УДК 517.968

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.П. Курдюмов

Саратовский государственный университет,
кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики
e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

Получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений интегро-дифференциального оператора.

Estimates for Eigenfunctions and Eigenvalues of an Integral-differential Operator

V.P. Kurdyumov

Asymptotic formulas are obtained for eigenfunctions and eigenvalues of an integral-differential operator.

Рассматривается интегро-дифференциальный оператор

$$A = A\left(M, g, v\right)$$

где $Af = Mf + g\left(x\right)\int\limits_0^\pi f\left(t\right)v\left(t\right)dt,\ Mf = \int\limits_0^x M\left(x,t\right)f\left(t\right)dt,\ 0 \le x \le \pi.$

Для случая $v = 2$ и $p(x), q(x) \in L_2[0,1]$ задача о нахождении оценок для собственных функций и собственных значений оператора L методом подобных операторов исследовалась в [1]. В настоящей работе методами классической спектральной теории уточняется и обобщается результат из [1].

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Введем оператор $L_0 : y^{(v)}, y^{(2s)}(0) = y^{(2s)}(1) = 0,\ s = 0,1,\ldots,v/2-1$, собственные функции и собственные значения которого имеют вид $e_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x,\ \lambda_k = -(k\pi)^v,\ k = 1,2,\ldots$. Положим $\lambda = -\rho^v$ и обозначим через S_δ область, получающуюся из области $S = \left\{\rho : \operatorname{Im}\rho \ge -\varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$, удалением окрестностей, ограниченных круговыми контурами γ_k достаточно малого радиуса вокруг точек $\rho_k = k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, для $v_1 = 0$, или область, получающуюся из области $S = \left\{\rho : \arg\rho \in \left[-\frac{\pi}{v}, \frac{\pi}{v}\right]\right\}$ удалением окрестностей, ограниченных такими же контурами вокруг точек $\rho_k = k\pi,\ k = 1,2,\ldots$, для $v_1 \ge 1$.

Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E – единичный оператор, есть резольвента оператора L и $R_{0,\lambda}$ – резольвента оператора L_0. Приведем известный результат ([2], с. 388).

Для ядра $G_0(x,t,\lambda)$ резольвенты $R_{0,\lambda}$ в области S_δ справедливы оценки

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s}G_0(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{|\rho|^{v-1-s}}\right),\ s = 0,\ldots,v-1\,. \tag{1}$$

Лемма 1. В области S_δ при $|\rho|$ достаточно больших R_λ существует, справедлива формула

$$R_\lambda f = R_{0,\lambda}f + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_{0,\lambda}(ND^{n-1}R_{0,\lambda})^k f,\ \ f \in L[0,1], \tag{2}$$

и ряд в (2) сходится равномерно по $x \in [0,1]$. Здесь D – оператор дифференцирования.

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda f$. Тогда $y^{(v)} - \lambda y = f - Ny^{(v-1)}$.

Откуда

$$y = R_{0,\lambda}f - R_{0,\lambda}Ny^{(v-1)}. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) $v - 1$ раз, получим

$$\left(E + D^{v-1}R_{0,\lambda}N\right)y^{(v-1)} = D^{v-1}R_{0,\lambda}f. \tag{4}$$

Пусть $\tilde{N}(x,t)$ – непрерывная на $[0,1] \times [0.1]$ функция такая, что

$$\left\|\mathrm{N(x,t)} - \tilde{\mathrm{N}}\mathrm{(x,t)}\right\| < \varepsilon, \tag{5}$$

ε достаточно мало, и норма берется в $L([0,1] \times [0.1])$. Используя (1), (5) и лемму 6 из ([2], с. 390) для $\tilde{N}(x,t)$, нетрудно показать, что для ядра $N_1(x,t,\lambda)$ оператора $D^{v-1}R_{0,\lambda}N$ справедлива оценка

$$\left\|N_1(x,t,\lambda)\right\| = o(1), \tag{6}$$

где норма берется в $L[0,1]$ по переменной t и оценка $o(1)$ равномерна по x. Поэтому оператор $E + D^{v-1}R_{0,\lambda}N$ обратим в $L[0,1]$. Из (4) получаем $y^{(v-1)} = \left(E + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(D^{v-1}R_{0,\lambda}N)^K\right)D^{v-1}R_{0,\lambda}$ и поэтому из (3) следует (2). Обозначим через $N_2(x,t,\lambda)$ ядро оператора $ND^{v-1}R_{0,\lambda}f$. Так же, как и при получении оценки (6), найдем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho_\varepsilon > 0$, что для всех $|\rho| > \rho_\varepsilon$, $\rho \in S_\delta$,

$$\left\|N_2(x,t,\lambda)\right\| \le C\varepsilon, \tag{7}$$

где норма берется в $L[0,1]$ по переменной x и постоянная C не зависит от t. Отсюда и из (1) следуют оценки: $\left|R_{0,\lambda}(ND^{v-1}R_{0,\lambda})^k f\right| \le \frac{C}{|\rho|^{v-1}}\varepsilon^k \| f \|_{L_1}$, $k = 1, 2,\ldots$, поэтому справедливо и второе утверждение леммы.

