



намические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундаментальные направления ВИНТИ. 1987. Т. 16. С. 5–85.

13. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М. : Наука, 1984. 336 с.

14. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к негोलомному многообразию // Математика. Механика : сб.

науч. тр. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 12–14.

15. Galaev S. V. Extension of the interior connection of a nonholonomic manifold with a Finsler metric [Электронный ресурс]. arXiv:1103.4337v1 [math.DG] 22 Mar 2011. 9 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1103.4337v1>.

16. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М. : Наука, 1981. Т. 2. 416 с.

УДК 519.872

ДИНАМИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ЗАМКНУТЫХ СЕТЯХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ ТРЕБОВАНИЙ

Ю. И. Митрофанов, Е. С. Рогачко, Е. П. Станкевич

Саратовский государственный университет,
кафедра системного анализа и автоматического управления
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,
StankevichElena@mail.ru

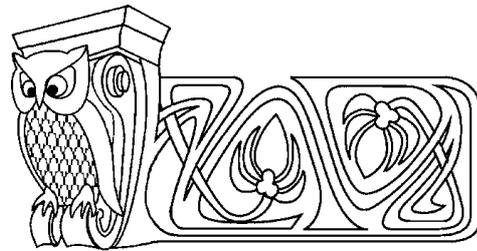
Предлагается метод управления распределением нагрузки в замкнутых сетях массового обслуживания с групповыми переходами требований. При использовании данного метода в сетях обслуживания рассматриваемого класса обеспечивается близкое к заданному распределение требований по системам. Управление осуществляется посредством использования в процессе функционирования сети различных маршрутных матриц в течение интервалов времени определенной длительности. Приводятся модели эволюции и приближенный метод вычисления стационарного распределения и других стационарных характеристик сетей массового обслуживания рассматриваемого класса.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, групповые переходы требований, распределение нагрузки, управление маршрутизацией, стационарное распределение.

ВВЕДЕНИЕ

В работах, посвященных проблемам распределения нагрузки в сетях массового обслуживания, под нагрузкой системы обслуживания, как правило, понимается число требований, пребывающих в ней. В сетях обслуживания используется распределение нагрузки двух типов — статическое и динамическое. Задачи статического распределения нагрузки решаются на этапах проектирования сетей массового обслуживания и непосредственно связаны с использованием методов оптимизации качества функционирования сетей обслуживания. Динамическое распределение нагрузки используется в процессе функционирования сетей массового обслуживания с целью повышения качества функционирования сетей за счет предотвращения скопления требований в системах или подсетях сетей обслуживания. Основу методов динамического распределения нагрузки составляет анализ состояний сети или систем обслуживания в определенные моменты времени и принятие решений на основе анализа об изменении соответствующих параметров сети. Разработке и развитию различных методов динамического управления распределением нагрузки в сетях массового обслуживания с одиночными переходами требований посвящено достаточно много работ [1–4].

В последнее время значительное внимание в теории массового обслуживания уделяется разработке и исследованию методов анализа сетей массового обслуживания с групповым поступлением,



Dynamic Load Allocation in Closed Queueing Networks with Batch Movements

Yu. I. Mitrophanov, E. S. Rogachko, E. P. Stankevich

Saratov State University,
Chair of Systems Analysis and Automatic Control
E-mail: MitrophanovYul@info.sgu.ru, RogachkoES@info.sgu.ru,
StankevichElena@mail.ru

A method of load allocation control in closed queueing networks with batch movements is proposed. When this method is used in queueing networks of considered type, close to given customer allocation among queueing systems is provided. The control is realized by use of different routing matrices during fixed time intervals in process of network operation. Models of evolution and an approximate method of computing a stationary distribution and other stationary characteristics of considered type queueing networks are presented.

Key words: queueing networks, batch movements, load allocation, routing control, stationary distribution.



