau} M(\tau+s,t,\rho)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_i(s), \qquad \int_0^1 e^{-\rho q_j\tau}\,d\tau\int_0^{1-\tau} M(1-\tau-s,t,\rho)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_i(s),$$

$$\int_0^1 e^{-\rho q_j\tau}\,d\tau\int_\tau^1 M(s-\tau,t,\rho)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_i(s), \qquad \int_0^1 e^{-\rho q_j\tau}\,d\tau\int_\tau^1 M(1+\tau-s,t,\rho)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_i(s). \ \square$$

Лемма 16. *Каждая компонента вектор функции $T_\rho M_\rho p_1$ есть линейная комбинация всевозможных операторов $Q_\rho f$ с ограниченными по ρ коэффициентами.*

Доказательство. Каждая компонента вектор-функции $M_\rho p_1$ есть линейная комбинация интегралов $\int_0^1 M(x,t,\rho)\theta(t)f(t)dt$ при всевозможных $M(x,t,\rho)$ и $\theta(t)$, и утверждение леммы следует из (24)–(27). □

Обозначим через $\sigma(x,\rho_1,k)$ одну из функций

$$e^{-(\rho_1+ik)x}, \qquad e^{(\rho_1+ik)(x-1)}, \qquad e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}x}, \qquad e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-1)};$$

через $w(x,t,\rho_1,k)$ — одну из функций

$$\varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\rho_1+ik)(x-t)}, \qquad \varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\rho_1+ik)(x-t)}, \qquad \varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-t)},$$

$$\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x-t)}, \quad \varepsilon(1-x,t)\theta(t)e^{(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x+t-1)}, \quad \varepsilon(t,1-x)\theta(t)e^{-(\rho_1+ik)q_2q_1^{-1}(x+t-1)},$$

где $\theta(t)$ — либо те же, что в лемме 15, либо $\theta(t)\equiv 1$;

$$M(x,t,\rho_1,k) = M(x,t,\rho)|_{\rho q_1=\rho_1+ik}, \qquad N(x,\rho_1,k) = N(x,\rho)|_{\rho q_1=\rho_1+ik}.$$

Пусть

$$A_k f = \psi(x)\int_0^1 \sigma(x,\rho_1,k)\sigma(t,\rho_1,k)Af(t)\,dt,$$

где Af — один из операторов (38),

$$B_k f = \psi(x)\int_0^1 w(x,t,\rho_1,k)f(t)\,dt, \qquad M_k f = \int_0^1 M(x,t,\rho_1,k)\theta(t)f(t)\,dt,$$

$$N_k f = \psi(x)\sigma(x,\rho_1,k)\int_0^1 N(t,\rho_1,k)f(t)\,dt.$$

Пусть $\rho q_1\in\Pi_{1,1}(\delta)$, $\rho q_1=\rho_1+ik$, $k>0$ и ρ_1 принадлежит ограниченной области.

Лемма 17. *Если $f(x)\in L_2[0,1]$, то при больших $|\rho|$*

$$\rho R_\lambda f|_{\lambda=(\rho_1+ik)^2q_1^{-2}} = \Omega(x,\rho_1,k;f) + O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right), \tag{39}$$

где $\Omega(x,\rho_1,k;f)$ есть конечная сумма с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов A_kf, B_kf, $\frac{1}{k}B_kf$, $\frac{1}{k}B_kM_kf$, $\frac{1}{k}N_kf$, причем коэффициенты при B_kf не зависят от ρ_1 и k.

Доказательство. По лемме 15 из (34)–(37) следует, что каждая компонента вектор-функций $\psi(x)T_\rho p_j(x)$ $(j = 1, 2)$ является линейной комбинацией операторов $B_k f$ с постоянными коэффициентами и операторов $A_k f$ с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами. Из леммы 16 следует, что каждая компонента вектора $\rho^{-1}\psi(x)T_\rho M_\rho p_1(x)$ является линейной комбинацией операторов $\frac{1}{k}B_k M_k f$, $\frac{1}{k}N_k f$ с ограниченными по ρ_1 и k коэффициентами. Отсюда и из лемм 5 и 14 следует (39).

