Библиографический список

1. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–183.
2. *Олейник О. А.* Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области // Докл. АН СССР. 1952. Т. 87, № 6. С. 885–887.
3. *Глушко В. П.* Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Моск. мат. о-ва. 1970. Т. 23. С. 113–178.
4. *Рукавишников В. А., Ереклинцев А. Г.* О коэрцитивности R_ν-обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1680–1689.
5. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. 1969. Т. 80 (112), вып. 4. С. 455–491.
6. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 4. С. 29–56.
7. *Глушко В. П.* Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. № 2. Новосибирск, 1978. С. 49–68.
8. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / Воронеж. гос. ун-т. Воронеж, 1979. 47 с. Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048-79.
9. *Левендорский С. З.* Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе // Мат. сб. 1980. Т. 111 (153), вып. 4. С. 483–501.
10. *Исхоков С. А.* О гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением // Докл. АН. 2001. Т. 378, № 3. С. 306–309.
11. *Баев А. Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. Воронеж, 2008. 240 с.
12. *Баев А. Д.* Об одной краевой задаче в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка // Вестн. Самарск. гос. ун-та. Сер. Естеств. науки. 2008. № 3 (62). С. 27–39.
13. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 6. С. 727–728.
14. *Глушко В. П.* Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. Воронеж, 1972. 193 с.
15. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971. 371 с.

УДК 514.764

ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВЯЗНОСТЬЮ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ С ДОПУСТИМОЙ ФИНСЛЕРОВОЙ МЕТРИКОЙ

А. В. Букушева, С. В. Галаев

Саратовский государственный университет
E-mail: bukusheva@list.ru, sgalaev@mail.ru

Вводятся понятия внутренней и продолженной связности над гладким распределением D с допустимой финслеровой метрикой. С помощью продолженной связности на распределении D как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется и исследуется методами внутренней геометрии неголономного многообразия почти контактная метрическая структура.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, многообразия Сасаки, внутренняя геометрия почти контактных метрических многообразий, допустимая финслерова метрика.

Almost Contact Metric Structures Defined by Connection over Distribution with Admissible Finslerian Metric

A. V. Bukusheva, S. V. Galaev

The notion of the intrinsic connection and the extended connection of an almost contact metric manifold D with admissible Finslerian metric is introduced and studied. Using this and the extended connection on D as on the total space of a vector bundle, an almost contact metric structure is defined and investigated.

Key words: almost contact manifold, Sasakian manifold, intrinsic geometry of almost contact metric manifolds, admissible Finslerian metric.

ВВЕДЕНИЕ

Гладкое коразмерности 1 распределение D, заданное на гладком многообразии X, в настоящей работе рассматривается как тотальное пространство векторного расслоения (D, π, X). Имеется вполне очевидная аналогия между геометрией многообразия D как подмногообразия пространства касательного расслоения и геометрией самого касательного расслоения. Однако возможность продолжения известных результатов из геометрии касательных расслоений на случай векторного расслоения (D, π, X) существенно ограничивается нечетностью размерности многообразия D. Таким образом, мы не можем, например, говорить о симплектической структуре на многообразии D, в то же время в работе [1] было показано, что в случае задания на распределении D допустимой финслеровой структуры [2], на D возникает почти контактная метрическая структура, свойства которой излагаются в настоящей статье.

В работе R. Miron [3] было положено начало исследованию геометрии финслеровых векторных расслоений, являющихся естественным обобщением касательных расслоений многообразий с финслеровой метрикой. Финслерово векторное расслоение характеризуется заданием на тотальном пространстве векторного расслоения класса линейных связностей, специальным образом ассоциируемых с некоторой инфинитезимальной связностью (см., например, [4]). В работах [2, 5] введено понятие гладкого распределения D с допустимой финслеровой метрикой, позволяющее с новой точки зрения взглянуть на проблематику финслеровых векторных расслоений. В настоящей работе на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, X), где D — гладкое распределение с допустимой финслеровой метрикой, естественным образом определяется почти контактная метрическая структура, изучаются свойства введенной структуры методами внутренней геометрии неголономного многообразия. Исследование геометрии многообразий почти контактной метрической структуры начинается с выходом основополагающих работ S. S Chern [6], J. W. Gray [7], S. Sasaki [8]. Почти контактные метрические структуры являются нечетномерным аналогом почти эрмитовых структур и между этими классами структур существует ряд важных взаимосвязей. Достаточно полно результаты, полученные в этой области до 1976 года, отражены в книге [9]. Большой вклад в развитие геометрии почти контактных метрических пространств внесли В. Ф. Кириченко и его ученики (см., например, [10, 11]).

