УДК 517.51, 517.98

ФРЕЙМЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

С. А. Крейс

Саратовский государственный университет
E-mail: KreisSA@info.sgu.ru

В статье рассматриваются свойства периодических групп операторов, связанные с фреймами в банаховых пространствах. Доказывается, что не существует такой сильно непрерывной равномерно ограниченной 2π-периодической однопараметрической группы операторов, действующей в банаховом пространстве, для которой элементы заданного кросс-фрейма, отличного от базиса, являются собственными векторами.

Ключевые слова: фрейм, кросс-фрейм, однопараметрическая группа операторов.

Frames and Periodic Groups of Operators

S. A. Kreis

In this paper some properties of periodic groups of operators which connected with frames theory are considered. We proof that there are no strongly continuous and uniformly bounded periodic one-parameter group of operators in Banach space which eigenvectors are cross-frame.

Key words: frame, cross-frame, one-parameter group of operators.

1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

В теории приближений известна схема получения прямых и обратных теорем в абстрактном банаховом пространстве, снабженном действием однопараметрической группы операторов. При этом приближающим аппаратом служат аналоги классов Бернштейна B_σ целых функций экспоненциального типа, которые в случае периодической группы операторов сводятся к тригонометрическим вектор-полиномам. Соответствующие результаты получены Н. П. Купцовым [1] и его учениками [2, 3].

Определение 1. Пусть X — банахово пространство и $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ — *сильно непрерывная изометрическая 2π-периодическая однопараметрическая группа ограниченных линейных операторов* в X (или, короче, *периодическая группа операторов*), удовлетворяющая условиям:

1) $T_{t+s} = T_t T_s$ и $T_0 = I_X$;
2) $T_t x \to x$ при $t \to 0$ для всех $x \in X$;
3) $\|T_t x\| = \|x\|$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in X$;
4) $T_{t+2\pi} = T_t$.

Заметим, что в случае равномерно ограниченной группы $\|T_t x\| \le C\|x\|$ после замены исходной нормы пространства X на эквивалентную ей норму $\|x\|_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|T_t x\|$ будет выполняться условие изометричности 3). Поэтому без потери общности мы сразу рассматриваем изометрические группы.

Инфинитезимальным (порождающим) оператором группы $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ называется оператор A, определяемый соотношением

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t},$$

если указанный предел существует. Хорошо известно, что порождающий оператор A является замкнутым оператором с всюду плотной областью определения $D_A \subset X$.

Тригонометрической вектор-функцией называется элемент $e_k \in X$ такой, что $Ae_k = ike_k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тригонометрическая вектор-функция e_k характеризуется соотношением $T_t e_k = e^{ikt} e_k$, $t \in \mathbb{R}$. Для *тригонометрических вектор-полиномов* $t_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k$ справедливы аналоги классических результатов о величинах наилучшего приближения $E_n(f) = \inf_{t_n} \|f - t_n\|$, таких как неравенство Джексона–Стечкина, теорема Бернштейна и т. п., в которых участвуют модули гладкости $\omega_k(f,\delta) = \sup\limits_{0\le h\le\delta} \|\Delta_h^k f\|$, $k \in \mathbb{N}$, где $\Delta_h = T_h - I_X$ — разностный оператор.

Наличие такой общей схемы получения прямых и обратных теорем теории приближений естественным образом приводит к следующей задаче.

Дана система ненулевых элементов $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ банахова пространства X. Требуется построить периодическую группу операторов $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ в X (в смысле определения 1) такую, что $Ax_k = ikx_k$, $k \in \mathbb{Z}$, где A — порождающий оператор. Если $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является безусловным базисом пространства X, то искомое построение возможно (см. [3]).

В настоящей работе нами исследуется вопрос о существовании периодической группы операторов в ситуации, когда данная система $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует кросс-фрейм [4]. Необходимые определения теории фреймов приведены далее.