4. Так же, как в [13] представим каждую полуполосу Π_j $(j = 1, 2)$ в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников, границы которых γ_{kj} ($k = 1, 2, \ldots$ для $j = 1$ и $k = -1, -2, \ldots$ для $j = 2$) (при возрастании $|k|$ контуры удаляются от начала координат) состоят их отрезков, лежащих на прямых $\operatorname{Re}\rho q_j = \pm h$, и из отрезков, параллельных вещественной оси длины $2h$. Контуры γ_{kj} принадлежат области $\Pi_j(\delta)$ (считаем, что отрезки $\{\rho q_1 |\, |\operatorname{Re}\rho q_1| \leqslant h, \operatorname{Im}\rho q_1 = h_1\}$, $\{\rho q_2 |\, |\operatorname{Re}\rho q_2| \leqslant h, \operatorname{Im}\rho q_2 = -h_1\}$ расположены соответственно в $\Pi_1(\delta), \Pi_2(\delta)$) и для каждого γ_{kj} одной конкретной группы полуполосы Π_j существует целое t_{kj}, что $\gamma_{kj} = \gamma_j + it_{kj}$, γ_j — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы, и $t_{k1} > 0$, $t_{k2} < 0$.

Пусть Γ_{kj} — образ контура γ_{kj}/q_j $(j = 1, 2)$ при отображении $\lambda = \rho^2$. Занумеруем в каком-нибудь порядке все контуры Γ_{kj}, когда $j = 1$ или $j = 2$, одним индексом $k = 1, 2, \ldots$

Лемма 18. *Пусть J — любой конечный набор достаточно больших номеров k. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| \sum_{k\in J} \int_{\Gamma_k} R_\lambda d_\lambda \right\| \leqslant C, \tag{40}$$

равномерная по J.

Доказательство. Докажем (40) для тех Γ_k, которые являются образами контуров γ_{k1}/q_1, когда γ_{k1} принадлежат конкретной группе одинаковых прямоугольников. Так как в области $\Pi_1(\delta)$ при $\operatorname{Re}\rho q_1 < 0$ для $R_\lambda f$ справедливо преставление, аналогичное (39), то докажем (40) лишь для контуров Γ'_k, где каждый Γ'_k является образом при отображении $\lambda = \rho^2$ контура γ'_{k1}/q_1, а γ'_{k1} образован частью γ_{k1}, лежащей в правой полуплоскости, и отрезком на мнимой оси. Считаем, что $\gamma'_{k1} \subset \Pi_1(\delta)$ (в противном случае, так же, как в [14, с. 55], переходим к смещенной полуполосе). Тогда если $\rho q_1 \in \gamma'_{k1}$, то $\rho_1 = \rho q_1 - it_{k1}$ принадлежит фиксированному контуру γ', причем, без ограничения общности считаем, что γ' — один и тот же для всех наборов J. Имеем:

$$\sum_{k\in J} \int_{\Gamma'_k} R_\lambda f\, d\lambda = \int_{\gamma'} \Phi(f, \rho_1) d\rho_1,$$

где $\Phi(f, \rho_1) = \frac{2}{q_1^2} \sum\limits_{k\in J} (\rho_1 + it_{k1}) R_\lambda f|_{\lambda = (\rho_1 + it_{k1})^2 q_1^{-2}}$. Пусть P_k — любой из операторов леммы 17. Тогда по лемме 17 $\Phi(f, \rho_1)$ представима в виде конечной суммы (число слагаемых не зависит от J) операторов:

$$\Sigma = \sum_{k\in J} \alpha(\rho_1, t_{k1}) P_{t_{k1}} f = \sum_{k\in J_1} \alpha(\rho_1, k) P_k f, \tag{41}$$

где $J_1 = \{t_{k1} | k \in J\}$, $\alpha(\rho_1, k)$ ограниченны по ρ_1 и k и ядра операторов P_k состоят из одних и тех же функций, отличающихся лишь параметром k, то есть, например, все P_k в (41) есть $A_k f = \psi(x)\sigma(x, \rho_1, k) \int\limits_0^1 \sigma(t, \rho_1, k) Af(t)\, dt$, где $\psi(x)$ — одна и та же функция, $Af(t)$ — один и тот же оператор, $\sigma(x, \rho_1, k) = e^{-(\rho_1 + ik)x}$, $\sigma(t, \rho_1, k) = e^{(\rho_1 + ik)(t-1)}$.

