нулю (аксиома II). Естественное требование смещения от текущей итеративной точки в направлении полученного минимума содержится в аксиоме I.

Правило остановки (Шаг 4). Зададимся конечной погрешностью $\varepsilon > 0$. После t-й итерации сделаем еще столько шагов, чтобы их суммарная длина превосходила ε в K раз. Другими словами,

$$\sum_{j=t}^{t+N-1} |x^{j+1} - x^j| > K\varepsilon.$$

Если при этом все итерации от i-й до $(i+N)$-й остаются в шаре радиуса ε с центром x^t, т. е. $\{x^j\}_{j=t}^{N+t} \subset \mathbb{S}^{\varepsilon}_{x^t}$, то на этом заканчивается итеративный процесс. В качестве ответа можно взять последнюю итеративную точку из множества $\{x^j\}_{j=t}^{N+t}$.

Теорема. *Алгоритм Шаг 1 – Шаг 5 с выбором весов согласно аксиомам I, II, III сходится.*

Действительно, поскольку разность $\bar{x}^t - x^t$ соответствует обобщенному градиенту, то приведенный алгоритм с указанным выбором весов подпадает под действие теоремы Ю. М. Ермольева [3], что обеспечивает сходимость этого алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый итеративный алгоритм вполне адекватен рассматриваемой задаче. Его сходимость имеет и некоторые недостатки, присущие сходимости классических прямых методов стохастического программирования, в частности замедление сходимости с возрастанием индекса шага итерации. Преимущество по сравнению с ними видится в более легком пошаговом решении линейной программы (11), чем вычисление обобщенного градиента с последующим нахождением проекции на допустимое множество [2, 3, 7].

Представляется интересным расширение области применения приводимого алгоритма на задачу более общего вида, а именно на ограничения вида (3) с нелинейностью по x.

Библиографический список

1. *Кибзун А. И., Кан Ю. С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009. 372 с.

2. *Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С., Тюпля В. И.* Математические методы исследования операций. М. : Наука, 1979. 312 с.

3. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования. М. : Наука, 1976. 340 с.

4. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М. : Наука, 1979. 384 с.

5. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации. М. : Сов. радио, 1974. 400 с.

6. *Kolbin V. V.* Stochastic programming. Boston, USA : D. Reidel Publ. C., 1977. 325 p.

7. *Ермольев Ю. М., Норкин В. И.* Методы решения невыпуклых негладких задач стохастической опримизации // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 5. С. 89–106.

УДК 517.937: 517.983

УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. В. Марюшенков

Воронежский государственный университет
E-mail: stasint1@mail.ru

В данной работе получены условия обратимости одного класса несамосопряженных операторов, являющихся разностью неограниченного антисопряженного и нормального оператора.

Ключевые слова: несамосопряженный оператор, нормальный оператор.

The Conditions of Invertibility of a Class Nonselfadjoint Operators

S. V. Maryushenkov

In this work we obtain the conditions of invertibility of a class of nonselfadjoint operator that are difference between the nonbounded antisymmetric and the normal operator.

Key words: nonselfadjoint operator, normal operator.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $\mathrm{End}\, H$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в H. Если $A, B \in \mathrm{End}\, H$ — два самосопряженных оператора, B — непрерывно обратим и операторы A, B перестановочны, то спектр оператора $A + iB$ допускает дихотомию, т. е. не пересекается с мнимой осью $i\mathbb{R}$. Если же операторы A и B не перестановочны, то такой результат без дополнительных условий, вообще говоря, неверен. В качестве условия может, например, выступать $\|A\|\mathrm{dist}(\{0\}, \sigma(B)) < 1$. Если в качестве дополнительного условия рассматривать малость оператора $AB - BA$, то естественно рассмотрение неограниченного оператора A. В статье [1] были получены условия дихотомии спектра оператора $L = A - B$, где B — самосопряженный оператор, случай разностного оператора L на локально-компактных абелевых группах рассмотрен в [2]. В настоящей работе рассматриваются условия обратимости оператора $L = A - B$, когда оператор B — нормальный.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем считать, что оператор $A : D(A) \subset H \to H$ — антисимметричный, а оператор $B \in \mathrm{End}\, H$ — нормальный.