Особенностью предлагаемого подхода к исследованию почти контактных метрических структур является активное использование методов внутренней геометрии гладких распределений, развитых в работе [12] применительно к геометрии почти контактных метрических структур и основанных на трудах [13, 14] В. В. Вагнера. В терминологии В. В. Вагнера многообразие почти контактной метрической структуры является неголономным многообразием коразмерности 1 с дополнительными, называемыми им внутренними, структурами. Понятие внутренней геометрии неголономного многообразия было определено Схоутеном как совокупность тех свойств, которые зависят только от параллельного перенесения внутри самого неголономного многообразия и от его оснащения в объемлющем пространстве.

В настоящей работе предлагается использовать методы неголономной геометрии, разработанные В. В. Вагнером для исследования геометрии многообразий с почти контактной метрической структурой. Следуя идеологии, заложенной в работах Схоутена и Вагнера, мы определяем внутреннюю геометрию почти контактного метрического пространства X как совокупность тех свойств, которыми обладают гладкое распределение D, задаваемое контактной формой η, допустимое поле аффинора φ (называемое нами допустимой почти комплексной структурой) такое, что $\varphi^2(\vec{X}) = -\vec{X}$; поле допустимых тензоров римановой метрики g, связанное с допустимой почти комплексной структурой равенством $g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y})$, где $\vec{X}, \vec{Y}$ — допустимые векторные поля. К объектам внутренней геометрии почти контактного метрического пространства следует отнести и те объекты, которые являются производными от уже указанных внутренних структур: кососимметрическая 2-форма $\omega = d\eta$; векторное поле $\vec{\xi}$, называемое полем Риба, определяющее оснащение распределения $D - \vec{\xi} \in D^{\perp}$ и однозначно определяемое равенствами $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ в случае, когда форма ω имеет максимальный ранг; внутренняя связность ∇ , осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых и однозначно определяемая полем g; связность ∇^1, являющаяся естественным продолжением связности ∇ и осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль произвольных кривых многообразия X.

Заметим, похожие идеи использовались в некоторых работах, посвященных исследованию почти контактных метрических структур. Так, например, в работе [15] пара (D, φ) трактуется как аналог почти комплексного многообразия, а определяемая в этой же работе линейная связность [15, p. 1960] является, по существу, аналогом внутренней связности Вагнера.

Работа состоит из трех параграфов. В первом параграфе в терминах внутренней геометрии сообщаются основные сведения о почти контактных метрических структурах. Во втором параграфе дается подробное описание внутренней связности (связности над распределением) и продолженной связности (инфинитезимальной связности в векторном расслоении). Понятие связности над распределением, рассматривалось в работах [16, 17] и активно использовалось затем применительно к неголономному многообразию с допустимой финслеровой метрикой в работах [1, 2, 5, 12]. Задание связности над распределением эквивалентно заданию внутренней связности Вагнера, а продолженная связность соответствует связности, сконструированной Вагнером в работе [14] с целью построения тензора кривизны неголономного многообразия. В третьем параграфе показывается, что связность над распределением с финслеровой метрикой определяет на тотальном пространстве векторного расслоения (D, π, X), почти контактную метрическую структуру. Исследуются некоторые свойства построенной структуры.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Пусть X — гладкое многообразие нечетной размерности n, $\Xi(X)$ — $C^\infty(X)$-модуль гладких векторных полей на X, d — оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими, класса C^∞. Для упрощения изложения тензорное поле в дальнейшем иногда называется тензором. *Почти контактной метрической структурой на X* называется совокупность $(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g)$ тензорных полей на X, где φ — тензор типа (1, 1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом

