УДК 517.51

ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ СЛУЧАЙ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Д. В. Фуфаев

Студент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, fufaevdv@rambler.ru

В работе обобщаются теоремы Лебега и Иессена – Марцинкевича – Зигмунда о дифференцировании неопределенных интегралов в $\mathbb{R}^N$ на случай промежуточной регулярности системы множеств. Рассматриваются приложения полученных результатов к разложению в ряд Фурье – Хаара и орторекурсивному разложению по системе брусов.

Ключевые слова: ряды Фурье, орторекурсивные разложения, интеграл Лебега, система Хаара.

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальная теорема Лебега гласит, что соотношение

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x)$$

выполняется для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$, если f — локально интегрируемая, по Лебегу, функция, где $B(x,r)$ — шар радиуса r с центром в точке x, а $|\cdot|$ — мера Лебега, причем вместо шаров можно брать систему множеств более общего вида, удовлетворяющих условию регулярности. Позже Иессен, Марцинкевич и Зигмунд получили схожий результат уже для произвольных систем множеств, но при этом потребовалось наложить дополнительные условия на функцию f. Таким образом, охваченными оказались случай произвольных систем множеств и случай регулярных систем. Имеет смысл рассмотреть промежуточный случай регулярности системы множеств с целью получить промежуточные результаты.

Определение 1. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Ее *неопределенным интегралом* назовем функцию множества:

$$F(I) := \int_I f(x)dx,$$

где I — измеримое множество, а интеграл понимается в смысле Лебега по мере Лебега.

Под брусом Δ будем понимать множество $(a^1;b^1)\times(a^2;b^2)\times\cdots\times(a^N;b^N)$ (где $-\infty < a^i < b^i < +\infty$), в которое, быть может, добавлены некоторые точки границы или содержащие всю свою границу. В дальнейшем в качестве множеств I будем рассматривать только брусы. Их диаметром будем называть число $\operatorname{diam}\Delta = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N}(b^k-a^k)^2}$. Пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность (или система) брусов. Будем рассматривать системы брусов, обладающие свойством Витали, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}^N$ и любого $\varepsilon > 0$ существует брус $\Delta \in \Xi$ такой, что $x \in \Delta$, $\operatorname{diam}\Delta < \varepsilon$.

Скажем, что система Ξ регулярная, если существует такое число $L > 0$, называемое параметром регулярности системы, что для любого бруса $\Delta = (a^1;b^1)\times\cdots\times(a^N;b^N)$, $\Delta\in\Xi$, справедливо неравенство:

$$\frac{\max\{b^1-a^1,\ldots,b^N-a^N\}}{\min\{b^1-a^1,\ldots,b^N-a^N\}} \leqslant L < \infty.$$

Например, в качестве системы брусов можно взять все брусы, вершины которых имеют рациональные координаты, а в качестве регулярной системы — те из этих брусов, для которых выполнено условие регулярности для некоторого числа L.

Определение 2. Интеграл функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ называется *дифференцируемым по системе брусов* Ξ *в точке* x, если существует следующий предел:

$$D_\Xi F(x) := \lim_{\operatorname{diam}\Delta\to 0}\frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(y)\,dy < \infty,$$

где предел берется по всем $\Delta \ni x$, $\Delta \in \Xi$. Число $D_\Xi F(x)$ называется *производной интеграла F по системе Ξ в точке x*. Будем говорить, что интеграл функции *слабо дифференцируем* (в точке x), если он дифференцируем по любой регулярной системе брусов и *сильно дифференцируем*, если он дифференцируем по произвольной системе. Очевидно, сильная дифференцируемоть влечет слабую.

Также введем:

$$\overline{D}_\Xi F(x) := \varlimsup_{\substack{\operatorname{diam}\Delta\to 0\\ x\in\Delta\in\Xi}} \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(y)\,dy, \qquad \underline{D}_\Xi F(x) := \varliminf_{\substack{\operatorname{diam}\Delta\to 0\\ x\in\Delta\in\Xi}} \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta f(y)\,dy,$$

тогда дифференцируемость будет означать равенство верхнего и нижнего пределов.