2. КРОСС-ФРЕЙМЫ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть X — банахово пространство и X^* — сопряженное к нему. Далее, пусть задано банахово пространство X_d, состоящее из числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и удовлетворяющее следующему условию: система канонических ортов $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует безусловный базис в X_d. Тогда сопряженное пространство X_d^* мы можем рассматривать снова как пространство числовых последовательностей $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, причем $(a, b) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_k$ — общий вид непрерывного линейного функционала на X_d. Кроме того, потребуем, чтобы сопряженная система $\{\varepsilon_k^*\}_{k\in\mathbb{Z}}$ была (безусловным) базисом в X_d^*. Это требование эквивалентно тому, что пространство X_d^* сепарабельно [5, с. 130].

В следующем определении 2 мы объединяем два подхода к записи рамочных неравенств, задающих фрейм в банаховом пространстве [6, 7]. Следует отметить, что в ситуации гильбертова пространства $X = X^* = H$ и $X_d = \ell^2(\mathbb{Z})$ мы приходим к известному понятию альтернативного дуального фрейма (см. [4]).

Определение 2. Пусть $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset X \setminus \{0\}$ и $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset X^* \setminus \{0\}$. Пусть, далее, для всех $x \in X$ имеет место принадлежность $\{(x, y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in X_d$ и существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ и $0 < A' \le B' < \infty$ такие, что, во-первых, для любого $y \in X^*$ выполняются неравенства

$$A\|y\|_{X^*} \le \|\{(x_k, y)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{X_d^*} \le B\|y\|_{X^*} \tag{1}$$

и, во-вторых, для любого $x \in X$ выполняются неравенства

$$A'\|x\|_X \le \|\{(x, y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\|_{X_d} \le B'\|x\|_X. \tag{2}$$

Наконец, предположим, что для всех $x \in X$ и всех $y \in X^*$ справедливы формулы восстановления:

$$x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x, y_k) x_k \tag{3}$$

и

$$y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k, y) y_k. \tag{4}$$

Тогда будем говорить, что пара систем $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ образует *кросс-фрейм*.

Введем в рассмотрение операторы синтеза и анализа, ассоциированные с кросс-фреймом $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}, \{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Оператором синтеза по системе $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ называется оператор $S : X_d \to X$, определяемый равенством

$$Sa = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k x_k.$$

Оператор S корректно определен и является ограниченным линейным оператором, сопряженным к которому будет оператор анализа $R : X^* \to X_d^*$ по системе $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, действующий по формуле

$$Ry = \{(x_k, y)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

(это следует из фреймовых неравенств (1), подробнее см. [7]). Аналогично, оператор анализа по системе $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ суть оператор $R' : X \to X_d$, заданный равенством

$$R'x = \{(x, y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

По определению 2 оператор R' корректно определен и является ограниченным линейным оператором, сопряженным к которому будет оператор синтеза $S' : X_d^* \to X^*$ по системе $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$S'b = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k y_k.$$

В самом деле, для любой финитной числовой последовательности $b = \{b_k\}$ имеем

$$(x, S'b) = (x, \sum b_k y_k) = \sum (x, y_k) b_k = (R'x, b),$$

откуда с учетом фреймовых неравенств (2) получаем оценку

$$\| \sum b_k y_k \|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \le 1} (x, S'b) = \sup_{\|x\|_X \le 1} (R'x, b) \le B' \|b\|_{X_d^*} = B' \| \sum b_k \varepsilon_k^* \|_{X_d^*}.$$

Отсюда и по критерию Коши сходимости ряда находим, что для всех $b \in X_d^*$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} b_k y_k$ сходится вместе с рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} b_k \varepsilon_k^*$ (последний сходится в силу базисности системы $\{\varepsilon_k^*\}_{k\in\mathbb{Z}}$). Следовательно, имеем $(x, S'b) = (R'x, b)$ для всех $b \in X_d^*$.

Теперь заметим, что с учетом данных определений формулы восстановления (3) и (4) из определения 2 можно переписать в операторном виде

$$SR' = I_X, \qquad S'R = I_{X^*},$$

а сами фреймовые неравенства (1) и (2) показывают, что операторы анализа R и R' являются инъекциями или, в другой терминологии, изоморфизмами X^* в X_d^* и X в X_d соответственно. Поэтому операторы синтеза S и S' являются сюръекциями.

3. СПЛЕТАЮЩИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА СИНТЕЗА

Определение 3. Пусть заданы операторы $A : X_d \to X_d$ и $B : X \to X$. Оператор $S : X_d \to X$ называется *сплетающим оператором* для пары $[A, B]$, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X_d \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S"] & X_d \arrow[d, "S"] \\ X \arrow[r, "B"] & X \end{tikzcd}$$

т. е. справедливо равенство $SA = BS$.