Рассмотрим оператор вида $L = A - B : D(A) \subset H \to H$.

Введем обозначения: $\sigma_+ = \sigma_+(B) = \sigma(B) \cap \mathbb{C}_+$, $\sigma_- = \sigma_-(B) = \sigma(B) \cap \mathbb{C}_-$, где $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\}$, $\sigma(B)$ — спектр оператора B. Обозначим $\chi(B) = \chi_+(B) + \chi_-(B)$, $\chi_0(B) = \min\{\chi_+(B), \chi_-(B)\}$, где $\chi_+(B) = \min\limits_{\lambda \in \sigma_+} \mathrm{Re}\, \lambda$, $\chi_-(B) = |\max\limits_{\lambda \in \sigma_-} \mathrm{Re}\, \lambda|$.

Символами $P_+ = P(\sigma_+, B)$, $P_- = P(\sigma_-, B)$ обозначим проекторы Рисса, построенные по множествам σ_+, σ_- соответственно.

Наряду с оператором A, рассмотрим трансформатор $ad_A : D(ad_A) \subset \mathrm{End}\, H \to \mathrm{End}\, H$ с областью определения $D(ad_A)$, состоящей из таких операторов $X \in \mathrm{End}\, H$, для которых $X(D(A)) \subset D(A)$. При этом оператор $AX - XA$ допускает расширение с $D(A)$ до некоторого оператора из $\mathrm{End}\, H$, обозначаемого через $AX - XA$ или $[A, X]$. Будем полагать $ad_A X = [A, X]$.

Теорема 1. *Пусть обратимый оператор B принадлежит области определения $D(ad_A)$ трансформатора ad_A и выполнено одно из следующих условий:*

1) $\|AB - BA\| < \chi_0(B)\chi(B)$,

2) $\|[B, AB - BA]\| < \chi_0(B)\chi(B)^2$,

3) $\|ad_B^n(AB - BA)\| < \chi_0(B)\chi(B)^{n+1}$, $n \geq 2$, где ad_B^n — n-я степень трансформатора $ad_B : \mathrm{End}\, X \to \mathrm{End}\, X$, определенного формулой $ad_B X = BX - XB$.

Тогда оператор $L = A - B$ обратим и норма обратного оператора имеет соответствующую (каждому случаю теоремы) оценку:

1) $\|L^{-1}\| \leq \dfrac{\chi(B)}{\chi_0(B)\chi(B) - \|AB - BA\|}$,

2) $\|L^{-1}\| \leq \dfrac{\chi(B)^2}{\chi_0(B)\chi(B)^2 - \|[B, AB - BA]\|}$,

3) $\|L^{-1}\| \leq \dfrac{\chi(B)^{n+1}}{\chi_0(B)\chi(B)^{n+1} - \|ad_B^n(AB - BA)\|}$, $n \geq 2$.

Доказательство. Ведем в рассмотрение оператор $J = P_+ - P_-$. Он является нормальным и удовлетворяет условиям $\|J\| = 1$ и $J^2 = I$.

Покажем, что J принадлежит области определения $D(ad_A)$. Отметим, что если X — обратимый оператор из $D(ad_A)$, то $X^{-1} \in D(ad_A)$, причем $AX^{-1} - X^{-1}A = -X^{-1}(AX - XA)X^{-1}$. Тогда принадлежность оператора J области определения $D(ad_A)$ генератора ad_A следует из представления проектора Рисса:

$$P_\pm = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda, B)\, d\lambda, \qquad R(\lambda, B) = (B - \lambda I)^{-1}, \tag{1}$$

где $\gamma_\pm$ — жорданов контур, окружающий $\sigma_\pm$, полностью лежащий в полуплоскости $\mathbb{C}_\pm$.