$$\begin{gathered}(a)\ \eta(\vec{\xi}) = 1, \qquad (b)\ \varphi(\vec{\xi}) = 0, \qquad (c)\ \eta \circ \varphi = 0, \qquad (d)\ \varphi^2 \vec{X} = -\vec{X} + \eta(\vec{X})\vec{\xi}, \\ (e)\ d\eta(\vec{X}, \vec{\xi}) = 0, \qquad (f)\ g(\varphi\vec{X}, \varphi\vec{Y}) = g(\vec{X}, \vec{Y}) - \eta(\vec{X})\eta(\vec{Y}),\end{gathered} \tag{1}$$

$\vec{X}, \vec{Y} \in \Xi(X)$. Легко проверить, что тензор $\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \varphi\vec{Y})$ кососимметричен. Он называется *фундаментальной формой структуры*. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*. В случае, когда $\Omega = d\eta$, почти контактная метрическая структура называется *контактной метрической структурой*. Почти контактная метрическая структура называется нормальной, если $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где N_φ — кручение Нейенхейса, образованное тензором φ. Нормальная контактная метрическая структура называется сасакиевой структурой. Многообразие с заданной на нем сасакиевой структурой называется *сасакиевым многообразием*. Пусть D — гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ — его оснащение. В дальнейшем будем полагать, что ограничение формы $\omega = d\eta$ на распределении D является невырожденной формой. В этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, $ker\omega = \mathrm{Span}\,(\vec{\xi})$ и называется вектором Риба.

Для исследования внутренней геометрии неголономного многообразия и, вообще, для изучения почти контактных метрических структур удобно использовать адаптированные карты [12, 15]. Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n)$ $(a, b, c, e = 1, \ldots, n-1)$ на многообразии X будем называть адаптированной к неголономному многообразию D, если $D^\perp = \mathrm{Span}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Нетрудно установить, что любые две адаптированные карты связаны между собой преобразованиями вида: $x^a = x^a(x^{\tilde{a}})$, $x^n = x^n(x^{\tilde{a}}, x^{\tilde{n}})$. Такие системы координат названы Вагнером в работе [14] *градиентными*.

Пусть $P : TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему $D : D = \mathrm{Span}\,(\vec{e}_a)$.

Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [14]. Если потребовать, чтобы для всех адаптированных координат выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением исключительно адаптированных координат с условием $\vec{\xi} = \partial_n$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ как базис, определяемый адаптированной картой. При преобразовании адаптированной системы координат, векторы адаптированного базиса преобразуются следующим образом: $\vec{e}_a = \dfrac{\partial\, x^{\tilde{a}}}{\partial\, x^a}\vec{e}_{\tilde{a}}$.

Прямым вычислением получаем

$$[\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n \Gamma^n_a \partial_n. \tag{2}$$

Используя (1e), (2), а также известную формулу $d\eta(\vec{X},\vec{Y}) = \frac{1}{2}(\vec{X}\eta(\vec{Y}) - \vec{Y}\eta(\vec{X}) - \eta([\vec{X},\vec{Y}]))$, получаем $[\vec{e}_a, \partial_n] = \vec{0}$ и $\partial_n \Gamma^n_a = 0$.

Тензорное поле, заданное на почти контактном метрическом многообразии, назовем допустимым (к распределению D), если оно обращается в нуль каждый раз, когда его векторный аргумент принадлежит оснащению $D^{\perp}$, а ковекторный аргумент коллинеарен форме η. Координатное представление допустимого тензорного поля типа (p,q) в адаптированной карте имеет вид: $t = t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}\vec{e}_{a_1}\otimes\ldots\otimes\vec{e}_{a_p}\otimes dx^{b_1}\otimes\ldots\otimes dx^{b_q}$.

Так, в частности, под допустимым векторным полем будем понимать такое векторное поле, все значения которого лежат в распределении D, а под допустимой 1-формой будем понимать всякую 1-форму, обращающуюся в нуль на оснащении $D^{\perp}$. Всякая тензорная структура, заданная на многообразии X, с помощью проектора $P: TX \to D$ определяет на X единственную допустимую тензорную структуру того же типа. Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа (1, 1). Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Форма $\omega = d\eta$ также является допустимым тензорным полем.