Следствие. Пусть $G(x,t,\lambda)$ – ядро R_λ и $G_k(x,t,\lambda)$ – ядро оператора $(-1)^k R_{0,\lambda}(ND^{v-1}R_{0,\lambda})^k$, $k = 1,2,\ldots$.

Тогда в области S_δ при $|\rho|$ достаточно больших

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,t,\lambda), \tag{8}$$

ряд в (8) сходится равномерно по $x,t \in [0,1]$, и для любого $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\left|G_k(x,t,\lambda)\right| \le \frac{C\varepsilon^k}{|\rho|^{v-1}},\ k = 1,2,\ldots, \tag{9}$$

где постоянная C не зависит от x и t.

Обозначим через Γ_k, $k = 1,2,\ldots$ образы контуров γ_k при отображении $\lambda = -\rho^v$.

Лемма 2. При n достаточно больших собственные значения оператора L однократны и расположены внутри контуров Γ_n.

Доказательство. В силу (8) и (9) ядро оператора $R_\lambda - R_{0,\lambda}$ есть $o(\rho^{1-v})$ при $|\rho| \to \infty$. Но известно, что если $R_\lambda f = \int_0^1 G(x,t,\lambda)f(t)dt$, то $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,x,\lambda)dxd\lambda$ равен кратности всех собственных значений оператора L, попавших внутрь Γ_n. А так как для всех n $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G_0(x,x,\lambda)dxd\lambda = 1$, то при больших n и $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\int_0^1 G(x,x,\lambda)dxd\lambda = 1$.

Лемма доказана.

2. ОЦЕНКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Лемма 3. Обозначим через $\tilde{\varphi}_n(x)$ собственную функцию оператора L, соответствующую собственному значению W_n, и через ψ_n – собственную функцию сопряженного к нему оператора, соответствующую собственному значению $\overline{W}_n$, и пусть

$$\varphi_n(x)=\frac{\tilde{\varphi}_n(x)(e_n,\,\psi_n)}{(\tilde{\varphi}_n,\,\psi_n)}\,. \tag{10}$$

Тогда при n достаточно больших и произвольном $m=1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$\left|\varphi_n(x)-e_n(x)+\sum_{k=1}^{m}g_k(x,n)\right|\le\sum_{k=m+1}^{\infty}|\,g_k(x,n)|, \tag{11}$$

где $(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)g(t)dt,\;\; g_k(x,n)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\int\limits_{\Gamma_n}G(x,t,\lambda)d\lambda e_n(t)dt.$

Доказательство. Пользуясь известным представлением функции Грина в окрестности простого полюса и интегрируя (8) по Γ_n при n достаточно больших, найдем

$$-\frac{\tilde{\varphi}_n(x)\,\overline{\psi}_n(t)}{(\tilde{\varphi}_n,\,\psi_n)}+e_n(x)e_n(t)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_n}G_k(x,t,\lambda)d\,\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=m+1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma_n}G_k(x,t,\lambda)d\lambda. \tag{12}$$

Умножая (12) на $e_n(t)$ и интегрируя по t от 0 до 1, получим (11). Лемма доказана.

Обозначим через $\tilde{S}_\delta$ область, полученную из λ-плоскости удалением окрестностей, ограниченных Γ_k, $k=1,2,\ldots$.

Лемма 4. В области $\tilde{S}_\delta$ справедливы формулы:

$$G_0(x,t,\lambda)=-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{e_\mu(x)e_\mu(t)}{\lambda-\lambda_\mu}\,, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^1 G_1(x,t,\lambda)e_n(t)dt=-\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{e_\mu(x)(Ne_n^{(v-1)},\,e_\mu)}{\lambda-\lambda_\mu}\,, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^1 G_k(x,t,\lambda)e_n(t)dt=-\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_k=1}^{\infty}\frac{e_{\mu_1}(x)\left(Ne_n^{(v-1)},\,e_{\mu_k}\right)\prod\limits_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{\mu_{i+1}}^{(v-1)},e_{\mu_i}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_{\mu_i})}\,, \tag{15}$$

$k=1,2,\ldots$.

Кроме того, ряды (13)–(15) сходятся равномерно по всем аргументам.