Более того, в силу представления (1)

$$ad_A P_\pm = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} AR(\lambda,B)d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)Ad\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)(B-\lambda I)AR(\lambda,B)d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)A(B-\lambda I)R(\lambda,B)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)(AB-BA)R(\lambda,B)d\lambda. \qquad (2)$$

Покажем, что оператор J — самосопряженный. Для этого достаточно показать, что самосопряженными будут операторы P_+ и P_-.

Отметим, что в силу свойства проекторов Рисса $H = \operatorname{Im} P_+ \oplus \operatorname{Im} P_-$, $H = \operatorname{Im} P_+^* \oplus \operatorname{Im} P_-^*$, где $\operatorname{Ker} P_+ = \operatorname{Im} P_-$ и $\operatorname{Ker} P_+^* = \operatorname{Im} P_-^*$.

Заметим, что $\operatorname{Ker} P_+$ инвариантно относительно P_+^*, и наоборот. Действительно, если $P_+x = 0$, то $P_+(P_+^* x) = P_+^*(P_+ x) = 0$.

Пусть, $\operatorname{Ker} P_+ = M$. Тогда $(P_{+M})^* = (P_+^*)_M$. Действительно, если $x, y \in M$, то $(P_{+M}x, y) = (x, P_{+M}^* y) = (P_+ x, y) = (x, P_+^* y)$. Тогда для $x \in \operatorname{Ker} P_+$, $P_+^* x = 0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} P_+^* \subset \operatorname{Ker} P_+$. Аналогично показывается, что $\operatorname{Ker} P_+ \subset \operatorname{Ker} P_+^*$. Из данных включений следует, что $\operatorname{Im} P_- = \operatorname{Im} P_-^*$, что показывает самосопряженность проекторов P_-, P_+.

Имеют место равенства

$$\operatorname{Re}(JLx, x) = (1/2)\left((JL + L^*J)x, x\right) = (1/2)\left((JA - JB - AJ - B^*J)x, x\right) =$$

$$= (1/2)((JA - AJ)x, x) - (1/2)((JB + B^*J)x, x) = (1/2)((ad_A J)x, x) - (1/2)((JB + B^*J)x, x). \qquad (3)$$

Оператор $JB + B^*J$ является самосопряженным и его спектр $\sigma(JB + B^*J) \subset (\sigma(B) + \sigma(B^*))$. Действительно, $(JB + B^*J)^* = B^*J + JB = JB + B^*J$. Значит, он положительно определен, и поэтому $((JB + B^*J)x, x) \geq 2\chi_0(B)\|x\|^2$. Таким образом,

$$\operatorname{Re}(JLx, x) \leq -\chi_0(B) + (1/2)\|ad_A J\|. \qquad (4)$$

Непосредственно из (4) вытекает, что при условии

$$(1/2)\|ab_A J\| < \chi_0(B), \qquad (5)$$

имеет место неравенство

$$\|Lx\| \geq (\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|)\|x\|. \qquad (6)$$

Используя аналогичные рассуждения, можно получить неравенство вида (6) для оператора $L^* = -A - B^* : D(A) \subset H \to H$. Следовательно, при выполнении условия (5) оператор L обратим и

$$\|L^{-1}\| \leq (\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|)^{-1}. \qquad (7)$$

Осталось показать, что выполнение любого из условий теоремы влечет за собой выполнение условия (5).

Рассмотрим операторы $B_\pm = [B, P_\pm]$, которые в силу представления (2) можно записать в виде

$$B_\pm = \frac{1}{2\pi i}\left(-\int\limits_{\gamma_\pm} BR(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)d\lambda + \int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)Bd\lambda\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(-\int\limits_{\gamma_\pm}(B-\lambda I)R(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)d\lambda - \int\limits_{\gamma_\pm}\lambda R(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)(B+\lambda I)d\lambda + \int\limits_{\gamma_\pm}\lambda R(\lambda,B)ad_A BR(\lambda,B)d\lambda\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda, B)d\lambda\right) ad_A B - ad_A B \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda, B)d\lambda = [P_\pm, ad_A B]. \tag{8}$$