Давно известны следующие теоремы (см. [1, гл. IV, § 6, теорема 3] и [1, гл. IV, § 13]):

Теорема 1. *Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_\Xi F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая регулярная система брусов.*

Теорема 2. *Пусть функции f, $f\ln^{N-1}(|f|+1) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_\Xi F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая система брусов.*

Определение 3. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\Xi = \{\Delta\}$ — регулярная система брусов в $\mathbb{R}^N$. Тогда *регулярной функцией Харди – Литтлвуда* функции f назовем следующую функцию f^β:

$$f^\beta(x) := \sup_{\Xi\ni\Delta\ni x} \frac{1}{|\Delta|}\int_\Delta |f(x)|\,dx.$$

Замечание. Не трудно проверить, что введенная функция Харди – Литтлвуда эквивалентна кубической функции Харди – Литтлвуда (см. [2, с. 14]) в том смысле, что каждая оценивается через другую с постоянной, зависящей лишь от размерности и параметра регулярности L.

Определим функцию распределения для функции f^β: $\lambda(a) = \mu\{x \in \mathbb{R}^N : |f^\beta(x)| > a\}$. Для нее выполнено следующее равенство:

$$\int\limits_{X:f^\beta(x)>\varepsilon} |f^\beta(x)|\,dx = -\int\limits_\varepsilon^\infty a\,d\lambda(a). \tag{1}$$

Лемма 1 [2, с. 15–17]. *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда для любого $a > 0$*

$$\lambda(a) \leqslant \frac{C}{a}\int\limits_{x:|f(x)|>a/2} |f(x)|\,dx,$$

где C — константа, зависящая только от размерности N.

Заметим, что введенные выше определения и теоремы можно сформулировать и в случае, когда функция f определена на одном брусе, например, на $[0,1]^N$, и система Ξ полностью лежит внутри него. Введем обозначение $I := [0,1]$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 3 (многомерное неравенство Харди – Литтлвуда). *Пусть f, $f\ln(f+1) \in L^1(I^N)$, $f \geqslant 0$, и задано $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\int_{I^N} f^\beta(x)\,dx \leqslant A\int_{I^N} f(x)\ln(f(x)+1)\,dx + B\int_{I^N} f(x)\,dx + \varepsilon,$$

где A и B суть константы, зависящие от ε, но не от f.

Доказательство. Разобьем функцию на ее большую и малую части и используем равенство (1):

$$\int\limits_{I^N} f^\beta(x)\,dx = \int\limits_{x:f^\beta(x)\leqslant\varepsilon} f^\beta(x)\,dx + \int\limits_{x:f^\beta(x)>\varepsilon} f^\beta(x)\,dx \leqslant \varepsilon - \int\limits_\varepsilon^\infty a\,d\lambda(a) \leqslant \varepsilon + \int\limits_\varepsilon^\infty \lambda(a)\,da + \lambda(\varepsilon)\varepsilon.$$

В последнем неравенстве проинтегрировали по частям и использовали тот факт, что $\lambda \geqslant 0$. Оценим слагаемые, используя лемму 1:

$$\lambda(\varepsilon)\varepsilon \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\,\varepsilon \int\limits_{x:f(x)>\varepsilon/2} f(x)\,dx \leqslant C\|f\|_{L^1},$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \lambda(a)\,da \leqslant C \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{a} \int\limits_{x: f(x)>a/2} f(x)\,dx\,da = C \int\limits_{x:|f(x)|>\varepsilon/2} \int\limits_{\varepsilon}^{2f(x)} \frac{f(x)}{a}\,da\,dx =$$

$$= C \int\limits_{x:|f(x)|>\varepsilon/2} f(x)(\ln(2f(x)) - \ln\varepsilon)\,dx \leqslant C\|f\ln(f+1)\|_{L^1} + (\ln 2 + |\ln\varepsilon|)\|f\|_{L^1};$$

итак, получили нужное неравенство с $A = C$ и $B = C(1 + \ln 2 + |\ln\varepsilon|)$. □

