10. Wielonsky F. Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z. *J. Approx. Theory*, 1997, vol. 90, no. 2, pp. 283–298.
11. Trefethen L. N. The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4., pp. 380–384.
12. Braess D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x. *J. Approx. Theory*, 1984, vol. 40, no. 4, pp. 375–379.
13. Starovoitov A. P. Hermite – Padé approximants of the system Mittag – Leffler functions. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki*, 2013, no. 1(14), pp. 81–87 (in Russian).
14. Aptekarev A. I. Convergence of rational approximations to a set of exponents. *Russ. Math.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 1981, vol. 36, no. 1, pp. 81–86.
15. Sidorov Yu. V., Fedoruk M. V., Chabounine M. I. *Lektsii po teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Lectures on the theory of complex variable]. Moscow, Nauka, 1989, 477 p. (in Russian).
16. Walsh J. L. *Interpolaton and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Publ. by the Amer. Math. Soc., 1960. 508 p.
17. Markushevich A. I *Teoriia analiticheskikh fuktsii* [Theory of Analytical Functions]. Vol. I. Moscow, Nauka, 1967, 486 p. (in Russian).
18. Pólya G., Szegö G. *Problems and Theorems in Analysis*. Vol. 1. Berlin, Springer-Verlag, 1972, 419 p.

УДК 517.51+517.98

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ И ПОПОЛНЕНИЕ

П. А. Терехин

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функции и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, TerekhinPA@info.sgu.ru

Введено и изучено новое понятие аффинной системы функций типа Уолша. На основе теоремы факторизации для операторов, перестановочных с мультисдвигом, установлено, что с каждой аффинной системой типа Уолша однозначно с точностью до унимодулярной постоянной связаны две другие аффинные системы типа Уолша, одна из которых ортонормирована, а другая полна. Показано, что классическая система Уолша является единственной с точностью до унимодулярной постоянной полной и ортонормированной аффинной системой. Приведены примеры полных и отдельно ортонормированных аффинных систем типа Уолша.

Ключевые слова: система Уолша, аффинная система функций, полнота, ортогональность, мультисдвиг, факторизация.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обозначим через $L_0^2 = L_0^2(0,1)$ пространство всех вещественно- или комплекснозначных периодических функций $f \in L^2(0,1)$ с нулевым интегральным средним на периоде:

$$f(t+1) = f(t), \qquad \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Рассмотрим в пространстве L_0^2 линейные операторы W_0 и W_1, заданные равенствами

$$W_0 f(t) = f(2t), \qquad W_1 f(t) = f(2t)w(t),$$

где $w(t)$ — периодическая функция Хаара – Радемахера – Уолша:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0,1/2), \\ -1, & t \in (1/2,1). \end{cases}$$

Лемма 1. *Операторы* $W_0, W_1 : L_0^2 \to L_0^2$ *изометрические, их образы* $\mathrm{Im}\,(W_0)$ *и* $\mathrm{Im}\,(W_1)$ *ортогональны. Ортогональное дополнение прямой суммы* $\mathrm{Im}\,(W_0) \oplus \mathrm{Im}\,(W_1)$ *является одномерным подпространством, порожденным функцией* w.

Свойства операторов W_0, W_1, приведенные в лемме 1, проверяются непосредственно и могут быть записаны в следующем виде:

$$W_0^* W_0 = W_1^* W_1 = I, \qquad W_0^* W_1 = W_1^* W_0 = 0, \qquad W_0 W_0^* + W_1 W_1^* = I - P,$$

где I — тождественный оператор и P — ортопроектор на одномерное подпространство $\mathrm{span}\{w\}$.

Пусть $\mathbb{A}$ — множество всех конечных наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$, состоящих из нулей и единиц: $\alpha_\nu = 0$ или 1, $0 \leqslant \nu \leqslant k-1$, включая при $k = 0$ пустой набор. Пусть, далее, $|\alpha| = k$ — длина набора $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ и $\alpha\beta = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$ — конкатенация наборов $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ и $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_{l-1})$.

Укажем на естественную биекцию между множествами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{N}$, при котором набору $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ соответствует натуральное число $n = \sum\limits_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k$. Мы будем пользоваться таким соответствием для замены индекса $x_\alpha = x_n$.