Если $P_k = B_k$, то $\alpha(\rho_1, k)$ — константы, не зависящие от ρ_1 и k, и поэтому в этом случае $\int\limits_{\gamma'} \sum d\rho_1 = 0$.

Если $P_k = A_k$, то $P_k f = A_k f = \psi(x)\sigma(x, \rho_1, k) b_k(Af, \rho_1)$, где $b_k(Af, \rho_1) = \sum\limits_{k\in J_1} \alpha(\rho_1, k)\psi(x) \times$ $\times\, \sigma(x, \rho_1, k) b_k(Af, \rho_1)$.

Покажем, что

$$\|\Sigma\| \leqslant C\|f\|, \tag{42}$$

причем константа C не зависит от J_1 и ρ_1. Пусть $u(x) \in L_2[0,1]$. Тогда

$$(\Sigma, u) = \sum_{k\in J_1} \alpha(\rho_1, k) b_k(u\psi, \rho_1) b_k(Af, \rho_1).$$

Так как $\sigma(x,\rho_1,k) = \sigma(x,\rho_1,0)\sigma(x,0,k)$, то

$$b_k(Af,\rho_1) = \int_0^1 \sigma(t,0,k) f_1(t,\rho_1)\, dt,$$

где $f_1(t,\rho_1) = \sigma(t,\rho_1,0)Af$ и $\|Af\| \leqslant C\|f\|$. Поэтому

$$|(\Sigma,u)| \leqslant C\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(u\psi,\rho_1)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(Af,\rho_1)|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Значит, по теореме Банаха – Штейнгауза функционалы (Σ, u) имеют нормы, ограниченные константой, не зависящей от J_1 и ρ_1. Теперь, применяя опять теорему Банаха – Штейнгауза к операторам Σ, получим оценку (42). Если $P_k = \frac{1}{k}B_k$, то оценка (42) следует из [11, лемма 6].

Если $P_k = \frac{1}{k}B_k M_k$, то

$$(\Sigma,u) = \sum_{k\in J_1} \frac{\alpha(\rho_1,k)}{k}(M_k f, B_k^* u),$$

где B_k^* — оператор, сопряженный к оператору B_k. Так как ядра операторов M_k ограниченны, то отсюда получаем оценку

$$|(\Sigma,u)| \leqslant C\|f\| \sum_{k\in J_1} \frac{1}{k}\|B_k^* u\|. \tag{43}$$

Аналогично лемме 6 из [11] можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|B_k^* u\|^2 \leqslant C\|u\|^2.$$

Поэтому из (43) следует оценка $|\left(\sum, u\right)| \leqslant C\|f\|\|u\|$ и (42) справедлива. Если $P_k = \frac{1}{k}N_k$, то

$$(\Sigma,u) = \sum_{k\in J_1} \frac{\alpha(\rho_1,k)}{k} \int_0^1 \sigma(t,0,k) u_1(t,\rho_1) dt \int_0^1 N(t,\rho_1,k) f(t)\, dt,$$

где $u_1(t,\rho_1) = \sigma(t,\rho,0)\psi(t)u(t)$. Отсюда, учитывая ограниченность ядер $N(t,\rho_1,k)$, получаем оценку (42). Лемма доказана. $\square$

Лемма 19. *Система с.п.ф. оператора* L^* *является полной в* $L_2[0,1]$.

Доказательство осуществляется стандартными рассуждениями, если учесть, что в силу лемм 5 и 14–16 справедлива оценка $R_\lambda f = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

Для простоты считаем, что пересечением полос $\{\rho|\ |\operatorname{Re}\rho q_j| \leqslant h\}$ $(j = 1,2)$ также является прямоугольник, граница которого γ_0 не пересекает δ-окрестностей точек ρ_k (считаем также, что числа h и h_1 из определения Π_j $(j = 1,2)$ совпадают). Через R_k $(k = 1,2,\ldots)$ обозначим объединение уже построенных контуров Γ_k $(k = 1,2,\ldots)$, образа при отображении $\lambda = \rho^2$ контура γ_0 и образов прямоугольных контуров из сектора S_2, аналогичных контурам γ_{kj}/q_j из S_1.