Наложим промежуточные условия на систему брусов, чтобы получить промежуточные условия на функцию. Пусть $\mathbb{R}^N$ представлено в виде произведения D сомножителей: $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{M_1+\dots+M_D}$ (где M_i — натуральные числа), и пусть $\Xi = \{\Delta_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\Delta_k^1 \times \Delta_k^2 \times \dots \times \Delta_k^D\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\Delta_k^i = (a_k^{i,1}; b_k^{i,1}) \times (a_k^{i,2}; b_k^{i,2}) \times \dots \times (a_k^{i,M_i}; b_k^{i,M_i})$, причем все системы $\Xi_i = \{\Delta_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ — регулярны (при этом система Ξ не обязана быть регулярной). Назовем такую систему D-регулярной.

Можно ввести эквивалентное определение: пусть P_j — ортогональный проектор на подпространство $\mathbb{R}^{M_j}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$. Тогда система Ξ D-регулярна, если регулярна каждая из систем $P_j(\Xi)$. Через $P_j^{\perp}$ будем обозначать оператор $Id - P_j$, т. е. проектор на ортогональное дополнение к $\mathbb{R}^{M_j}$.

Теорема 4. *Пусть функции $f, f\ln^{D-1}(|f|+1) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $D_\Xi F(x) = f(x)$ для почти всех точек $x \in \mathbb{R}^N$, где Ξ — любая D-регулярная система брусов.*

Доказательство. Докажем по индукции. Случай $D = 1$ — результат теоремы 1. Пусть $D > 1$. Предположим, что для всех $k < D$ утверждение доказано, докажем для $k = D$.

Очевидно, достаточно рассмотреть функцию f на брусе I^N, причем можно предположить, что эта функция не отрицательна.

Обозначим через x набор первых M_1 координат, через y — последних $N - M_1$, тогда функцию f можно обозначать как $f(x, y)$.

Положим $g_n(x,y) = [f(x,y)]_n$ — срезки функции f (см., например, [3, определение 5.16]). Далее, $h_n = f - g_n$. Построим функции h_n^β по первым M_1 координатам, а именно пусть брусы из Ξ имеют вид $\Delta_1 \times \Delta_2$, где размерность Δ_1 равна M_1, тогда

$$h_n^\beta(x,y) = \sup_{P_1(\Xi)\ni\Delta_1\ni x} \frac{1}{|\Delta_1|} \int_{\Delta_1} h_n(u,y)\,du.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По теореме 3 справедливо неравенство

$$\int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n^\beta(x,y)\,dx\,dy \leqslant A \int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n(x,y)\ln(h_n(x,y)+1)\,dx\,dy +$$
$$+ B \int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h_n(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

из которого, в частности, следует, что $h^\beta(x,y) \in L^1(I^N)$.

Интегралы в правой части неравенства стремятся к нулю, поэтому существует такое число K, что (для краткости $h = h_K$, $g = g_K$) $\int_{I^{N-M_1}} \int_{I^{M_1}} h^\beta(x,y)\,dx\,dy < \varepsilon^2$.

Пусть E — множество таких точек $(x_0, y_0) \in I^N$, что

1) $\int_{I^{N-M_1}} h^\beta(x_0,t)\ln^{D-2}(h^\beta(x_0,t)+1)\,dt < \infty$ (интегрирование здесь идет по последним координатам),

2) неопределенный интеграл $\tilde{H}(\Delta) = \int_\Delta h^\beta(x_0,t)\,dt$, где Δ — брус из системы $P_1^\perp(\Xi)$, имеет в точке y_0 производную $h^\beta(x_0,y_0)$ по системе брусов $P_1^\perp(\Xi)$.

Ниже мы докажем, что $\int_{I^N} h^\beta(x,y)\ln^{D-2}(h^\beta(x,y)+1)\,dx\,dy < \infty$ (заметим, что в случае $D = 2$ это утверждение сразу следует из многомерного неравенства Харди – Литтлвуда, поэтому доказательство будет проводится для $D > 2$). Тогда множество E будет иметь меру 1, так как по теореме Фубини условие 1) будет выполняться для п. в. $x_0 \in I^{M_1}$, а условие 2) выполняется для п. в. $y_0 \in I^{N-M_1}$, как только выполнено условие 1), по предположению индукции.