Доказательство. Формула (13) получается так же, как и (22) из ([3], с. 98), а равномерная сходимость по $\lambda\in\tilde{S}_\delta$ ряда в (13) следует из его равномерной сходимости по $\lambda\in\tilde{S}_\delta\bigcap\operatorname{Re}\lambda$. Для доказательства формул (14) и (15) отметим, что для $f(x)\in L_2[0,1]$ из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}\dfrac{\mu^{v-1}(f,e_\mu)}{\lambda-\mu}$ по $\lambda\in\tilde{S}_\delta\bigcap\operatorname{Re}\lambda$ следует его равномерная сходимость по $\lambda\in\tilde{S}_\delta$ и поэтому справедливо

$$\int\limits_0^1 G_{0_x}^{(v-1)}(x,t,\lambda)f(t)dt=-\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{e_\mu^{(v-1)}(x)(f,e_\mu)}{\lambda-\lambda_m}\,. \tag{16}$$

Представив теперь в $\int\limits_0^1 G_k(x,t,\lambda)e_n(t)dt,\,k=1,2,\ldots$, функции $G_k(x,t,\lambda)$ через ядра $N(x,t),G_{0_x}^{(i)}(x,t,\lambda)$, $i=0,1,\ldots,v-1$, операторов N и $D^iR_{0,\lambda}$, воспользовавшись формулами (13), (16) и ортонормированностью системы $e_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, получим (14) и (15). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_k$ – набор k натуральных чисел, и

$$a_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\cdot\frac{e_{\mu_1}(x)\left(Ne_n^{(v-1)},\,e_{\mu_k}\right)\prod\limits_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{\mu_{i+1}}^{(v-1)},\,e_{\mu_i}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_{\mu_i})}.$$

Обозначим через $(n^l,\,k)$ набор, полученный из предыдущего заменой l его элементов, $l=0,1,\ldots k$, натуральным числом n, в котором оставшиеся из чисел μ_i занумерованы через μ_{i_j}, $j=1,\ldots,k-l$.

Тогда справедлива формула

$$-\int_0^1 G_k(x,t,\lambda)e_n(t)dt\sum_{l=0}^{k}\sum_{(n^l,k)}\sum_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} a_{(n^l,k)}(x,\lambda),\quad k=1,2,\dots .$$

Здесь суммирование $\sum\limits_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}$ распространяется по всем μ_{i_j}, которые входят в (n^l, k) и проводится для каждого из них от 1 до бесконечности, кроме значения, равного n, а суммирование $\sum\limits_{(n^l,k)}$ – по всем указанным не совпадающим между собой наборам (n^l, k).

Доказательство следует из леммы 4 и формулы

$$\sum_{\mu_i=1}^{\infty} a_{\mu_1,\dots,\mu_i,\dots,\mu_k} = \sum_{\mu_i\neq n} a_{\mu_1,\dots,\mu_i,\dots,\mu_k} + a_{\mu_1,\dots,n,\dots,\mu_k},$$

где во втором слагаемом справа индекс n стоит на i-м месте.

Лемма 6. Пусть $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ и $k, m \geq 1$. Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}(\lambda-\lambda_n)^{-m}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}d\lambda = (-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k,m,k+m-1)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_n-\lambda_j)^{-p_j}. \tag{17}$$

Здесь $\sum\limits_{(p_j,s,m,k)}$ означает, что суммирование распространяется по всевозможным не равным между собой наборам натуральных чисел p_j, $j = 1, \dots, s$, удовлетворяющим соотношениям $p_j \leq m$ и $\sum\limits_{j=1}^{s} p_j = k$. Кроме того, число слагаемых в правой части (17) равно C_{k+m-2}^{k-1}.

Доказательство. Сначала докажем справедливость формулы (17). По формуле Коши достаточно показать, что

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1} = (-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k,m,k+m-1)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}. \tag{18}$$

Для $m \geq 1$, используя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}(\lambda-\lambda_1)^{-1}(\lambda-\lambda_2)^{-1} = (-1)^{m-1}\sum_{p_1=1}^{m}(\lambda-\lambda_1)^{-p_1}(\lambda-\lambda_2)^{-(m+1-p_1)} =$$

$$= (-1)^{m-1}\sum_{(p_j,2,m,m+1)}(\lambda-\lambda_1)^{-p_1}(\lambda-\lambda_2)^{-p_2}.$$

Проведем индукцию формулы (18) по m: предполагая, что справедливо

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1} = (-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k,m,k+m-1)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}. \tag{19}$$

Докажем, что

$$\frac{1}{m!}\frac{d^{m}}{d\lambda^{m}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1} = (-1)^{m}\sum_{(p_j,k,m+1,k+m)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}. \tag{20}$$

Имеем

$$\frac{1}{m}\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}\right\} = \frac{1}{m}\frac{d}{d\lambda}\times\left\{(-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k,m,k+m-1)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}\right\} = \frac{(-1)^m}{m}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{(p_s,k,m,k+m-1)}p_i(\lambda-\lambda_i)^{-p_i-1}\prod_{j\neq i}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}\right\},$$

где произведение $\prod\limits_{j\neq i}^{k}$ берется по всем $j = 1, \dots, k, j \neq i$. Последнее выражение запишем так:

$$\frac{(-1)^m}{m}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum(p_i-1)(\lambda-\lambda_i)^{-p_i}\prod_{j\neq i}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}\right\}, \tag{21}$$