Так же, как в [15, с. 62–63], получим основной результат.

Теорема. *Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$. При этом в скобки нужно объединять те с.п.ф., которые отвечают собственным значениям оператора L, которые попали в контуры R_k.*

Доказательство. Покажем сначала, что базис Рисса со скобками образуют с.п.ф. оператора L^*. Обозначим $E^*(k) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{R_k} R_\lambda d\lambda\right)^*$ и покажем, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} E^*(k_j)f(x)$ сходится к $f(x)$, где $k_1, k_2, \ldots$ — какой-то наперд заданный порядок целых чисел. По лемме 19 система с.п.ф. $\{\psi_k\}$ оператора L^* полна в $L_2[0,1]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существуют номер r и числа α_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, такие, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{r} \alpha_k\psi_k\| \leqslant \varepsilon$.

Пусть $S_q = \sum\limits_{j=1}^{q} E^*(k_j)$. Тогда по лемме 18 при q достаточно больших

$$\|f - S_q f\| \leqslant \left\|f - \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\psi_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\psi_k - S_q\left(\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\psi_k\right)\right\| + \left\|S_q\left(f - \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\psi_k\right)\right\| \leqslant \varepsilon + C\varepsilon.$$

Взяв теперь систему, биортогональную к системе $\{\psi_k\}$, получим утверждение теоремы.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014К).

Библиографический список

1. *Андреев А. А., Саушкин И. Н.* Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. Вып. 36. С. 10–16. DOI: 10.14498/vsgtu332.
2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50. DOI: 10.4213/sm601.
3. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // ДАН. 2011. Т. 441, № 2. С. 156–159.
4. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // ДАН. 2011. Т. 439, № 6. С. 733–735.
5. *Хромов А. П., Хромова Г. В.* О сходимости метода М. М. Лаврентьева для интегрального уравнения первого рода с инволюцией // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 289–297.
6. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций функционально-дифференциального уравнения с оператором отражения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 196–204.
7. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21.
8. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Т. 9. С. 190–229.
9. *Баскаков А. Г., Кацаран Т. К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 8. С. 1424–1433.
10. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев : Изд-во АН УССР, 1954.
11. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования //Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 1. С. 97–110. DOI: 10.4213/mzm92.
12. *Седлецкий А. М.* Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I // СМФН. Т. 5. М. : Изд-во МАИ, 2003. С. 3–152.
13. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80–82.
14. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969.
15. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с интегральными краевыми условиями // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 61–63.

On Riescz Bases of Eigenfunction of 2-nd Order Differential Operator with Involution and Integral Boundary Conditions

V. P. Kurdyumov

Kurdyumov Vitalii Pavlovich, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, KurdyumovVP@yandex.ru

Riesz basisness with brackets of the eigen and associated function is proved for a 2-nd order differential operator with involution in the derivatives and with integral boundary conditions. To demonstrate this the spectral problem of the initial operator is reduced to the spectral problem of a 1-st order operator without involution in the 4-dimensional vector-function space. The equation of the new spectral problem contains a difficult non-trivial coefficient of the unknown function, but after a transformation, depending on the spectral parameter λ, this coefficient can be estimated as $O(\lambda^{-1/2})$. This makes it possible to get under some regularity conditions the location of eigenvalues of the initial operator and to present its resolvent by integral operators of simpler structure. These facts together with completeness of the eigen and associated functions of the operator, adjoint to the initial one, underlie the proof of the result formulated.

Key words: Riescz basis, resolvent, involution.

The results have been obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.1520.2014K).