Для каждого набора $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{A}$ положим

$$W^\alpha = W_{\alpha_0} \cdots W_{\alpha_{k-1}}$$

— произведение операторов (первым действует оператор $W_{\alpha_{k-1}}$, последним — W_{α_0}; при $k = 0$ пустое произведение полагаем равным тождественному оператору I).

Пусть, далее, $r_k(t) = w(2^k t)$, $k = 0, 1, \ldots$, — система Радемахера.

Для любой функции $f \in L_0^2$ будем иметь:

$$f_\alpha(t) := W^\alpha f(t) = W_{\alpha_0} \ldots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = f(2^k t) w^{\alpha_{k-1}}(2^{k-1} t) \ldots w^{\alpha_0}(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t).$$

В частности, для функции $f = w$ семейство $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (без постоянной функции, тождественно равной единице) в нумерации Пэли:

$$w_\alpha(t) = r_k(t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{\alpha_\nu}(t) = w_n(t), \qquad n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^\nu + 2^k.$$

Определение 1. Семейство функций $\{W^\alpha f\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ назовем *аффинной системой функций типа Уолша*, порожденной функцией $f \in L_0^2$.

Для аффинной системы функций типа Уолша будем использовать обозначения $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ или $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ с учетом соответствующей замены индекса.

Следующая операторная структура мультисдвига введена и изучена в статье [1].

Определение 2. Будем говорить, что изометрические операторы W_0 и W_1, действующие в гильбертовом пространстве H, образуют *мультисдвиг*, если существует вектор $e \in H$ такой, что семейство $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ является ортонормированным базисом пространства H.

Рассмотренные нами операторы W_0 и W_1 образуют мультисдвиг в пространстве $H = L_0^2$, поскольку для вектора $e = w$ семейство $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ совпадает с системой Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, являющейся ортонормированным базисом в $H = L_0^2$. Этот факт будет использован в дальнейшем при изучении свойств аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. В частности, в статье [1, § 2] отмечается, что вектор $e \in H$ из определения 2 задан с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен единице (короче, с точностью до унимодулярной постоянной), т. е. справедлива

Лемма 2. *Если $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ полная и ортонормированная аффинная система типа Уолша, то функции f и w совпадают с точностью до унимодулярной постоянной.*

Таким образом, классическая система Уолша $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является единственной с точностью до унимодулярной постоянной полной и ортонормированной аффинной системой. В данной работе на основе теоремы факторизации исследуются свойства полноты и, отдельно, ортонормированности аффинных систем типа Уолша $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Пусть W_0, W_1 — мультисдвиг в гильбертовом пространстве H. Обозначим $H_0 = \mathrm{span}\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ — всюду плотное линейное многообразие в H, состоящее из всех конечных линейных комбинаций элементов ортонормированного базиса $\{W^\alpha e\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$. Для каждого вектора $f \in H$ определим оператор Q_f с областью определения H_0 посредством равенства

$$Q_f \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_\alpha W^\alpha e = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} c_\alpha W^\alpha f.$$

Не трудно видеть, что оператор Q_f перестановочен с мультисдвигом:

$$Q_f W_0 = W_0 Q_f, \qquad Q_f W_1 = W_1 Q_f.$$

Верно и обратное, всякий перестановочный с мультисдвигом оператор Q с областью определения H_0 имеет вид $Q = Q_f$ для вектора $f = Qe$.

В статье [1, § 4, теорема 4] установлена теорема факторизации для операторов, перестановочных с мультисдвигом, являющаяся обобщенным аналогом канонической факторизации аналитических функций из пространства Харди на внутренний и внешний множители.

Теорема факторизации. *Для любого ненулевого вектора $f \in H$ справедливо представление*

$$Q_f = Q_\varphi Q_F,$$

где Q_φ — изометрический оператор и Q_F — оператор полного ранга: $\overline{\mathrm{Im}\,(Q_F)} = H$.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Теорема 1. *Для каждой ненулевой функции $f \in L_0^2$, порождающей аффинную систему типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $\varphi \in L_0^2$, порождающая ортонормированную аффинную систему типа Уолша $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и такая, что*

$$\overline{\mathrm{span}}\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_0^2$ и $f \neq 0$. По теореме факторизации существуют функции $\varphi, F \in L_0^2$ такие, что $Q_f = Q_\varphi Q_F$. Так как Q_φ — изометрический оператор с всюду плотной областью определения, то он допускает единственное продолжение до изометрии, определенной на всем пространстве H. Это продолжение будем снова обозначать как Q_φ. По определению оператора Q_φ имеем: $Q_\varphi w_\alpha = \varphi_\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$. С учетом изометричности Q_φ отсюда получаем ортонормированность системы $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ и равенство $\mathrm{Im}\,(Q_\varphi) = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Теперь для получения соотношения (1) осталось проверить равенство

$$\mathrm{Im}\,(Q_\varphi) = \overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}.$$