Вспомним следующее неравенство Йенсена для кратного интеграла, которое следует из неравенства для функции одной переменной (см., например, [4, гл. X, § 5, теорема 6]): для выпуклой функции ϕ и интегрируемой на брусе B функции f справедливо неравенство

$$\phi\left(\int_B f(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{|B|}\int_B \phi(|B|f(x))\,dx,$$

заметим, что функция $\phi(x) = x\ln^n(x+1)$ — выпукла для $x \geqslant 0$ и $n \in \mathbb{N}$.

По определению функции Харди – Литтлвуда для любого $\varepsilon > 0$ существует брус $B(x,y) \subset I^{M_1}$ (зависящий, вообще говоря, от (x,y)) такой, что

$$\int_{I^N} h^\beta(x,y)\ln^{D-2}(h^\beta(x,y)+1)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{I^N}\left(\frac{1}{|B(x,y)|}\int_{B(x,y)} h(u,y)du+\varepsilon\right)\ln^{D-2}\left(\frac{1}{|B(x,y)|}\int_{B(x,y)} h(u,y)\,du+\varepsilon+1\right)dx\,dy =$$
$$=\int_{I^N}\left(\int_{B(x,y)}\frac{h(u,y)+\varepsilon}{|B(x,y)|}du\right)\ln^{D-2}\left(\int_{B(x,y)}\frac{h(u,y)+\varepsilon}{|B(x,y)|}\,du+1\right)dx\,dy \leqslant$$

применим неравенство Йенсена для $\phi(x)=x\ln^{D-2}(x+1)$ и $f(u)=\dfrac{h(u,y)+\varepsilon}{|B(x,y)|}$, очевидно, интегрируемой:

$$\leqslant \int_{I^N}\frac{1}{|B(x,y)|}\int_{B(x,y)}|B(x,y)|\frac{h(u,y)+\varepsilon}{|B(x,y)|}\ln^{D-2}\left(|B(x,y)|\frac{h(u,y)+\varepsilon}{|B(x,y)|}+1\right)du\,dx\,dy =$$
$$=\int_{I^N}\frac{1}{|B(x,y)|}\int_{B(x,y)}(h(u,y)+\varepsilon)\ln^{D-2}\left(h(u,y)+\varepsilon+1\right)\,du\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{I^N}[(h(x,y)+\varepsilon)\ln^{D-2}(h(x,y)+\varepsilon+1)]^\beta\,dx\,dy.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ и по неравенству Харди – Литтлвуда для некоторого $\gamma>0$ имеем

$$\int_{I^N} h^\beta(x,y)\ln^{D-2}(h^\beta(x,y)+1)dxdy \leqslant \int_{I^D}[h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)]^\beta\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant A\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy+$$
$$+B\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\,dx\,dy+\gamma.$$

Второй интеграл, очевидно, сходится.

Оценим первый интеграл:

$$\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+h(x,y)+\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy =$$
$$=\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[(h(x,y)+1)(\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1)]\,dx\,dy =$$
$$=\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-1}(h(x,y)+1)\,dx\,dy+\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy.$$

Первый из этих интегралов сходится по условию теоремы.

Оценим второй интеграл:

$$\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[\ln^{D-2}(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[(\ln(h(x,y)+1)+1)^{D-2}]\,dx\,dy =$$
$$=(D-2)\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln[\ln(h(x,y)+1)+1]\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant (D-2)\int_{I^N} h(x,y)\ln^{D-2}(h(x,y)+1)\ln(h(x,y)+1)\,dx\,dy =$$
$$=(D-2)\int_{I^D} h(x,y)\ln^{D-1}(h(x,y)+1)\,dx\,dy,$$

а этот интеграл сходится. Таким образом, показали, что

$$\int_{I^N} h^\beta(x,y)\ln^{D-2}(h^\beta(x,y)+1)\,dx\,dy<\infty.$$

Следовательно, мера множества E равна 1.