где внутренняя сумма распространяется по всевозможным p_s, $s = 1, \ldots, k$, для которых $\sum_{s=1}^{k} p_s = k+m$, причем $1 \le p_s \le m$ при $s \neq i$ и $2 \le p_i \le m+1$. Поскольку каждое слагаемое внутренней суммы в (21) обращается в ноль при $p_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{k}(p_i-1) = m$, то (21) совпадает с

$$\frac{(-1)^m}{m}\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{(p_s,k,m,k+m)}(p_i-1)\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}+m\sum_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{-(m+1)}\prod_{j\neq i}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}\right\}=$$

$$=(-1)^m\left\{\sum_{(p_s,k,m,k+m)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}+\sum_{i=1}^{k}(\lambda-\lambda_i)^{-(m+1)}\prod_{j\neq i}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}\right\}=(-1)^m\sum_{(p_s,k,m+1,k+m)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}.$$

Формула (20) доказана.

Теперь найдем индукцию для (18) по k: предполагая справедливость этой формулы для данного k, покажем, что справедливо

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-1}=(-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k+1,m,k+m)}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}. \tag{22}$$

Из (20) при $s = 0,1,\ldots, m-1$ имеем

$$\frac{d^s}{d\lambda^s}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}=s!(-1)^s\sum_{(p_j,k,s+1,k+s)}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\frac{d^s}{dx^s}(\lambda-\lambda_{k+1})^{-1}=(-1)^s s!(\lambda-\lambda_{k+1})^{-(s+1)}$, используя формулу Лейбница, находим

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{s=0}^{m-1}C_{m-1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}\right)^{(s)}\left((\lambda-\lambda_{k+1})^{-1}\right)^{(m-1-s)}=$$

$$=(-1)^{m-1}\sum_{s=0}^{m-1}(\lambda-\lambda_{k+1})^{-m+s}\sum_{(p_j,k,s+1,k+s)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}=(-1)^{m-1}\sum_{s=1}^{m}(\lambda-\lambda_{k+1})^{-(m+1-s)}\sum_{(p_j,k,s,k+s-1)}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}.$$

Теперь, обозначая $m+1-s = p_{k+1}$, для последнего выражения получаем

$$(-1)^{m-1}\sum_{p_{k+1}=1}^{m}(\lambda-\lambda_{k+1})^{-p_{k+1}}\sum_{(p_j,k,m+1-p_{k+1},k+m-p_{k+1})}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}=(-1)^{m-1}\sum_{(p_j,k+1,m,k+m)}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}.$$

Формула (22) доказана.

Второе утверждение леммы докажем для формулы (18). При $k = 1$, $m = 2$ оно очевидно. Проведем сначала индукцию по m. Предполагаем, что $\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}$ содержит C_{k+m-2}^{k-1} слагаемых вида $(-1)^{m-1}\sum_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}$, где $\sum_{j=1}^{k}p_j=k+m-1$, $p_j \le m$. Поэтому выражение

$$\frac{1}{m}\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-1}\right\}$$

содержит $\frac{1}{m}C_{k+m-2}^{k-1}(k+m-1)=C_{k+m-1}^{k-1}$ слагаемых вида $(-1)^m\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}$, где теперь $\sum_{j=1}^{k}p_j=k+m$, $p_j \le m+1$.

Проведем индукцию по k. Пусть справедливо второе утверждение леммы для данного k. Покажем, что выражение $\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}$ содержит C_{k+m-1}^{k} слагаемых вида $(-1)^{m-1}\prod_{j=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_j)^{-p_j}$, где

$\sum_{j=1}^{k+1} p_j = k+m,\ p_j \le m$. Обозначим $u = \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{-1},\ v = (\lambda - \lambda_{k+1})^{-1}$. Тогда имеем

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}(uv) = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^{l} u^{(l)} v^{(m-1-l)}. \tag{23}$$

Поскольку при $0 \le l \le m-1$ выражение $\frac{1}{l!}u^{(l)}$ содержит C_{k+l-1}^{k-1} слагаемых вида $(-1)^l \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{-p_j}$, где $\sum_{j=1}^{k} p_j = k+l,\ p_j \le l+1$, и $v^{(m+1-l)} = (-1)^{(m-1-l)}(m-1-l)!(\lambda - \lambda_{k+1})^{-m+l}$, то для числа слагаемых правой части (23) находим $\sum_{l=0}^{m-1} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!\,l!} = \sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l-1}^{l}$. Из формулы $C_{n+1}^{m} - C_{n}^{m-1} = C_{n}^{m}$ следует, что $\sum_{l=0}^{m-1} C_{k+l-1}^{l} = C_{k+m-1}^{m-1} = C_{k+m-1}^{k}$. Лемма доказана.