Пусть N — пространство коэффициентов нуль-рядов системы $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т. е. (замкнутое) подпространство в X_d, состоящее из всех числовых последовательностей $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которых $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k x_k = 0$. Очевидно, что N совпадает с ядром оператора синтеза $N = \ker S$.

Теорема 1. *Пусть задан оператор $A : X_d \to X_d$ и $S : X_d \to X$ — оператор синтеза. Тогда существование такого оператора $B : X \to X$, что S является сплетающим оператором для пары $[A, B]$, равносильно включению $A(N) \subset N$. При этом оператор B определяется однозначно.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть такой оператор B существует. Рассмотрим произвольный нуль-ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k x_k = 0$. Наряду с последовательностью $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in N$ также рассмотрим последовательность $a' = \{a'_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, заданную равенством $a' = Aa$. Тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a'_k x_k = Sa' = SAa = BSa = B(0) = 0.$$

Это означает, что $a' \in N$. Включение $A(N) \subset N$ установлено.

Достаточность. Пусть справедливо включение $A(N) \subset N$. Для элемента $x \in X$ выберем $a \in X_d$ таким образом, чтобы $x = Sa$ и положим по определению $Bx = SAa$. Проверим корректность определения оператора B, т. е. его независимость от выбора $a \in X_d$. В самом деле, если $x = Sa_1 = Sa_2$, то $a_1 - a_2 \in N$ и, тем самым $A(a_1 - a_2) \in N$, откуда следует $SA(a_1 - a_2) = 0$. Таким образом, $SAa_1 = SAa_2$. Корректность определения оператора B установлена. Тождество $SA = BS$ выполняется по построению. Остается доказать единственность оператора B. Предположим, что существует другой оператор B', удовлетворяющий тем же свойствам. Тогда $BS = SA = B'S$. Из сюръективности оператора синтеза следует, что операторы B и B' совпадают на всем пространстве X.

Теорема 2. *Пусть задан оператор* $B : X \to X$ *и* $S : X_d \to X$ *— оператор синтеза. Тогда найдется такой оператор* $A : X_d \to X_d$*, что* S *является сплетающим оператором для пары* $[A, B]$*. При этом общий вид такого оператора дается формулой*

$$A = R'BS + A_0, \tag{5}$$

где A_0 *— произвольный оператор, удовлетворяющий условию* $A_0\,(X_d) \subset N$*.*

Доказательство. Пусть для оператора $A : X_d \to X_d$ выполнено $BS = SA$. Покажем, что в таком случае он имеет вид (5). Подействуем оператором R' справа:

$$BSR' = SAR'. \tag{6}$$

Известно (см. [4]), что для ассоциированных с кросс-фреймом операторов S и R' справедливы равенства $SR' = I_X$ и $R'S = I_{X_d} - P$, где P — проектор на пространство N. Перепишем (6) с учетом этого факта:

$$B = SAR'. \tag{7}$$

Далее рассмотрим конструкцию $R'BS$. С учетом (7) получим

$$R'BS = R'SAR'S.$$

Отсюда находим

$$R'BS = (I_{X_d} - P)A(I_{X_d} - P) = A - AP - PA + PAP.$$

По теореме 1 имеем $A(N) \subset N$. Тогда положим $A_0 = AP + PA - PAP$. Очевидно, что $A_0(X_d) \subset N$. Окончательно будем иметь $A = R'BS + A_0$.

Теперь покажем, что при любом выборе оператора A вида (5) оператор синтеза S будет сплетающим для пары $[A, B]$. Для этого просто вычислим

$$SA = S(R'BS + A_0) = SR'BS + SA_0 = BS + 0 = BS.$$

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема была доказана Т. А. Кузнецовой [3] для безусловного базиса в банаховом пространстве.

Теорема 3. *Пусть* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *— безусловный базис в банаховом пространстве* X*. Тогда существует такая сильно непрерывная равномерно ограниченная группа операторов* $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*, что* $Ae_k = i\lambda_k e_k$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Мы покажем, что для кросс-фрейма в банаховом пространстве это свойство не выполняется, по крайней мере, в случае периодических групп. А именно справедлива следующая основная теорема.