Учитывая справедливость равенства $L_{\vec{\xi}} t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} = \partial_n t^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q}$, где $L_{\vec{\xi}}$ — оператор дифференцирования Ли вдоль поля $\vec{\xi}$, заключаем, что производные $\partial_n t$ от компонент допустимого тензорного поля t в адаптированной системе координат являются компонентами допустимого тензорного поля того же типа. Назовем допустимое тензорное поле интегрируемым, если найдется такой атлас адаптированных карт, что в каждой из карт этого атласа компоненты поля постоянны. Необходимым условием интегрируемости допустимого поля t является обращение в нуль производных $\partial_n t$. Назовем допустимую тензорную структуру t квазиинтегрируемой, если в адаптированных координатах выполняется равенство $\partial_n t = 0$. Форма $\omega = d\eta$ является одним из примеров интегрируемой допустимой тензорной структуры. Имеют место следующие теоремы [12].

Теорема 1. *Аффинорная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место равенство $P(N_\varphi(\vec{X},\vec{Y})) = 0$, $\vec{X},\vec{Y} \in \Xi(X)$.*

Теорема 2. *Почти контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: $P(N_\varphi(\vec{X},\vec{Y})) = 0$, $\omega(\varphi\,\vec{u}, \varphi\,\vec{v}) = \omega(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{X},\vec{Y} \in \Xi(X)$, $\vec{u},\vec{v} \in \Gamma D$, ΓD — модуль гладких сечений распределения D.*

Теорема 3. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда аффинорная структура φ интегрируема.*

Теоремы 1–3 нам понадобятся для анализа почти контактных метрических структур, возникающих на распределении с финслеровой метрикой.

2. ВНУТРЕННЯЯ И ПРОДОЛЖЕННАЯ СВЯЗНОСТИ НАД РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Для аналитического описания связности над распределением D введем на D структуру гладкого многообразия следующим образом. Каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ на многообразии D ставится в соответствие карта $\tilde{K}(\tilde{x}^\alpha,\, x^{n+a})$ на многообразии D, где x^{n+a} — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$, $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha \circ \pi$. В дальнейшем координаты $\tilde{x}^\alpha$ на многообразии D будем обозначать x^α (так же как и соответствующие координаты на многообразии X).

Говорят, что задана связность над распределением D, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\widetilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D. Таким образом, задание связности над распределением эквивалентно заданию объекта $G^a_b(x^\alpha, x^{n+a})$ такого, что $HD = \mathrm{Span}\,(\vec{\epsilon}_a)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_a\partial_{n+b}$.

В работе [5] было введено понятие продолженной связности. Продолженная связность получается из внутренней связности с помощью равенства $TD = \widetilde{HD} \oplus VD$, где $HD \subset \widetilde{HD}$. По существу, продолженная связность является связностью в векторном расслоении.

Под внутренней линейной связностью в неголономном многообразии D [14] понимается отображение $\nabla : \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D$, удовлетворяющее следующим условиям: 1)$\nabla_{f_1\vec{u_1}+f_2\vec{u_2}} = f_1\nabla_{\vec{u_1}} + f_2\nabla_{\vec{u_2}}$, 2)$\nabla_{\vec{u}}f\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v} + (\vec{u}f)\vec{v}$, где ΓD — модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$.

Кручение внутренней линейной связности S по определению полагается равным $S(\vec{X},\vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - P[\vec{X},\vec{Y}]$. Таким образом, в адаптированных координатах мы имеем $S^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba}$.

Всякая внутренняя линейная связность определяет связность над распределением и, обратно, связность над распределением D определяет линейную связность в неголономном многообразии D, если имеют место равенство $G^a_b(x^a, x^{n+a}) = \Gamma^a_{bc}(x^a)x^{n+c}$.