Обозначим через H, F, G неопределенные интегралы функций h, f, g соответственно. Пусть (x_0,y_0) — точка множества E и $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ — произвольный брус из системы Ξ, содержащий эту точку. Имеем:

$$\frac{H(\Delta)}{|\Delta|}=\frac{1}{|\Delta_2|}\int_{\Delta_2}\frac{1}{|\Delta_1|}\int_{\Delta_1}h(u,v)\,du\,dv\leqslant\frac{1}{|\Delta_2|}\int_{\Delta_2}h^\beta(x_0,v)\,dv.$$

Полагая $\operatorname{diam}\Delta\to 0$, получаем $\overline{D}_\Xi H(x_0,y_0)\leqslant h^\beta(x_0,y_0)$. Таким образом, так как (x_0,y_0) — произвольная точка множества меры 1, то получаем $0\leqslant\overline{D}_\Xi H(x_0,y_0)\leqslant\varepsilon$ всюду, кроме, быть может, множества меры меньшей, чем ε (например, по неравенству Чебышева). С другой стороны, так как функция g ограничена, ее неопределенный интеграл дифференцируем почти всюду. Поэтому

$$0\leqslant\overline{D}_\Xi F(x_0,y_0)-\underline{D}_\Xi F(x_0,y_0)\leqslant\varepsilon \tag{2}$$

всюду, кроме, быть может, множества меры меньшей, чем ε. В силу произвольности ε, неравенство (2) обращается в равенство почти всюду, что и требовалось доказать. $\square$

3. ПРИМЕНЕНИЯ

Данный результат может использоваться, например, при изучении сходимости почти всюду разложений интегрируемых функций по системам, для которых есть смысл вводить свойство регулярности, подобное изложенному выше. Рассмотрим два примера, в которых этот результат используется непосредственно: разложение в кратный ряд Фурье по системе Хаара и орторекурсивное разложение по системе характеристических функций брусов.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье по (ортонормированной) системе функций Хаара, а именно по системе функций

$$\chi_{\mathbf{n}}(x):=\chi_{n_1}(x_1)\chi_{n_2}(x_2)\cdots\chi_{n_N}(x_N),$$

где $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_N)\in\mathbb{Z}_+^N$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, а $\chi_k(x)$ — k-я функция Хаара на отрезке $[0,1]$, $k=0,1,\ldots$ (см. [5]). Будем рассматривать разложение по подпоследовательностям индексов, являющихся степенями двойки, то есть $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_N)=(2^{m_1},2^{m_2},\ldots,2^{m_N})$. Тогда частичные суммы разложения будут иметь следующий вид:

$$S_{\mathbf{n}}(x)=\frac{1}{2^{-m_1}2^{-m_2}\ldots 2^{-m_N}}\int\limits_{(i_1-1)2^{-m_1}}^{i_12^{-m_1}}\int\limits_{(i_2-1)2^{-m_2}}^{i_22^{-m_2}}\ldots\int\limits_{(i_N-1)2^{-m_N}}^{i_N2^{-m_N}}f(y)\,dy \tag{3}$$

при $(i_k-1)2^{m_k}<x_k\le i_k2^{m_k}$, $i_k\in\mathbb{N}$, $k=1,2,\ldots,N$.

Это выражение можно интерпретировать как отношение интеграла по брусу с длинами ребер 2^{-m_k}, содержащему точку x, к мере этого бруса. В этом случае условие регулярности брусов, по которым идет интегрирование, можно переформулировать как условие ограниченного возрастания системы индексов m_k. А именно рассмотрим возрастающий мультииндекс $\mathbf{n}=(n_1,n_2,\ldots,n_N)$ (возрастание означает, что $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}n_i\to\infty$). Назовем его возрастающим ограничено, если $\sup\limits_{1\leqslant i,j\leqslant N}\dfrac{n_i}{n_j}\leqslant L<\infty$, и возрастающим D-ограничено, если все мультииндексы $P_j(\mathbf{n})$ возрастают ограничено (как индексы размерности M_j)(действие оператора проекции на $\mathbb{Z}_+^N$ является ограничением его действия на $\mathbb{R}^N$). Тогда D-ограниченное суммирование ряда Фурье – Хаара будет означать D-регулярность системы брусов, по которым идет интегрирование в (3). Таким образом, доказали следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть функции $f, f\ln^{D-1}(|f|+1)\in L(I^N)$. Тогда частичные суммы ряда Фурье – Хаара D-ограничено суммируются к f почти всюду.*