Лемма 7. Для $k \ge 1$ и $l = 0,1,\ldots, k-1$ справедливы формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} a_{(n^l,k)}(x,\lambda)\,d\lambda = (-1)^l C_{(n^l,k)}(x) \sum_{(p_{i_j},\,k-l,\,l+1,\,k)} \prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} a_{(n^k,k)}(x,\lambda)\,d\lambda = 0, \tag{25}$$

где

$$C_{\mu_1,\ldots,\mu_k}(x,\lambda) = e_{\mu_1}(x)\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_{\mu_k}\right)\prod_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{\mu_{i+1}}^{(\nu-1)}, e_{\mu_i}\right); \tag{26}$$

$\sum_{(p_{i_j},s,m,k)}$ означает, что суммирование распространяется по всевозможным не равным между собой наборам натуральных чисел $p_{i_j},\ j = 1,\ldots,s$, удовлетворяющих соотношениям $p_{i_j} \le m$ и $\sum_{j=1}^{s} p_{i_j} = k$; произведение $\prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}$ распространяется по всем μ_{i_j}, входящим в (n^l, k).

Доказательство. Формула (25) очевидна, а (24) следует из леммы 6.

Лемма 8. Для $k \ge 1$ справедлива формула

$$-g_k(x,n) = \sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l \sum_{(n^l,k)}\ \sum_{(p_{i_j},\,k-l,\,l+1,\,k)}\ \sum_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} C_{(n^l,k)}(x) \times \prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}. \tag{27}$$

Доказательство следует из лемм 5 и 7, если изменить порядок суммирования в $\sum_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}$ и $\sum_{(p_{i_j},\,k-l,\,l+1,\,k)}$.

Обозначим через $f_k^{\sin} = \sqrt{2}\int_0^1 f(t)\sin k\pi t\,dt,\ f_k^{\cos} = \sqrt{2}\int_0^1 f(t)\cos k\pi t\,dt$ и пусть $\alpha(n) = \max\left\{\left|q_n^{\sin}\right|, \sum_{\mu\ne n}\frac{\left|q_\mu^{\sin}\right|}{|n-\mu|}\right\}$.

Лемма 9. Пусть натуральные числа $p_{i_j},\ j = 1,\ldots,k-l$, и числа $l = 0,1,\ldots,k-1$, $k \ge 1$ таковы, что

$$p_{i_j} \le l+1,\ \sum_{j=1}^{k-l} p_{i_j} = k. \tag{28}$$

Тогда справедливы оценки

$$\left|\sum_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} C_{(n^l,k)}(x) \prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}\right| \le \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k}\|p\|^k \alpha^k(n),$$

где норма $\|\cdot\|$ берется в $L[0,1]$.

Доказательство. Из (26) имеем

$$C_{(n^l,k)}(x) = e_{s_1}(x)\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_{s_k}\right)\prod_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{s_{i+1}}^{(\nu-1)}, e_{s_i}\right), \tag{29}$$

где среди натуральных чисел s_i, $i = 1,\ldots,k$ число n повторяется l раз, $l = 0,1,\ldots,k-1$, а остальные из этих чисел совпадают с $\mu_{i_j}, j = 1,\ldots, k-1$. Поскольку $\left|\left(Ne_{s_i}^{(v-1)}, e_{s_j}\right)\right| \le (\pi s_i)^{v-1}\left|p_{s_i}^{\cos}\right|\left|q_{s_j}^{\sin}\right|, \left|p_{s_i}^{\cos}\right| \le \sqrt{2}\,\|p\|$, $|e_i| \le \sqrt{2}$, то из (29) находим

$$\left|C_{(n^l,k)}(x)\right| = (\sqrt{2})^{k+1}\pi^{(v-1)k}n^{v-1}\,\|p\|^k\left(\prod_{j=2}^{k}s_j^{v-1}\right)\left(\prod_{j=1}^{k}\left|q_{s_j}^{\sin}\right|\right). \tag{30}$$

Так как $n^v - \mu^v = (n-\mu)\sum\limits_{k=0}^{v-1} n^{v-1-k}\mu^k$, то

$$\pi^{(v-1)k}n^{v-1}\left(\prod_{j=2}^{k}s_j^{v-1}\right)\prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}\left|\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}}\right|^{-p_{i_j}} = \frac{n^{v-1}}{\pi^k}\left(\prod_{j=2}^{k}s_j^{v-1}\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{k-l}\left|n^v - \mu_{i_j}^v\right|^{-p_{i_j}} = \frac{n^{v-1}}{\pi^k}\left(\prod_{j=2}^{k}s_j^{v-1}\right)\left(\prod_{j=1}^{k-l}\left|n-\mu_{i_j}\right|^{-p_{i_j}}\right)\times\prod_{j=1}^{k-l}\left(\sum_{k=0}^{v-1}n^{v-1-k}\mu_{i_j}^k\right)^{-p_{i_j}}. \tag{31}$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{k-l} p_{i_j} = k$, то, используя очевидное неравенство $n^{(v-1)k}\prod\limits_{j=1}^{k-l}\mu_{i_j}^{v-1} < \prod\limits_{j=1}^{k-l}\left(\sum\limits_{k=0}^{v-1}n^{v-1-k}\mu_{i_j}^k\right)^{p_{i_j}}$, выражение (31) оценим сверху через

$$\frac{1}{\pi}\prod_{j=1}^{k-l}|n-\mu_{i_j}|^{-p_{i_j}}. \tag{32}$$

Поэтому из (30) и (32) следует

$$\left|C_{(n^l,k)}(x)\right|\prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}\left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}}\right)^{-p_{i_j}} =$$
$$= \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k}\,\|p\|^k\left|q_n^{\sin}\right|^l\prod_{j=1}^{k-l}\left|q_{\mu_{i_j}}^{\sin}\right|\left|n-\mu_{i_j}\right|^{-p_{i_j}}. \tag{33}$$