обслуживанием и групповыми переходами требований. Мультипликативные формы стационарных распределений замкнутых и открытых сетей массового обслуживания с групповым поступлением и обслуживанием требований получены в работах [5, 6]. В работах [7–9] для сетей обслуживания различных типов с групповыми переходами требований, в том числе с маршрутизацией, зависящей от состояния сети, доказываются условия существования мультипликативной формы стационарного распределения. Эффективные в вычислительном отношении методы анализа сетей обслуживания с групповыми переходами требований рассматриваются в работах [10, 11]. Эти методы являются развитием ранее предложенных для сетей с одиночными переходами требований метода анализа средних значений и метода декомпозиции на основе теоремы Нортон.

В данной работе целью управления распределением нагрузки в замкнутой сети массового обслуживания с групповыми переходами требований является достижение в процессе функционирования сети приближения среднего числа требований в системах обслуживания к заданному числу требований в этих системах. Предлагается метод управления распределением нагрузки для сетей обслуживания рассматриваемого класса. При управлении распределением нагрузки в сети обслуживания используется динамическое управление маршрутизацией. Для нахождения стационарных характеристик рассматриваемой сети массового обслуживания с групповыми переходами требований и управлением распределением нагрузки используется приближенный метод анализа, основанный на результатах работ [12, 13].

1. МЕТОД УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАГРУЗКИ

Пусть N — замкнутая сеть массового обслуживания с H требованиями одного класса и L системами массового обслуживания. Система S_i , $i = 1, \dots, L$, содержит H обслуживающих приборов. Длительности обслуживания требований имеют экспоненциальное распределение с параметром μ_i , $0 < \mu_i < 1$ (данные ограничения на значения μ_i не влияют на общность полученных результатов). Состояние сети определяется вектором $s = (s_i)$, где s_i — число требований, находящихся в системе S_i . Предполагается, что изменение состояния сети происходит вследствие переходов между системами групп требований. Обозначим через X множество состояний сети, $c_X = |X|$ — мощность множества X , $B = \{1, \dots, c_X\}$ — множество номеров состояний, $I = \{1, \dots, L\}$ — множество номеров систем массового обслуживания. Для каждого состояния $s \in X$ задана числовая характеристика $V(s)$ — потенциал состояния, который определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения требуемых значений заданных характеристик качества ее функционирования. Состояние $s^\circ = (s_i^\circ)$, $i = 1, \dots, L$, при пребывании в котором достигаются наилучшие значения этих характеристик, называется базовым. Состояния в множестве X упорядочиваются по убыванию потенциалов. Далее состояние сети с номером n , $n \in B$, будем обозначать через $s^{(n)}$. Базовое состояние имеет наибольший потенциал, $s^\circ = s^{(1)}$. Требуемое распределение нагрузки в сети определяется заданием базового состояния.

Множество X делится на подмножества Y и Z доминантных и ординарных состояний, $X = Y \cup Z$, $c_Y = |Y|$ и $c_Z = |Z|$. Потенциалы доминантных состояний превосходят по величине потенциалы ординарных состояний. При формировании множеств Y и Z используется вектор $b = (b_i)$, $b_i > 0$, $i = 1, \dots, L$, граничных значений числа требований в системах обслуживания. Состояния $s \in X$, для которых $|s_i - s_i^\circ| \leq b_i$, $i = 1, \dots, L$, относятся к множеству Y , остальные состояния — к множеству Z .

Для синхронизации событий, реализуемых в сети N в процессе ее функционирования, используется последовательность интервалов времени фиксированной длительности, называемых слотами. Длительность слота полагается равной единице. Моменты начала и окончания слота z обозначим соответственно через η и τ . В момент η определяется состояние сети s (в этом состоянии сеть пребывает до начала следующего слота). В течение слота z в системе S_i завершается обслуживание $d_i \leq s_i$ требований, которые до момента τ будут занимать обслуживающие приборы. В момент τ формируется вектор $d = (d_i)$, $i = 1, \dots, L$, требований, выходящих после завершения обслуживания из систем.