Из этого представления следует, что оператор $ad_A J$ удовлетворяет операторному уравнению:

$$BX - XB = Jad_A B - (ad_A B)J, \tag{9}$$

рассматриваемому в пространстве $\operatorname{End} X$. Действительно,

$$Jad_A B - (ad_A B)J = [P_+ - P_-, ad_A B] = B_+ - B_- = [B, ad_A P_+ - ad_A P_-] = [B, ad_A J].$$

Поскольку $P_\pm^2 = P_\pm$, то $(ad_A P_\pm)P_\pm + P_\pm ad_A P_\pm = AP_\pm - P_\pm AP_\pm + P_\pm AP_\pm - P_\pm A = ad_A P_\pm$. Отсюда следует, что $P_\pm(ad_A P_\pm)P_\pm = P_\pm((ad_A P_\pm)P_\pm + P_\pm ad_A P_\pm)P_\pm = 2P_\pm(ad_A P_\pm)P_\pm$, в силу чего $P_\pm(ad_A P_\pm)P_\pm = 0$. Следовательно, $ad_A J$ — решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям $P_\pm(ad_A J)P_\pm = 0$.

Из [3] следует, что оператор $P_+(ad_A J)P_-$ определяется формулой

$$P_+(ad_A J)P_- = \int\limits_0^\infty e^{-Bs} P_+[J, ad_A B]e^{Bs} P_- \, ds, \tag{10}$$

откуда устанавливаем оценку

$$\|P_+(ad_A J)P_-\| \le \int\limits_0^\infty e^{(-\chi_+(B)+\chi_-(B))s} \|[J, ad_A B]\| \, ds =$$

$$= \|[J, ad_A B]\| \int\limits_0^\infty e^{-\chi(B)s} ds = \chi(B)^{-1} \|[J, ad_A B]\|. \tag{11}$$

Аналогичны представление и оценка для оператора $P_-(ad_A J)P_+$. Тогда

$$\|ad_A J\| = \|(P_+ + P_-)(ad_A J)(P_+ + P_-)\| = \|P_+(ad_A J)P_- + P_-(ad_A J)P_+\| =$$

$$= \sqrt{\|(ad_A J)(ad_A J)^*\|} \le \sqrt{\max \|(P_\pm(ad_A J)P_\mp)(P_\pm(ad_A J)P_\mp)^*\|} \le \max \|P_\pm(ad_A J)P_\mp\|. \tag{12}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered}[ad_A B, J] = ad_A BP_+ - ad_A BP_- - P_+(ad_A B) + P_-(ad_A B) = (P_+ + P_-)(ad_A B)P_+ - \\ -(P_+ + P_-)(ad_A B)P_- - P_+(ad_A B)(P_+ + P_-) + P_-(ad_A B)(P_+ + P_-) = P_+(ad_A B)P_+ + \\ +P_-(ad_A B)P_+ - P_+(ad_A B)P_- - P_-(ad_A B)P_- - P_+(ad_A B)P_+ - P_-(ad_A B)P_+ + \\ +P_-(ad_A B)P_+ - P_-(ad_A B)P_- = 2(P_-(ad_A B)P_+ - P_+(ad_A B)P_-). \end{gathered} \tag{13}$$

Из (11)–(13) следует, что

$$\|ad_A J\| \le \chi(B)^{-1}\|[J, ad_A B]\| \le 2\chi(B)^{-1} \max_\pm \|P_\pm(ad_A B)P_\mp\| \le 2\chi(B)^{-1}\|ad_A B\|. \tag{14}$$

Из неравенства (14) получаем, что при выполнении условия 1 теоремы, справедливо неравенство (5). При этом оценка (7) примет вид

$$\|L^{-1}\| \le \frac{1}{\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|} \le \frac{\chi(B)}{\chi_0(B)\chi(B) - \|AB - BA\|}.$$

Пусть теперь выполнено условие 2 теоремы. Рассмотрим операторы $C_\pm = [ad_A B, P_\pm]$. Отметим, что $C_\pm = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda, B)[B, ad_A B]R(\lambda, B)\, d\lambda$.