Поскольку при $p_{i_j} \ge 1$ $\sum\limits_{\mu\ne n}\dfrac{\left|q_\mu^{\sin}\right|}{|n-\mu_{i_j}|^{p_{i_j}}} \le \sum\limits_{\mu\ne n}\dfrac{\left|q_\mu^{\sin}\right|}{|n-\mu|}$, то из (33) находим

$$\left|\sum_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} C_{(n^l,k)}(x)\prod_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}\left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}}\right)^{-p_{i_j}}\right| \le \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k}\,\|p\|^k\left|q_n^{\sin}\right|^l\left(\sum_{\mu\ne n}\frac{\left|q_\mu^{\sin}\right|}{|n-\mu|}\right)^{k-l} \le$$
$$\le \frac{(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k}\,\|p\|^k\,\alpha^k(n).$$

Лемма доказана.

Лемма 10. Для $k \ge 1$ справедливы оценки

$$|g_k(x,n)| \le \sqrt{2}a^k\,\|p\|^k\,\alpha^k(n),$$

где $a = \dfrac{4\sqrt{2}}{\pi}$.

Доказательство. Для $l = 0,1,\ldots, k-1$ число слагаемых в сумме $\sum\limits_{(n^l,k)}$ из (27) равно C_k^l, а по лемме 6 число слагаемых в сумме $\sum\limits_{(p_{i_j},k-l,l+1,k)}$ того же равенства равно C_{k-1}^l. Поэтому для числа слагаемых N_k в правой части (27) вида $\sum\limits_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)} C_{(n^l,k)}(x)\prod\limits_{\mu_{i_j}\in(n^l,k)}\left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}}\right)^{-p_{i_j}}$ справедливо $N_k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_k^i C_{k-1}^i$. Так как для $k > r$ и $r = 0,1,\ldots, k-1$ $C_k^r \ge C_{k-1}^r$, то $N_k < \sum\limits_{i=0}^{k}(C_k^i)^2 < \left(\sum\limits_{i=0}^{k}C_k^i\right)^2 = 2^{2k}$. Поэтому из лемм 8 и 9 сразу следует

$$|g_k(x,n)| \le \frac{2^{2k}(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^k}\,\|p\|^k\,\alpha^k(n) = \sqrt{2}a^k\,\|p\|^k\,\alpha^k(n).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. При n достаточно больших и произвольном $m = 0,1,\ldots$ для нормированных собственных функций $\varphi_n(x)$ оператора L справедливы оценки

$$|\varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x,n)| \le 2a^{m+1} \| p \|^{m+1} \alpha^{m+1}(n).$$

Доказательство следует из лемм 3 и 10.

3. ОЦЕНКА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Лемма 11. Для собственных значений W_n оператора L при любых $m = 1,2,\ldots$ справедливы формулы

$$W_n - \lambda_n - \frac{\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_n\right) - A_1^m(n)}{1 - B_2^m(n)} = -\frac{A_{m+1}(n)}{1 - B_2^m(n)} + \frac{\left(N\varphi_n^{(\nu-1)}, e_n\right) B_{m+1}(n)}{\left(1 - B_2^m(n)\right)\left(1 - B_2(n)\right)}. \quad (34)$$

Здесь $A_i(n) = \sum_{k=i}^{\infty} \left(Ng_k^{(\nu-1)}(x,n), e_n(x)\right)$,

$$A_1^m(n) = \sum_{k=1}^{m} \left(Ng_k^{(\nu-1)}(x,n), e_n(x)\right), \; B_i(n) = \sum_{k=i}^{\infty} \left(g_k(x,n), e_n(x)\right),$$

$$B_2^m(n) = \sum_{k=2}^{m} \left(g_k(x,n), e_n(x)\right).$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n(x)$ есть собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению W_n. Поскольку оператор L_0 является самосопряженным, то

$$\begin{aligned} W_n - \lambda_n &= \frac{1}{(\varphi_n, e_n)}\left((w_n \varphi_n, e_n) - (w_n, \lambda_n e_n)\right) = \\ &= \frac{1}{(\varphi_n, e_n)}\left((L_0\varphi_n + N\varphi_n^{(\nu-1)}, e_n) - (\varphi_n, L_0 e_n)\right) = \frac{1}{(\varphi_n, e_n)}\left(N\varphi_n^{(\nu-1)}, e_n\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Из (10) и (12) следует, что $\varphi_n(x) = e_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x,n)$. Отсюда получаем

$$\left(N\varphi_n^{(\nu-1)}, e_n\right) = \left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_n\right) - A_1(n) \quad (36)$$

и, кроме того, учитывая (14), находим

$$\left(\varphi_n, e_n\right) = 1 - B_2(n). \quad (37)$$

Так как $A_1^m(n) + A_{m+1}(n) = A_1(n)$ и $B_2^m(n) + B_{m+1}(n) = B_2(n)$, то из (35)–(37) следует (34). Лемма доказана.