Вероятность завершения обслуживания требования в данном слоте равна μ_i . Если в начале слота z в системе S_i пребывает s_i требований, то вероятность завершения обслуживания в течение этого слота d_i требований определяется биномиальным распределением с параметром μ_i . Тогда вероятность



формирования вектора d при пребывании сети N в состоянии s вычисляется по формуле

$$p(s, d) = \prod_{i=1}^L \binom{s_i}{d_i} \mu_i^{d_i} (1 - \mu_i)^{s_i - d_i}.$$

Обозначим через K_i и R_i множества номеров смежных с S_i выходных и входных систем соответственно. Согласно алгоритму маршрутизации требований, определяемому маршрутной матрицей сети, в момент τ формируются подгруппы требований d_{ij} , $i \in I$, $j \in K_i$, направляемые из S_i в S_j . Из подгрупп d_{ij} , $j \in I$, $i \in R_j$, формируются группы a_j поступающих в конце слота z в S_j требований, т. е. $a_j = \sum_{i \in R_j} d_{ij}$. Таким образом, вектор d преобразуется в вектор $a = (a_j)$, $j = 1, \dots, L$, входящих требований, и в момент τ формируется новое состояние сети $s' = s - d + a$. Векторы d и a будем называть векторами перемещений. Обозначим через D множество всех векторов перемещений, $c_D = |D|$.

Состояние $s'(s, d, a)$ назовем порожденным состоянием s и преобразованием вектора d в вектор a , если переход в это состояние из s происходит в результате таких переходов групп требований между системами сети, которые обеспечивают преобразование вектора d в вектор a . Множество всех состояний, порожденных состоянием s и вектором перемещений d , обозначим

$$\Omega(s, d) = \left\{ s' \in X : s' = s - d + a, a \in D, \sum_{i \in I} d_i = \sum_{j \in I} a_j \right\}.$$

Для состояния s и вектора перемещений d определим нуль-единичную матрицу $N(s, d) = (\nu_{ij}(s, d))$, $i, j = 1, \dots, L$, называемую матрицей передач [14]. При формировании этой матрицы определяется номер системы j , переход в которую группы требований из S_i обеспечит переход сети из состояния s в состояние $\check{s}(s, d) \in \Omega(s, d)$, имеющее наибольший потенциал по сравнению с другими состояниями множества $\Omega(s, d)$, т. е.

$$V(\check{s}(s, d)) = \max_{s' \in \Omega(s, d)} V(s').$$

Значение элемента $\nu_{ij}(s, d)$ матрицы $N(s, d)$ полагается равным 1, а значения элементов $\nu_{il}(s, d)$, $l \neq j$, $l = 1, \dots, L$, — равными 0. Если $s_i = 0$, то $\nu_{ii}(s, d) = 1$. Матрица $N(s, d)$ определяет маршруты групп требований, завершивших обслуживание в одной из систем при пребывании сети N в состоянии s .

В процессе функционирования сети N производится управление распределением нагрузки, реализуемое посредством соответствующего управления маршрутизацией групп требований. Основной целью управления распределением нагрузки в сети массового обслуживания является приближение распределения нагрузки к нагрузке, заданной базовым состоянием. Достижение этой цели обеспечивается при увеличении значения стационарной вероятности $\pi(Y)$ пребывания сети в множестве доминантных состояний Y .

Различаются два режима функционирования сети N — нормальный и коррективный. Периоды функционирования сети в этих режимах будем называть соответственно нормальными и коррективными тактами. Вид очередного такта определяется типом состояния (доминантное или ординарное) сети в момент завершения предшествующего такта. Нормальный такт имеет фиксированную длительность φ (φ является положительной целочисленной константой) и начинается в некотором доминантном состоянии. Коррективный такт начинается в некотором ординарном состоянии, а заканчивается в базовом состоянии s° в момент перехода в него сети. Таким образом, длительность коррективного такта, начавшегося в состоянии $s^{(c_Y + J)}$, $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, является случайной величиной, которую обозначим через ξ^J (ξ^J — время первого достижения сетью состояния s° при начале эволюции из состояния $s^{(c_Y + J)}$), с математическим ожиданием (м. о.) $\bar{\xi}^J$.

В нормальных и коррективных тактах применяются различные алгоритмы маршрутизации требований. В нормальном такте маршрутизация осуществляется с использованием заданной неприводимой маршрутной матрицы $\Theta = (\theta_{ij})$, $i, j = 1, \dots, L$, в коррективном такте — с использованием соответствующих матриц передач. Основным назначением коррективных тактов является возвращение сети в множество доминантных состояний.