Договоримся в дальнейшем, что всякая продолженная связность будет отождествлена с парой $(\nabla, \vec{u})$, где ∇ — внутренняя связность, а $\vec{u}$ — векторное поле на D, такое, что $\pi_*\vec{u} = \vec{\xi}$. Очевидно, что $\vec{u} = \partial_n - G^a_n\partial_{n+a}$. Легко установить, что объект G^a_n преобразуется по тензорному закону и, в частности, мы можем положить его равным нулю.

Пусть, далее, ∇^1 — продолженная связность, конструируемая из внутренней связности следующим образом: $\widetilde{HD} = HD \oplus \mathrm{Span}\,(\vec{\partial_n})$. Имеют место следующие теоремы [12].

Теорема 4. *Контактная метрическая структура является нормальной тогда и только тогда, когда структура φ квази-интегрируема и выполняется равенство $\nabla\varphi = 0$, где ∇ — внутренняя метрическая связность.*

Теорема 5. *Почти комплексная структура φ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\nabla^1\varphi = 0$.*

3. ПОЧТИ КОНТАКТНАЯ МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА ТОТАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ (D, π, X)

Предположим, что на многообразии D задана функция $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ такая, что выполняются следующие условия:

1) L — гладкая положительная функция на $D^0 = D\backslash\vec{0}$;

2) L — положительна однородна степени 1 относительно слоевых координат;

3) квадратичная форма $L^2_{\cdot a \cdot b}\xi^a\xi^b = \dfrac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a}\partial x^{n+b}}\xi^a\xi^b$ положительно определена.

Назовем функцию $L(x^\alpha,\, x^{n+a})$ допустимой финслеровой метрикой, а пару $(D,\, L)$ — гладким распределением с допустимой финслеровой метрикой.

Над распределением D с допустимой финслеровой структурой [5] определяется внутренняя связность, порождаемая распределением $HD = \mathrm{Span}\,(\vec{\epsilon}_\alpha)$, где $\vec{\epsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n - G^b_{ac}x^{n+c}\partial_{n+b}$, $G^a_{bc} = G^{a}_{\cdot b \cdot c} = \partial_{n+b}\partial_{n+c}G^a$, $G^a = g^{ab}(\partial_c L^2_{\cdot b}x^{n+c} - \vec{e}_b L^2)$, $g_{ab} = \frac{1}{2}L^2_{\cdot a \cdot b}$, а также продолженная связность $(\nabla, \vec{u})$, где $\vec{u} = \partial_n - G^a_n\partial_{n+a}$, $G^a_n = \omega^{bc}R^a_{bc}$. Объект R^a_{bc} будет определен ниже. Будем считать, что распределение $\tilde{D}$ оснащено дополнительным распределением $\mathrm{Span}\,(\partial_n)$. Определим на многообразии D допустимое к распределению $\tilde{D}$ поле аффинора J, полагая $J(\vec{\epsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J(\partial_{n+a}) = -\vec{\epsilon}_a$, $J(\partial_n) = 0$. С помощью равенств $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^h) = \tilde{g}(\vec{u}^v, \vec{v}^v) = g(\vec{u}, \vec{v})$, $\tilde{g}(\vec{u}^h, \vec{v}^v) = \tilde{g}(\vec{u}^h, \partial_n) = \tilde{g}(\vec{u}^v, \partial_n) = 0$, где $\vec{u}, \vec{v} \in \Gamma D$, g — допустимая финслерова структура, на многообразии D определяется допустимая риманова метрика. Учитывая равенство $\tilde{g}(J(\vec{u}), J(\vec{v})) = \tilde{g}(\vec{u}, \vec{v})$, получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Четверка $(J,\, \partial_n,\, \tilde{\eta},\, \tilde{g})$, где $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi_*$, определяет на многообразии D почти контактную метрическую структуру.*

Исследуем свойства полученной структуры. Найдем условия, при которых допустимая почти комплексная структура J интегрируема. Проводя необходимые вычисления, получаем:

$$[\vec{\epsilon}_a,\, \vec{\epsilon}_b] = 2\omega_{ab}\,\partial_n + R^c_{ab}\,\partial_{n+c}, \qquad [\vec{\epsilon}_a,\, \partial_n] = \partial_n G^b_a\partial_{n+b}, \qquad [\vec{\epsilon}_a,\, \partial_{n+b}] = G^c_{ab}\partial_{n+c}, \tag{3}$$