Лемма 12. Для $k = 1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|Ng_k^{(\nu-1)}(x,n), e_n(x)\right| \le \frac{\pi^\nu}{4} n^{\nu-1} a^{k+1} \| p \|^{k+1} \alpha^{k+1}(n). \quad (38)$$

Доказательство. Из (29) находим

$$\left|C_{(n^l,k)}(x)\right| = \sqrt{2}\left|\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_{s_k}\right)\right| \left|\prod_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{s_{i+1}}^{(\nu-1)}, e_{s_i}\right)\right|, \quad (39)$$

$$\left|\left(NC_{(n^l,k)}^{(\nu-1)}, e_n\right)\right| \le \left|\left(Ne_{s_1}^{(\nu-1)}, e_n\right)\right| \left|\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_{s_k}\right)\right| \left|\prod_{i=1}^{k-1}\left(Ne_{s_{i+1}}^{(\nu-1)}, e_{s_i}\right)\right|. \quad (40)$$

Так как $\left|\left(Ne_{s_1}^{(\nu-1)}, e_n\right)\right| \le \sqrt{2}(\pi s_1)^{\nu-1} \| p \| \left|q_n^{\sin}\right|$, то из (40) следует

$$\left|\left(NC_{(n^l,k)}^{(\nu-1)}, e_n\right)\right| \le \sqrt{2}(\pi s_1)^{\nu-1} \| p \| \left|q_n^{\sin}\right| \left|\left(Ne_n^{(\nu-1)}, e_{s_k}\right)\right| \left|\prod_{i=1}^{k}\left(Ne_{s_{i+1}}^{(\nu-1)}, e_{s_i}\right)\right|. \quad (41)$$

Оценки (39) и (41) отличаются лишь множителем $(\pi s_1)^{\nu-1} \| p \| \left|q_n^{\sin}\right|$. Учитывая это и поступая, как и в доказательстве леммы 9 при p_{i_j}, удовлетворяющих условиям (28), получим

$$\left| \sum_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} \left(NC^{(\nu-1)}_{(n^l,k)}(x), e_n(x) \right) \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} \left(\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}} \right)^{-p_{i_j}} \right| \le \frac{\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^{k+1-\nu}} \| p \|^{k+1} n^{\nu-1} \alpha^{k+1}(n). \tag{42}$$

Из леммы 8 следует

$$-\left(Ng^{(\nu-1)}_k(x,n), e_n(x) \right) = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \sum_{(n^l,k)} \sum_{(p_{i_j},k-l,l+1,k)} \sum_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} \left(NC^{(\nu-1)}_{(n^l,k)}(x), e_n(x) \right) \times \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}} \cdot \tag{43}$$

Повторяя доказательство леммы 10 для правой части (43), обозначая в нем через N_k число слагаемых вида

$$\sum_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} \left(NC^{(\nu-1)}_{(n^l,k)}(x), e_n(x) \right) \prod_{\mu_{i_j} \in (n^l,k)} (\lambda_n - \lambda_{\mu_{i_j}})^{-p_{i_j}}$$

и используя (42), находим

$$\left| \left(Ng^{(\nu-1)}_k(x,n), e_n(x) \right) \right| \le \frac{2^{2k}(\sqrt{2})^{k+1}}{\pi^{k+1-\nu}} \| p \|^{k+1} n^{\nu-1} \alpha^{k+1}(n) = \frac{\pi^{\nu}}{4} n^{\nu-1} a^{k+1} \| p \|^{k+1} \alpha^{k+1}(n).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. При n достаточно больших и произвольном $m = 1,2,\ldots$ для собственных значений оператора L справедливы оценки

$$\left| W_n - \lambda_n - \frac{\left(Ne^{(\nu-1)}_n, e_n \right) - \sum_{k=1}^{m} \left(Ng^{(\nu-1)}_k(x,n), e_n(x) \right)}{1 - \sum_{k=2}^{m} \left(g_k(x,n), e_n(x) \right)} \right| \le 4\pi^{\nu} n^{\nu-1} a^{m+2} \| p \|^{m+2} \alpha^{m+2}(n), \tag{44}$$

причем

$$\left| \frac{\left(Ng^{(\nu-1)}_m(x,n), e_n(x) \right)}{1 - \sum_{k=2}^{m} \left(g_k(x,n), e_n(x) \right)} \right| \le \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^{\nu} n^{\nu-1} a^{m+1} \| p \|^{m+1} \alpha^{m+1}(n). \tag{45}$$