2. МОДЕЛИ И АНАЛИЗ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Предположим, что эволюция сети N в течение нормальных и коррективных тактов может быть описана с приемлемой точностью цепями Маркова соответственно \hat{C} и \tilde{C}^J , $J \in \{1, \dots, c_Z\}$, с множеством состояний B и непрерывным временем. Множествами начальных состояний цепи \hat{C} и цепей \tilde{C}^J являются соответственно $\{1, \dots, c_Y\}$ и $\{c_Y + J\}$, а матрицами вероятностей перехода — $\hat{P} = (\hat{p}_{mn})$ и $\tilde{P} = (\tilde{p}_{mn})$, $m, n = 1, \dots, c_X$. Элементы матрицы \hat{P} определяются следующим образом:

$$\hat{p}_{mn} = \sum_{\substack{d \in D: \\ s^{(m)} - d + a = s^{(n)}}} \hat{p}(d, a), \quad (1)$$

где

$$\hat{p}(d, a) = \begin{cases} p(s^{(m)}, d) \rho_{da}, & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0, \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь δ_{da} — символ Кронекера, ρ_{da} — вероятность преобразования вектора d в вектор a определяется выражением

$$\rho_{da} = \sum_{d_{ij} \in G} \prod_{i=1}^L \binom{d_i}{d_{i1}, \dots, d_{iL}} \prod_{j=1}^L \theta_{ij}^{d_{ij}},$$

где

$$G = \left\{ d_{ij}, i = 1, \dots, L, j \in K_i : \sum_{i=1}^L d_{ij} = a_j \right\}.$$

Элементы матрицы \tilde{P} определяются выражением (1) при замене знака \wedge на \sim , где

$$\tilde{p}(d, a) = \begin{cases} p(s^{(m)}, d), & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0 \text{ и } s^{(m)} - d + a = \check{s}(s^{(m)}, d), \\ 0, & \text{если } p(s^{(m)}, d) > 0 \text{ и } s^{(m)} - d + a \neq \check{s}(s^{(m)}, d), \\ \delta_{da}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для анализа сети N с групповыми переходами требований и управлением распределением нагрузки применяется метод, аналогичный рассмотренным в работах [12, 13] методам анализа сетей массового обслуживания с одиночными переходами требований и управлением распределением нагрузки и маршрутизацией.

Средние вероятности пребывания цепей \hat{C} и \tilde{C}^J в состоянии $n \in B$ в течение интервала времени, равного длительности соответствующего такта, при начальном состоянии m определяются по формулам

$$\hat{\sigma}_{mn} = \frac{1}{\varphi} \int_0^\varphi \hat{p}_{mn}^{(t)} dt, m \in \{1, \dots, c_Y\},$$

$$\tilde{\sigma}_{mn} = \frac{1}{\xi^J} \int_0^{\xi^J} \tilde{p}_{mn}^{(t)} dt, J = m - c_Y, m \in \{c_Y + 1, \dots, c_X\},$$

где элементы матриц $\hat{P}^{(t)} = (\hat{p}_{mn}^{(t)})$ и $\tilde{P}^{(t)} = (\tilde{p}_{mn}^{(t)})$, $m, n = 1, \dots, c_X$, вероятностей перехода за время t цепей \hat{C} и \tilde{C}^J вычисляются с использованием соотношений $\hat{P}^{(t)} = e^{(\hat{P}-E)t}$ и $\tilde{P}^{(t)} = e^{(\tilde{P}-E)t}$ (E — единичная матрица).

Вводится в рассмотрение случайный процесс Υ с непрерывным временем и множеством состояний B , для которого длительность пребывания в состоянии n

$$\beta_n = \begin{cases} \varphi, n = 1, \dots, c_Y, \\ \xi^J, J = n - c_Y, n = c_Y + 1, \dots, c_X. \end{cases}$$

Процесс Υ описывает процесс перехода сети N между состояниями, соответствующими начальным состояниям тактов функционирования сети.