References

1. Andreev A. A., Saushkin I. N. Ob analoge zadachi Trikomi dlia odnogo model'nogo uravneniia s involiutivnym otkloneniem v beskonechnoi oblasti [An analog of the Tricomi problem for a model equation with involutive deviation in an infinite domain]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005, iss. 34, pp. 10–16 (in Russian). DOI: 10.14498/vsgtu332.
2. Kornev V. V., Khromov A. P. Equiconvergence of expansions in eigenfunctions of integral operators with kernels that can have discontinuities on the diagonals. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, iss. 10, pp. 1451–1469. DOI: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000601.
3. Burlutskaya M. Sh., Khromov A. P. Initial-boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 3, pp. 783–786. DOI: 10.1134/S1064562411070088.
4. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. On riesz bases of eigenfunctions of integral operators with kernels discontinuous on diagonals. *Doklady Math.*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 548–550. DOI: 10.1134/S1064562411050097.
5. Khromov A. P., Khromova G. V. On the convergence of the Lavrent'ev method for an integral equation of the first kind with involution. Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 2013, vol. 280, suppl. 1, pp. 88–97. DOI: 10.1134/S0081543813020089.
6. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz bases formed by root functions of a functional-differential equation with a reflection operator. *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 2, pp. 203–212. DOI: 10.1134/S0012266108020079.
7. Shkalikov A. A. O bazisnosti sobstvennykh funktsii obyknovennykh differentsial'nykh operatorov s integral'nymi kraevymi usloviiami [On the basis of its own functions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1, Mat., Mech.*, 1982, no. 6, pp. 12–21 (in Russian).
8. Shkalikov A. A. Kraevye zadachi dlia obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii s parametrom v granichnykh usloviiakh [Boundary problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions]. *Trudy Sem. I. G. Petrovskii*, 1983, vol. 9, pp. 190–229 (in Russian).
9. Baskakov A. G., Katsaran T. K. Spektral'nyi analiz integro-differentsial'nykh operatorov s nelokal'nymi kraevymi usloviiami [Spectral analysis of integral-differential operators with nonlocal boundary conditions]. *Differentsial'nye uravneniia*[Differential equations], 1988, vol. 24, no. 8, pp. 1424–1433 (in Russian).
10. Rapoport I. M. O nekotorykh asimptoticheskikh metodakh v teorii differentsial'nykh uravnenii [On some asymptotic methods in the theory of differential equations]. Kiev, Ukrainian Academy of Sciences, 1954 (in Russian).
11. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. Riesz Bases of Eigenfunctions of an Integral Operator with a

Variable Limit of Integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, iss. 1, pp. 99–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.

12. Sedletskii A. M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, iss. 6, pp. 4251–4408. DOI: 10.1007/s10958-005-0349-y.
13. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii differentsial'no-raznostnogo operatora s mnogotochechnym kraevym usloviem [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential operator with multi-point difference boundary condition]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, iss. 6, pp. 80–82 (in Russian).
14. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969.
15. Kurdyumov V. P. , Khromov A. P. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii differentsial'no-raznostnogo operatora s integral'nymi kraevymi usloviiami [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential-difference operator with integral boundary conditions]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2005, iss. 7, pp. 61–63 (in Russian).

УДК 517.927.25

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. С. Ломов

Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, lomov@cs.msu.su

Настоящий обзор содержит анализ результатов, полученных В. А. Ильиным и его учениками, по вопросу оценки скорости сходимости и равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье спектральных разложений функций по корневым функциям линейных обыкновенных дифференциальных операторов как самосопряженных, так и несамосопряженных, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Приведена первая теорема В. А. Ильина о равносходимости спектральных разложений для дифференциального оператора произвольного порядка. Формулируются теоремы о скорости равносходимости спектральных разложений сначала для произвольных самосопряженных расширений одномерного оператора Шредингера. При этом потенциал оператора может иметь любые особенности на границе интервала. Это позволяет получить новые результаты даже для всех классических ортогональных полиномов. Далее формулируются результаты для несамосопряженных операторов. Завершается обзор теоремой о скорости равносходимости для так называемых нагруженных дифференциальных операторов. Оценки скорости равносходимости разложений получены как на любом внутреннем компакте интервала, так и на всем интервале. Установлена зависимость оценки скорости равносходимости разложений на произвольном компакте основного интервала от расстояния этого компакта до границы интервала.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, собственные значения, спектральные разложения, скорость сходимости, формула среднего значения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418

Светлой памяти моего Учителя
Владимира Александровича Ильина
посвящается

Тригонометрические ряды Фурье, их свойства, условия сходимости исследованы весьма подробно. Многие математики, изучая спектральные разложения функций, занимались вопросом о равносходимости разложений функций по собственным функциям операторов и в тригонометрический ряд