Теорема 4. *Пусть задан кросс-фрейм* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$*,* $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *в банаховом пространстве* X*, не являющийся базисом в* X*. Тогда не существует такой периодической группы операторов* $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$*, порождающий оператор которой имеет следующий вид:* $Ax_k = ikx_k$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть система $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет свойству, описанному в формулировке теоремы, т. е. существует такая периодическая группа операторов $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, что $T_t x_k = e^{ikt}x_k$. Тогда по теореме 2 для любого числа $t \in \mathbb{R}$ мы можем найти такой оператор $V_t : X_d \to X_d$, что оператор синтеза S будет сплетающим для пары $[V_t, T_t]$, и нам также известен вид этого оператора: $V_t = R'T_tS + A_{0t}$, где в качестве A_{0t} можно взять произвольный оператор, удовлетворяющий условию $A_{0t}(X_d) \subset N$.

Теперь воспользуемся теоремой 3. Рассмотрим сильно непрерывную равномерно ограниченную группу операторов $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, действующую в пространстве X_d и такую, что $W_t\varepsilon_k = e^{ikt}\varepsilon_k$. Далее, пусть $P = I_{X_d} - R'S$ — рассмотренный при доказательстве теоремы 2 проектор на подпространство N. Положим $A_{0t} = PW_t$. Вычислим

$$V_t\varepsilon_k = R'T_tS\varepsilon_k + PW_t\varepsilon_k = R'e^{ikt}x_k + PW_t\varepsilon_k = R'Se^{ikt}\varepsilon_k + (I - R'S)e^{ikt}\varepsilon_k = e^{ikt}\varepsilon_k.$$

В таком случае $V_t = W_t$. По теореме 1 $V_t(N) \subset N$. Возьмем $a \in N$ и получим $V_t a \in N$ или, что одно и то же, $(I-P)V_t a = 0$. Разложим элемент a по базису $a = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varepsilon_k$. Тогда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k (I-P)\varepsilon_k e^{ikt} = 0$, причем ряд сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ ввиду равномерной ограниченности группы операторов $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Следовательно, $a_k(I-P)\varepsilon_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Если бы при некотором k было $0 = (I-P)\varepsilon_k = R'S\varepsilon_k = R'x_k$, то $x_k = 0$ вопреки нашим предположениям. Значит, имеем $a_k = 0$ для всех k. Итак, приходим к равенству $N = \{0\}$. Это означает, что оператор синтеза S осуществляет изоморфизм пространств X_d и X и система $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ эквивалентна базису $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, а потому сама является базисом, что противоречит условию теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-300.2011.1).

Библиографический список

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, вып. 4. С. 117–178.
2. *Терехин А. П.* Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1975. Вып. 2. С. 3–28.
3. *Кузнецова Т. А.* О подпространствах типа B_σ в пространствах с базисом // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1976. Вып. 6, ч. 2. С. 140–151.
4. *Крейс С. А.* Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2009. Вып. 11. С. 36–38.
5. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства. М. : Иностр. лит., 1961. 232 с.
6. *Grochenig K.* Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monat. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.
7. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62.

УДК 517.968.23

ТРЕХЭЛЕМЕНТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман, К. М. Расулов

Смоленский государственный университет
E-mail: nataly@mannet.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций. Получен конструктивный метод ее решения в единичном круге в случае, когда рассматриваемая задача не вырождается в двухэлементные краевые задачи без сдвига.

Ключевые слова: краевая задача, бианалитические функции, сдвиг Карлемана.

Three-Element Problem of Carleman Type for Bianalitic Functions in a Circle

N. R. Perelman, K. M. Rasulov

The article is devoted to the investigation of three-element boundary value problem of Carleman type for bianalytic functions. A constructive method for solution in a circle was found for the case when the problem was not reducible to a two-element boundary value problems without a shift.

Key words: boundary value problem, bianalytic functions, Carleman shift.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L. Для определенности будем полагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+. Рассматривается следующая краевая задача, впервые сформулированная в монографии [1].

Требуется найти все бианалитические функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + G_{12}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + g_1(t), \qquad (1)$$