Для процесса Υ вычисляется стационарное распределение $v = (v_n)$, $n = 1, \dots, c_X$, которое совпадает со стационарным распределением цепи Маркова \check{C} с непрерывным временем и множеством



состояний B , длительность пребывания которой в состоянии $n \in B$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\check{\alpha}_n = 1/\beta_n$ [12]. Элементы инфинитезимального оператора $\check{Q} = (\check{q}_{mn})$, $m, n = 1, \dots, c_X$, цепи \check{C} определяются следующим образом:

$$\check{q}_{mn} = \begin{cases} \frac{\hat{p}_{mn}^{(\varphi)}}{\varphi(1 - \hat{p}_{mm}^{(\varphi)})}, & m \in \{1, \dots, c_Y\}, \\ \frac{\tilde{p}_{mn}^{(\xi^J)}}{\xi^J(1 - \tilde{p}_{mm}^{(\xi^J)})}, & J = m - c_Y, m \in \{c_Y + 1, \dots, c_X\}, \end{cases} \quad m \neq n, \quad \check{q}_{mm} = -\check{\alpha}_m.$$

Таким образом, распределение v находится как решение уравнения $v\check{Q} = 0$ с условием $\sum v_n = 1$.

Реализацию случайного процесса Δ , описывающего эволюцию сети N , можно рассматривать как последовательность конечных реализаций цепей \check{C} и \check{C}^J , $J = 1, \dots, c_Z$. Характеристики процесса Δ приближенно определяются параметрами этих цепей и длительностями их реализаций, равными длительностям нормального такта φ и коррективного такта ξ^J соответственно.

Приближенные значения стационарных вероятностей состояний π_n , $n = 1, \dots, c_X$, процесса Δ при заданном значении φ определяются выражением

$$\pi_n = \sum_{m=1}^{c_Y} v_m \hat{\sigma}_{mn} + \sum_{J=1}^{c_Z} v_{c_Y+J} \tilde{\sigma}_{c_Y+J,n}.$$

Очевидно, что стационарная вероятность состояния $s^{(n)} \in X$ сети N с управлением распределением нагрузки $\pi(s^{(n)}) = \pi_n$, $n \in B$. Математическое ожидание числа требований в системе S_i вычисляется по формуле

$$\bar{s}_i = \sum_{k=0}^H k \sum_{\substack{s \in X: \\ s_i = k}} \pi(s),$$

интенсивность входящего потока требований в систему S_i

$$\lambda_i = \bar{s}_i \mu_i,$$

м. о. длительности пребывания требований в системе S_i

$$\bar{u}_i = \bar{s}_i / \lambda_i = 1 / \mu_i.$$

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Пусть сеть N имеет следующие параметры: $L = 4$, $H = 5$, $\mu = (\mu_i) = (0.4, 0.1, 0.3, 0.7)$, $c_X = 56$, $c_D = 126$, $s^\circ = (2, 1, 1, 1)$, $b = (1, 1, 1, 1)$. В течение нормальных тактов используется маршрутная матрица

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Потенциалы состояний определяются по формулам

$$V(s^{(1)}) = 1, \quad V(s^{(n)}) = 1 / \sqrt{\sum_{i=1}^L (s_i^{(n)} - s_i^\circ)^2}, \quad n = 2, \dots, 56.$$

Множество Y будет включать состояния $s^{(n)}$, $n = 1, \dots, 19$. Остальные состояния будут принадлежать множеству Z .

Пусть сеть N_0 отличается от сети N только тем, что в ней отсутствует управление распределением нагрузки. Стационарная вероятность пребывания сети N_0 в множестве Y $\pi_0(Y) = 0.214$, стационарная вероятность базового состояния $\pi_0(s^{(1)}) = 0.008$, вектор м. о. числа требований в системах



сети $\bar{s}_0 = (\bar{s}_{i,0}) = (0.594, 2.871, 1.185, 0.350)$ и вектор интенсивностей входящих потоков требований $\lambda_0 = (\lambda_{i,0}) = (0.238, 0.287, 0.356, 0.245)$.