Доказательство. Из леммы 12 при n достаточно больших следуют оценки:

$$|A_1(n)| \le \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^{\nu} n^{\nu-1} a^2 \| p \|^2 \alpha^2(n), \tag{46}$$

$$|A_{m+1}(n)| \le \frac{\sqrt{2}}{4} \pi^{\nu} n^{\nu-1} a^{m+2} \| p \|^{m+2} \alpha^{m+2}(n). \tag{47}$$

Так как $\left| \left(Ne^{(\nu-1)}_n, e_n \right) \right| \le \sqrt{2} \pi^{\nu-1} n^{\nu-1} \| p \| \left| q^{\sin}_n \right|$, то при n достаточно больших из (36) и (46) получаем

$$\left| \left(N\varphi^{(\nu-1)}_n,\ e_n \right) \right| \le 2 n^{\nu-1} \pi^{\nu-1} \| p \| \alpha(n). \tag{48}$$

Из леммы 10 при n достаточно больших следует

$$|B_{m+1}(n)| \le 2\sqrt{2} a^{m+1} \| p \|^{m+1} \alpha^{m+1}(n);\ \left| 1 - B^m_2(n) \right|^{-1}, \left| 1 - B_2(n) \right|^{-1} \le \sqrt{2}. \tag{49}$$

Из (34) и (47)–(49) следует (44), а из (38) и (49) следует (45).

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект НШ-1295.2003.1), программы «Университеты России» (проект ур.04.01.041) и гранта РФФИ (проект 03-01-00169).

Библиографический список

1. *Ульянова Е.Л.* Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерным: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1998.
2. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Математ. сб. 1981. Вып. 114(156), № 3. С.375-405.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

УДК 512.56

ОБЕРТОНЫ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
poplavskivb@mail.ru

Рассматриваются закономерности функционирования систем с конечным числом элементов, на которых заданы булевы бинарные отношения различных типов. Проводится построение квадратных матриц над произвольной булевой алгеброй, определяющих некоторое булево бинарное отношение, порождающее циклическую полугруппу с максимальным индексом и периодом. Циклирование системы с конечным числом элементов, называемой осциллятором, сопровождается появлением серии подпоследовательностей (обертонов) в последовательности булевых элементов, стоящих на главной диагонали степеней соответствующей булевой матрицы. В работе указаны примеры таких обертонов для булевых матриц небольших размеров.

Overtones of Oscillatory Boolean Matrices

V. B. Poplavski

We consider a functioning property of a system with a finite set of elements and with different kinds of Boolean binary relations on it. We also construct the square matrices over arbitrary Boolean algebra which determine some Boolean binary relation and generate a cyclic semigroup with the maximum index and period. The looping of the system with a finite set of elements called an oscillator, is accompanied by appearing of subsequences (overtones) in a sequence of elements on the main diagonal of powers of a relevant Boolean matrix. Examples of such overtones of Boolean matrices of small sizes are shown in the paper.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A = A(M,g,v)$ есть произвольная булева алгебра с нулевым и единичным (универсальным) элементами Ø и I соответственно. Всякое отображение $\varphi : M \times M \to B$ упорядоченных пар элементов некоторого множества M в B называется *булевым бинарным* отношением на множестве M. Ясно, что булево бинарное отношение является обобщением известного понятия «бинарное отношение», которое сводится к выбору двухэлементной булевой алгебры $B_2 = \{Ø, I\}$.

В случае конечности множества M его элементы можно пронумеровать натуральными числами от 1 до n. Тогда элементы B, которые ставятся в соответствие паре элементов из M с номерами i и j $(i, j = 1,\ldots,n)$, образуют квадратную булеву матрицу. Совершенно ясно, что смена нумерации элементов в базовом множестве M приводит к одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A. Таким образом, данное булево бинарное отношение определяет некоторую булеву матрицу A с точностью до таких перестановок.

То, что элементы некоторой булевой алгебры составляют некую матрицу A, будем записывать $A = (A^i_j)$. Верхний индекс элемента матрицы обозначает номер строки, а нижний – номер столбца.

Очевидно, что такие матрицы одного и того же размера вновь образуют булеву алгебру $\langle \mathrm{B}_{n\times n}, \cup, \cap, ', O, J\rangle$, операции которой определяются для матриц поэлементно, поэтому отношение включения $\subset$ (частичного порядка) также для матриц определяются поэлементно. Нулем и универсальным элементом такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J, образованные только из нулей Ø и единиц I соответственно, то есть $O^i_j = Ø$, $J^i_j = \mathrm{I}$ для всех i и j.

Произведение (конъюнктное) матриц A и B определяется как матрица $C = A\prod B$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле $C^i_j = \bigcup_{t=1}^{n}(A^i_t \cap B^t_j)$. Можно дуальным образом определить дизъюнктное произведение матриц $C = A\coprod B = (A'\prod B')'$, но так как далее будут рассматриваться только конъ-