где $R^c_{ba} = 2(\vec{e}_{[b}G^c_{a]} - G^d_{[a}G^c_{b]\cdot d})$. Если изначально заданная финслерова структура вырождается в риманову, то легко убедиться в том, что объекты R^c_{ba} и $\partial_n\Gamma^n_a$ совпадают с тензорами, названными Вагнером в [14] тензорами кривизны Схоутена. Будем называть в дальнейшем эти объекты и в общем случае тензорами кривизны Схоутена. Используя равенства (3) и теорему 2, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 7. *Почти комплексная структура J является интегрируемой тогда и только тогда, когда тензоры кривизны Схоутена обращаются в нуль:* $R^c_{ab} = 0$, $\partial_n G^b_a = 0$.

Заметим, что как следует из теоремы 2, определенная выше структура ни при каких условиях не может быть нормальной почти контактной метрической структурой.

Библиографический список

1. *Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П.* О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С. 10–14.
2. *Галаев С. В.* О продолжении внутренней связности неголономного многообразия с финслеровой метрикой // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2011. Вып. 13. С.25–28.
3. *Miron R.* Techniques of Finsler geometry in the theory of vector bundles // Acta Sci. Math. 1985. № 49. P. 119–129.
4. *Prasad K.* Quarter symmetric metric Finsler connections on Kenmotsu and P-Kenmotsu vector bundles // Intern. Math. Forum. 2008. Vol. 3, № 18. P. 847–855.
5. *Galaev S. V.* Contact structures with admissible Finsler metrics // Physical Interpretation of Relativity Theory : Proceedings of Intern. Meeting. Moscow, 4–7 July 2011. Moscow: BMSTU, 2012. P. 80–87.
6. *Chern S. S* Pseudogroupes continus infinis // Colloques Internat. Centre Nat. Rech. Sci. 1953. Vol. 52. P. 119–136.
7. *Gray J. W.* Some global properties of contact structures // Ann. of Math. 1959. Vol. 69, № 2. P. 421–450.
8. *Sasaki S.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure // Tôhoku Math. J. Second Series. 1960. Vol. 12, № 3. P. 459–476.
9. *Blair D. E.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; N. Y. : Springer-Verlag, 1976. 146 p.
10. *Кириченко В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геом. ВИНИТИ. 1986. Т. 18. С. 25–71.
11. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 8. С. 71–100.
12. *Галаев С. В.* Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразований // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 16–22.
13. *Вагнер В. В.* Дифференциальная геометрия неголономных многообразий : VIII Междунар. конкурс им. Н. И. Лобачевского (1937) : отчёт. Казань : Казан. физ.-мат. общ-во, 1940. 327 с.
14. *Вагнер В. В.* Геометрия $(n-1)$-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.
15. *Bejancu A.* Kähler contact distributions // J. of Geometry and Physics. 2010. № 60. P. 1958—1967.
16. *Вершик А. М., Гершкович В. Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундаментальные направления ВИНИТИ. 1987. Т. 16. С. 5–85.
17. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.

УДК 517.984

УТОЧНЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов*, А. П. Хромов*

Воронежский государственный университет
E-mail: bmsh2001@mail.ru
*Саратовский государственный университет
E-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

В работе изучается система Дирака с недиффернцируемым потенциалом. Устанавливаются асимптотические формулы для собственных значений (в том числе и уточненные) и собственных функций. В качестве приложения получается теорема П. Джакова и Б. С. Митягина о базисах Рисса со скобками.

Ключевые слова: асимптотика собственных значений и собственных функций, система Дирака, базис Рисса.

Refined Asymptotic Formulas for Eigenvalues and Eigenfunctions of the Dirac System with Nondifferentiable Potential

M. Sh. Burlutskaya, V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov

This paper investigates the Dirac system with the continuous potential. Asymptotic formulas for the eigenvalues (including refined) and eigenfunctions are established. As an application we obtain a theorem P. Dzhakova and B. S. Mityagin on the Riesz bases with brackets.

Key words: asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions, Dirac system, Riesz bases.