Результаты экспериментов для сети N при различных значениях φ приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Характеристики качества функционирования сети N

Вероятность	Длительность нормального такта φ							
	1	5	10	20	50	100	200	1000
$\pi(Y)$	0.661	0.572	0.483	0.390	0.299	0.259	0.237	0.219
$\pi(s^{(1)})$	0.281	0.206	0.156	0.105	0.055	0.033	0.021	0.012

Из табл. 1 видно, что при уменьшении φ вероятности $\pi(Y)$ и $\pi(s^{(1)})$ увеличиваются и при $\varphi = 10$ первая из них — в 2 раза, а вторая почти в 20 раз превосходит соответствующие вероятности сети N_0 . Из сравнения характеристик качества функционирования сетей N (см. табл. 1) и N_0 непосредственно следует, что качество функционирования сети N при $\varphi < 100$ существенно выше, чем сети N_0 . Полученные результаты свидетельствуют о возможности достижения при малых значениях φ высокой эффективности метода динамического управления распределением нагрузки.

В табл. 2 показана зависимость стационарных характеристик сети N от значения длительности нормального такта φ .

Таблица 2

Зависимость стационарных характеристик сети N

Характеристика	№ системы, i	Длительность нормального такта φ							
		1	5	10	20	50	100	200	1000
\bar{s}_i	1	1.635	1.412	1.222	1.010	0.795	0.702	0.650	0.606
	2	1.869	2.069	2.261	2.469	2.677	2.767	2.817	2.859
	3	1.110	1.142	1.150	1.160	1.173	1.178	1.181	1.184
	4	0.386	0.377	0.367	0.361	0.355	0.353	0.352	0.351
λ_i	1	0.654	0.565	0.489	0.404	0.318	0.281	0.260	0.243
	2	0.187	0.207	0.226	0.247	0.268	0.277	0.282	0.286
	3	0.333	0.343	0.345	0.348	0.352	0.354	0.355	0.355
	4	0.270	0.264	0.257	0.253	0.249	0.247	0.246	0.246

Для рассматриваемой сети м. о. длительности коррективного такта, если очередной такт в сети является коррективным, вычисляется по формуле $\bar{\xi} = \frac{cZ}{\sum_{J=1}^{cZ} \bar{\xi}^J v_{cY+J}/v(Z)}$, где $v(Z) = \sum_{J=1}^{cZ} v_{cY+J}$ — доля коррективных тактов. Например, при $\varphi = 1$ $\bar{\xi} = 7.789$, а при $\varphi = 100$ $\bar{\xi} = 9.362$. При $\varphi < \bar{\xi}$ сеть N в процессе функционирования пребывает большую часть времени в коррективном режиме, что обеспечивает улучшение ее стационарных характеристик. Поэтому при уменьшении φ значения \bar{s}_i приближаются к значениям s_i^0 , $i = 1, \dots, 4$. Если $\varphi \gg \bar{\xi}$, то влияние коррективного режима незначительно, и при $\varphi \rightarrow \infty$ значения характеристик сети N стремятся к значениям характеристик сети N_0 .

Пример 2. Пусть N' — сеть массового обслуживания, отличающаяся от сети N только параметром Θ :

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для сети N'_0 без управления имеем $\pi'_0(Y) = 0.106$, $\pi'_0(s^{(1)}) = 0.004$.

Следствием изменения топологии сети является увеличение в сети N' доли коррективных тактов $v(Z)$ и м. о. длительности коррективного такта $\bar{\xi}$ по сравнению со значениями этих величин в



сети N . Например, при $\varphi = 1$ $\bar{\xi}' = 9.561$, а при $\varphi = 100$ $\bar{\xi}' = 10.200$. Поэтому возрастает влияние управления на характеристики сети (табл. 3). В частности, при $\varphi = 10$ $\pi'(Y)$ почти в 4 раза, а $\pi'(s^{(1)})$ — в 40 раз превосходят вероятности $\pi'_0(Y)$ и $\pi'_0(s^{(1)})$ сети N'_0 .