Сразу заметим, что

$$f_\alpha = Q_f w_\alpha = Q_\varphi Q_F w_\alpha \in \mathrm{Im}\,(Q_\varphi).$$

Поэтому $\overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} \subset \mathrm{Im}\,(Q_\varphi)$. Докажем обратное включение. Для этого снова используем теорему факторизации, а именно всюду плотность образа $\mathrm{Im}\,(Q_F)$, в силу которой существует последовательность полиномов Уолша:

$$p_N = \sum_{\alpha\in\mathbb{A}} c_{N,\alpha} w_\alpha$$

таких, что $w = \lim_{N\to\infty} Q_F p_N$. Поскольку Q_φ — изометрия, то

$$\varphi = Q_\varphi w = \lim_{N\to\infty} Q_\varphi Q_F p_N = \lim_{N\to\infty} Q_f p_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathbb{A}} c_{N,\alpha} f_\alpha,$$

откуда $\varphi \in \overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Подпространство $\overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ инвариантно относительно мультисдвига $\{W_0, W_1\}$. Следовательно, имеем $\varphi_\alpha \in \overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ для всех $\alpha \in \mathbb{A}$, что доказывает включение $\mathrm{Im}\,(Q_\varphi) = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} \subset \overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$. Соотношение (1) доказано. Единственность функции φ с точностью до унимодулярной постоянной следует из разложения

$$\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} = \mathrm{span}\{\varphi\} \oplus W_0\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} \oplus W_1\overline{\mathrm{span}}\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}},$$

по которому однозначно восстанавливается одномерное подпространство $\mathrm{span}\{\varphi\}$. □

Теорема 2. *Для каждой ненулевой функции $f \in L_0^2$, порождающей аффинную систему типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция $F \in L_0^2$, порождающая полную аффинную систему типа Уолша $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и такая, что*

$$f_n = QF_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

где $Q : L_0^2 \to L_0^2$ — изометрический оператор.

Доказательство. По теореме факторизации имеем: $Q_f = Q_\varphi Q_F$. Так как

$$\overline{\mathrm{span}}\{F_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} = \overline{\mathrm{Im}\,(Q_F)} = L_0^2,$$

то аффинная система типа Уолша $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является полной в пространстве L_0^2. Кроме того, полагая, что $Q = Q_\varphi$, будем иметь:

$$f_\alpha = Q_f w_\alpha = Q_\varphi Q_F w_\alpha = Q_\varphi F_\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{A},$$

что равносильно соотношению (2). Докажем единственность функции F с точностью до унимодулярной постоянной. Предположим, что наряду с соотношением (2) также справедливо представление

$$f_n = \widetilde{Q}\widetilde{F}_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

где $\widetilde{Q}$ — изометрический оператор и $\{\widetilde{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — полная аффинная система. Как и при доказательстве теоремы 1, отсюда получаем:

$$\mathrm{Im}\,(Q) = \overline{\mathrm{span}}\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}} = \mathrm{Im}\,(\widetilde{Q}).$$

Тогда найдутся функции $u, v \in L_0^2$, такие, что

$$Qw = \widetilde{Q}u, \qquad \widetilde{Q}w = Qv.$$

Поскольку операторы Q и $\widetilde{Q}$ перестановочны с мультисдвигом $\{W_0, W_1\}$ (здесь надо учесть полноту систем $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), то для всех $\alpha \in \mathbb{A}$ имеем:

$$Qw_\alpha = \widetilde{Q}u_\alpha = \widetilde{Q}Q_u w_\alpha, \qquad \widetilde{Q}w_\alpha = Qv_\alpha = QQ_v w_\alpha.$$