Используя рассуждения, аналогичные доказательству первого условия теоремы, показывается, что оператор $[ad_A B, J]$ удовлетворяет уравнению

$$BX - XB = [[B, ad_A B], J],$$

и условиям $P_\pm [ad_A B, J] P_\pm = 0$.

Тогда операторы $P_\pm [ad_A B, J] P_\mp$ допускают оценку вида (10). Следовательно,

$$\|[ad_A B, J]\| = \|P_+ [ad_A B, J] P_- + P_- [ad_A B, J] P_+\| = \max_\pm \|P_\pm [ad_A B, J] P_\mp\| \le$$
$$\le \chi(B)^{-1} \|[[B, ad_A B], J]\| \le 2\chi(B)^{-1} \|[B, ad_A B]\|.$$

Из данного неравенства и неравенства (14) следует неравенство (5). При этом оценка (7) примет вид

$$\|L^{-1}\| \le \frac{1}{\chi_0(B) - (1/2)\|ab_A J\|} \le \frac{\chi(B)^2}{\chi_0(B)\chi(B)^2 - \|[B, AB - BA]\|}.$$

Пусть теперь выполнено условие 3 теоремы и $n = 2$. Рассмотрим операторы $D_\pm = [[B, ad_A B], P_\pm]$. Отметим, что $D_\pm = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\pm} R(\lambda, B)[B, [B, ad_A B]] R(\lambda, B) d\lambda$.

Используя рассуждения, аналогичные доказательству первого условия теоремы, показывается, что оператор $[[B, ad_A B], J]$ удовлетворяет уравнению

$$BX - XB = [[B, [B, ad_A B]], J],$$

и условиям $P_\pm [[B, [B, ad_A B]], J] P_\pm = 0$. Тогда операторы $P_\pm [B, [B, ad_A B]] P_\mp$ допускают оценку вида (10). Следовательно,

$$\|[ad_A B, J]\| \le \chi(B)^{-1} \|[[B, ad_A B], J] \le \chi(B)^{-1} \max_\pm \|P_\pm [[B, ad_A B], J] P_\mp\| \le 2\chi(B)^{-2} \|[B, [B, ad_A B]]\|.$$

Из данного неравенства и неравенства (14) следует неравенство (5). Применяя тот же прием оценки, можно показать справедливость теоремы при $n > 2$.

Теорема доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

Пусть $A = \frac{d}{dt} : D(A) = W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L_2 \to L_2$ — оператор дифференцирования, действующий в гильбертовом пространстве $L_2 = L_2(\mathbb{R}, H)$ суммируемых с квадратом нормы функций $x : \mathbb{R} \to H$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x(t), y(t)) dt$. Его областью определения является пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+, H) = \{x \in L_2$ абсолютно непрерывная $: \dot{x} \in L_2\}$. Оператор A является антисопряженным.

Если $B \in \operatorname{End} L_2$ — оператор умножения на ограниченную непрерывную функцию $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End} H$, т. е. $(Bx)(t) = Q(t)x(t)$, $x \in L_2$, $t \in \mathbb{R}$, то $B \in D(ad_A)$, если Q непрерывно дифференцируема и ее производная ограничена на $\mathbb{R}$. В этом случае $((ad_A B)x)(t) = \frac{dQ}{dt}(t)x(t)$.