Таблица 3

Характеристики качества функционирования сети N'								
Вероятность	Длительность нормального такта φ							
	1	5	10	20	50	100	200	1000
$\pi'(Y)$	0.588	0.495	0.401	0.303	0.204	0.160	0.134	0.113
$\pi'(s^{(1)})$	0.275	0.218	0.167	0.112	0.058	0.033	0.019	0.008

Пример 3. Следует отметить, что изменение характеристик сети с управлением распределением нагрузки существенно зависит также от значения вектора интенсивностей обслуживания μ . Построим сеть N'' , которая отличается от сети N' тем, что $\mu = (0.2, 0.7, 0.4, 0.7)$. Тогда при $\varphi = 10$ $\pi''_0(Y) = 0.702$, а $\pi''(Y) = 0.739$, т. е. улучшение характеристики составляет всего 5 %. Это объясняется тем, что при данном векторе μ $\bar{s}''_0 \approx s^o = (2, 1, 1, 1)$, и управление распределением нагрузки не может привести к значительным изменениям характеристик качества функционирования сети.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе требуемое распределение нагрузки определяется заданием базового состояния и целью динамического управления распределением нагрузки является приближение средней нагрузки каждой системы к значению соответствующей компоненты вектора базового состояния. Достижение этой цели обеспечивается использованием при управлении распределением нагрузки в течение коррективных тактов метода управления маршрутизацией групп требований с использованием матриц передач. Представленные в статье примеры имеют иллюстративный характер и показывают, что применение матриц передач в течение коррективных тактов обеспечивает увеличение стационарных вероятностей пребывания рассматриваемых сетей в базовом состоянии и доминантных состояниях. Численные значения характеристик сетей обслуживания, как видно из приведенных примеров, существенно зависят от топологии и параметров сетей таких, как маршрутная матрица, используемая в течение нормальных тактов, и интенсивности обслуживания требований в системах обслуживания.

Библиографический список

1. *Bovopoulos A. D., Lazar A. A.* Optimal load balancing for Markovian queueing networks // Proc. 30th Midwest Symp. Circ. and Syst. Syracuse; N.Y., 1987. P. 1428–1432.
2. *Alanyali M., Hajek B.* Analysis of simple algorithms for dynamic load balancing // Math. Oper. Res. 1997. Vol. 22, № 4. P. 840–871.
3. *Bonald T., Jonckheere M., Proutiere A.* Insensitive load balancing // Proc. of ACM Sigmetrics/Performance. N.Y., 2004. P. 6367–6378.
4. *Down D. G., Lewis M. E.* Dynamic load balancing in parallel queueing systems: stability and optimal control // Eur. J. Oper. Res. 2006. Vol. 168, № 2. P. 509–519.
5. *Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G., Dijk N. M.* Closed queueing networks with batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 59–70.
6. *Henderson W., Taylor P. G.* Product form in networks of queues with batch arrivals and batch services // Queueing Systems. 1990. Vol. 6. P. 71–88.
7. *Boucherie R. J., Dijk N. M.* Product forms for queueing networks with state-dependent multiple job transitions // Adv. Appl. Prob. 1991. Vol. 23, № 1. P. 152–187.
8. *Serfozo R. F.* Queueing networks with dependent nodes and concurrent movements // Queueing Systems. 1993. Vol. 13. P. 143–182.
9. *Miyazawa M.* Structure-reversibility and departure functions of queueing networks with batch movements and state dependent routing // Queueing Systems. 1997. Vol. 25. P. 45–75.
10. *Coyle A. J., Henderson W., Pearce C. E. M., Taylor P. G.* A general formulation for mean-value analysis in product-form batch-movement queueing networks // Queueing Systems. 1994. Vol. 16. P. 363–372.
11. *Bause F., Boucherie R. J., Buchholz P.* Norton's theorem for batch routing queueing networks // Stochastic Models. 2001. Vol. 17. P. 39–60.
12. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С.* Модели и анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением распределением нагрузки // Автоматика и вычислительная техника. 2006. № 5. С. 69–77.
13. *Митрофанов Ю. И., Фокина Н. П.* Анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2007. Т. 7. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 27–33.
14. *Митрофанов Ю. И., Рогачко Е. С.* Управление распределением нагрузки в сетях массового обслуживания // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. С. 94–102.