Итак, получили операторные равенства:

$$Q = \widetilde{Q}Q_u, \qquad \widetilde{Q} = QQ_v.$$

Изометричность операторов Q и $\widetilde{Q}$ означает, что $Q^*Q = \widetilde{Q}^*\widetilde{Q} = I$. Следовательно,

$$Q_u^*Q_u = Q_u^*(\widetilde{Q}^*\widetilde{Q})Q_u = (\widetilde{Q}Q_u)^*\widetilde{Q}Q_u = Q^*Q = I,$$
$$Q_v^*Q_v = Q_v^*(Q^*Q)Q_v = (QQ_v)^*(QQ_v) = \widetilde{Q}^*\widetilde{Q} = I.$$

Таким образом, операторы Q_u и Q_v являются изометрическими. Более того, имеем:

$$Q_u = (\widetilde{Q}^*\widetilde{Q})Q_u = \widetilde{Q}^*Q, \qquad Q_v = (Q^*Q)Q_v = Q^*\widetilde{Q},$$

откуда видим, что изометрические операторы Q_u и Q_v друг к другу сопряжены: $Q_u^* = Q_v$. В таком случае, Q_u, Q_v — унитарные операторы и $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$, $\{v_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ — полные ортонормированные аффинные системы. Такие системы совпадают с точностью до унимодулярной постоянной с системой Уолша $\{w_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ согласно лемме 2. Поэтому $Q_u = \varkappa I$, $|\varkappa| = 1$, и $Q_v = \overline{\varkappa}I$. Окончательно находим $Q = \varkappa\widetilde{Q}$ и $\widetilde{F} = \varkappa F$. □

Определение 3. Система элементов $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ гильбертова пространства H называется *системой Бесселя*, если существует постоянная B такая, что для любого вектора $h \in H$ выполняется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(h, f_n)|^2 \leqslant B\|h\|^2.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 аффинные системы функций типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ являются или не являются системами Бесселя одновременно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу соотношения (2) матрицы Грама рассматриваемых систем совпадают. □

Замечание 1. Теорема 1 показывает, что каждая аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ допускает ортогонализацию с сохранением структуры аффинной системы. Отметим, что результат классической ортогонализации Грама – Шмидта аффинной системы $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ заведомо не будет аффинной системой, за исключением очевидных случаев, когда исходная система $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ изначально является ортогональной.

Подобные вопросы об ортогонализации системы функций с сохранением ее структуры часто возникают в различных задачах математической физики. В качестве примера рассмотрим классический вопрос об ортогонализации системы целочисленных сдвигов $\{f(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Хорошо известно, что если преобразование Фурье $\widehat{f}(\lambda)$ функции $f\in L^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$A\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(\lambda+k)|^2\leqslant B$$

для почти всех $\lambda\in\mathbb{R}$ с некоторыми постоянными $0<A\leqslant B<\infty$, то функция φ, определяемая равенством

$$\widehat{\varphi}(\lambda)=\frac{\widehat{f}(\lambda)}{\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(\lambda+k)|^2\Big)^{1/2}}\,,$$

порождает ортонормированную систему сдвигов $\{\varphi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Замечание 2. Теорема 2 показывает, что каждая аффинная система типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ допускает специального вида пополнение с сохранением структуры аффинной системы. При этом исходная система $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является изометрическим образом полной аффинной системы типа Уолша $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в силу соотношения (2). Следствие 1 означает, что такое пополнение также сохраняет свойство бесселевости аффинной системы.

Такие результаты тесно связаны с вопросами продолжения систем функций на более широкое множество, такими как классическая теорема Шура о продолжении [2] и ее обобщения [3–5].

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Примерами ортонормированных аффинных систем функций типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, кроме самой системы Уолша $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, служат аффинные системы, порожденные функциями вида

$$f=\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}c_nw_n,$$

где $k=0,1,\ldots$ фиксировано.

Пример 2. Пусть $\varPhi(z)$ — внутренняя аналитическая в единичном круге $D=(|z|<1)$ функция из пространства Харди $H^2(D)$, т. е.

$$\varPhi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\qquad\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<\infty,$$

и для некасательных граничных значений $\varPhi(e^{it})$ имеем: $|\varPhi(e^{it})|=1$ для почти всех t. Тогда представимая рядом по системе Радемахера $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ функция

$$\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}c_kr_k$$

порождает ортонормированную аффинную систему типа Уолша $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пример 3. Пусть функция $f\in L_0^2$ задана своим разложением по системе Уолша:

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}c_nw_n.$$

Если выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|c_n|^2\Big)^{1/2}\leqslant|c_1|,$$

то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна в пространстве L_0^2.