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть $Q : \mathbb{R} \to \operatorname{End} H$ — непрерывно дифференцируемая ограниченная функция, значения которой являются нормальными обратимыми операторами, и выполнено одно из следующих условий:*

1) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dQ}{dt}(t) \right\| < \chi_0(Q)\chi(Q)$,

2) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \left\| Q(t)\frac{dQ}{dt}(t) - \frac{dQ}{dt}Q(t) \right\| < \chi_0(Q)\chi(Q)^2$,

где $\chi(Q) = \chi_+(Q) + \chi_-(Q)$, $\chi_0(Q) = \min\{\chi_+(Q), \chi_-(Q)\}$, $\chi_+(Q) = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \min\limits_{\lambda \in \sigma(Q(t)) \cap \mathbb{C}_+} \operatorname{Re}\lambda$, $\chi_-(B) = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \max\limits_{\lambda \in \sigma(Q(t)) \cap \mathbb{C}_-} |\operatorname{Re}\lambda|$.

Тогда дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \dfrac{d}{dt} - Q(t) : W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L_2 \to L_2$ *обратим и норма обратного оператора имеет соответствующую (каждому случаю теоремы) оценку:*

1) $\|\mathcal{L}^{-1}\| \le \dfrac{\chi(Q)}{\chi_0(Q)\chi(Q) - \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\dfrac{dQ}{dt}(t)\|}$,

2) $\|\mathcal{L}^{-1}\| \le \dfrac{\chi(Q)^2}{\chi_0(Q)\chi(Q)^2 - \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|Q(t)\dfrac{dQ}{dt}(t) - \dfrac{dQ}{dt}Q(t)\|}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* 10-01-00276).

Библиографический список

1. *Баскаков А. Г.* Дихотомия спектра несамосопряженных операторов // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 3. С. 24–30.

2. *Баскаков А. Г., Юргелас В. В.* Круговая дихотомия спектра одного класса несамосопряженных операторов // Изв. вузов. 1994. № 10. С. 12–18.

3. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. М. : Научная книга, 1997. 407 с.

УДК 519.622

АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЕСТКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ЯВНЫХ И НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ

Е. А. Новиков

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск
E-mail: novikov@icm.krasn.ru

Построены L-устойчивый $(3, 2)$-метод третьего порядка и явная трехстадийная схема типа Рунге–Кутты первого порядка точности. Создан алгоритм интегрирования переменного порядка и шага, в котором выбор эффективной численной схемы осуществляется на каждом шаге с применением неравенства для контроля устойчивости. Приведены результаты расчетов, подтверждающие эффективность построенного алгоритма.

Ключевые слова: жесткие задачи, явный и неявный методы, контроль точности и устойчивости, переменный порядок.

Algorithm of Integrating Stiff Problems Using the Explicit and Implicit Methods

E. A. Novikov

An L-stable (3,2)-method order 3 and an explicit three-stage Runge–Kutta scheme order 1 are constructed. An integration algorithm of variable order and step is constructed that is based on of the two schemes The most effective numerical scheme is chosen for each step by means of stability control. The results are given that confirm the effectiveness of the algorithm.

Key words: stiff problems, explicit and implicit methods, stability and accuracy control, variable order.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих важных приложениях возникает необходимость решения жестких задач. Основные тенденции при построении численных методов связаны с расширением их возможностей для решения систем все более высокой размерности. В современных методах решения жестких задач при вычислении стадий применяется LU-разложение некоторой матрицы, размерность которой совпадает с размерностью исходной системы дифференциальных уравнений. Разложение осуществляется с выбором главного элемента по строке или столбцу, а иногда и по всей матрице. В случае достаточно большой размерности быстродействие алгоритма интегрирования, фактически, полностью определяется временем декомпозиции этой матрицы. Для повышения эффективности расчетов в ряде алгоритмов используется замораживание матрицы Якоби, т. е. применение одной матрицы на нескольких шагах интегрирования [1]. Наиболее успешно этот подход применяется в многошаговых методах [2]. Не вызывает эта проблема особых трудностей и при построении алгоритмов интегрирования на основе других численных схем, если в них стадии вычисляются с участием матрицы Якоби в некотором итерационном процессе. В этом случае она не влияет на порядок точности численной схемы, а определяет только сходимость итераций. Поэтому необходимость в ее пересчете возникает при существенном замедлении скорости сходимости итерационного процесса.