Пример 4. Пусть $\mathscr{F}(z)$ — внешняя аналитическая в единичном круге функция из пространства Харди $H^2(D)$, т. е.

$$\mathscr{F}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k,\qquad\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<\infty,$$

и справедливо интегральное представление:

$$\mathscr{F}(z) = \varkappa \exp\biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\mathscr{F}(e^{it})\,dt\biggr),$$

где $|\varkappa| = 1$ и $\mathscr{F}(e^{it})$ — граничные значения функции $\mathscr{F}(z)$. Тогда функция

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r_k$$

порождает полную в пространстве L_0^2 аффинную систему типа Уолша $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Замечание 3. В обозначениях примеров 2 и 4 заметим, что если функция $f \in L_0^2$ представима в виде суммы ряда по системе Радемахера и по теореме факторизации $Q_f = Q_\varphi Q_F$, то $\mathbf{f}(z) = \Phi(z)\mathscr{F}(z)$ — разложение на внутренний и внешний множители аналитической функции $\mathbf{f}(z)$, соответствующей функции f. Это обстоятельство позволяет указать конструктивный способ ортогонализации и пополнения аффинных систем функций типа Уолша, порождающая функция которых представима рядом по системе Радемахера. Далее, отмеченная связь между факторизацией операторов, перестановочных с мультисдвигом, и канонической факторизацией аналитических функций на внутренний и внешний множители (подробности см. в статье [1]), дает обоснование справедливости утверждений примеров 2 и 4. Наконец, заметим, что утверждение примера 1 проверяется непосредственно, а утверждение примера 3 мы оставляем без доказательства, которое основано на стандартных рассуждениях об устойчивости свойства полноты для близких систем функций.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых (*проект* МД-1354.2013.1) *и при поддержке РФФИ* (*проект №* 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Терехин П. А.* Мультисдвиг в гильбертовом пространстве // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, вып. 1. С. 69–81. DOI: 10.4213/faa32.
2. *Schur I.* Über endliche Gruppen und Hermitische Formen // Math. Z. 1918. Vol. 1, iss. 2–3. P. 183–207. DOI: 10.1007/BF01203611.
3. *Новиков С. Я.* Бесселевы последовательности как проекции ортогональных систем // Матем. заметки. 2007. Т. 81, вып. 6. С. 893–903. DOI: 10.4213/mzm3739.
4. *Czaja W.* Remark on Naimark's duality // Proc. Amer. Math. Soc. 2008. Vol. 136, iss. 3. P. 867–871. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09048-X.
5. *Терехин П. А.* О бесселевых системах в банаховом пространстве // Матем. заметки. 2012. Т. 91, вып. 2. С. 285–296. DOI: 10.4213/mzm7697.

Affine Systems of Walsh Type. Orthogonalization and Completion

P. A. Terekhin

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, TerekhinPA@info.sgu.ru

The new notion of affine system of Walsh type is introduced and studied. We proved results about orthogonalization and completion of affine systems of Walsh type with preservation of structure of affine systems.

Key words: Walsh system, affine system, comletness, orthogonality, multishift, factorization.

This work was supported by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of young Russian scientists (*project* МД-1354.2013.1) *and by the Russian Foundation for Basic Research* (*project no.* 13-01-00102).

References

1. Terekhin P. A. Multishifts in Hilbert spaces. *Funct. Anal. Appl.*, 2005, vol. 39, iss. 1, pp. 57–67. DOI: 10.1007/s10688-005-0017-5.
2. Schur I. Über endliche Gruppen und Hermitische Formen. *Math. Z.*, 1918, vol. 1, iss. 2–3, pp. 184–207. DOI: 10.1007/BF01203611.
3. Novikov S. Ya. Bessel sequences as projections of orthogonal systems. *Math. Notes*, 2007, vol. 81, no. 6, pp. 800–809. DOI: 10.1134/S0001434607050276.
4. Czaja W. Remark on Naimark's duality. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 136, no. 3, pp. 867-871. DOI: 10.1090/S0002-9939-07-09048-X.
5. Terekhin P. A. On Bessel Systems in a Banach Space. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, no. 2, pp. 272-282. DOI: 10.1134/S0001434612010270.