Напомним определение орторекурсивного разложения. Пусть H — пространство со скалярным определением над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\{e_k\}$ — конечная или счетная система ненулевых элементов H, и $f\in H$.

Определение 4. *Рекурсивными коэффициентами Фурье элемента f по системе $\{e_k\}$* называются числа $\hat{f}_k$, задаваемые следующим образом:

1) $\hat{f}_1 = (f, e_1)\|e_1\|^{-2}$;

2) если определены $\hat{f}_k$ при $k = 1, \ldots, n$, то определим n-й остаток ряда как $r_n(f) = f - \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{f}_k e_k$, и следующий коэффициент $\hat{f}_{n+1} = (r_n(f), e_{n+1})\|e_{n+1}\|^{-2}$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k e_k$ называется *рекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по системе $\{e_k\}$*.

Систему брусов Ξ будем называть удовлетворяющей условию вложенности (или — системой с вложением), если для любых $\Delta_i, \Delta_j \in \Xi$ из $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \emptyset$ и $i < j$ следует $\Delta_j \subset \Delta_i$. Рассмотрим орторекурсивное разложение функции $f \in L(\mathbb{R}^N)$ по системе характеристических функций брусов системы Ξ, т. е. по системе $\{\chi_k(x)\} = \{\chi_{\Delta_k}(x)\}$.

Лемма 2 [6]. *Пусть Ξ — система с вложением. Тогда для любой локально интегрируемой функции частичная сумма рекурсивного ряда Фурье имеет вид*

1) $S_n(x) = 0$, если ни один из Δ_i с номером $i \leqslant n$ не содержит точки x;

2) $S_n(x) = \dfrac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} f(x)dx$ иначе. Здесь $k = \max\{k = 1, \ldots, n : \ \Delta_k \ni x\}$.

Подробнее об орторекурсивных разложениях по системе характеристических функций брусов изложено в [6].

Теорема 6. *Пусть функции f, $f \ln^{D-1}(|f| + 1)$ локально интегрируемы на области $G \subset \mathbb{R}^N$, $S_n(x)$ — частичные суммы орторекурсивного разложения по системе характеристических функций брусов D-регулярной системы с вложением $\Xi = \{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Тогда $S_n(x)$ сходятся к f для почти всех $x \in G$.*

Доказательство. Учитывая явный вид частичной суммы разложения, сходимость ее в точке $x \in \mathbb{R}^N$ равносильна дифференцируемости неопределенного интеграла функции f в этой точке по системе Ξ. По теореме 2 он дифференцируем для почти всех $x \in \mathbb{R}^N$, поэтому разложение сходится к f почти всюду. $\square$

Автор выражает благодарность профессору Т. П. Лукашенко за постановку задачи и консультации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 14-01-00417) *и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ* (*проект* НШ-1096.2014.1).

Библиографический список

1. *Сакс С.* Теория интеграла. М. : Факториал Пресс, 2004. 496 с.
2. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М. : Мир, 1973. 342 с.
3. *Лукашенко Т. П., Скворцов В. А., Солодов А. П.* Обобщенные интегралы. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 280 с.
4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб. : Лань, 2008. 560 с.
5. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М. : АФЦ, 1999. 560 с.
6. *Белоусов К. В., Лукашенко Т. П.* О некоторых свойствах орторекурсивных разложений функций многих переменных по системе характеристических функций брусов // Совр. проблемы математики и механики. 2011. Т. 6, № 1. С. 52–60.

The Intermediate Case of Regularity in the Problem of Differentiation of Multiple Integrals

D. V. Fufaev

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, fufaevdv@rambler.ru

The paper deals with generalization of Lebesgue and Jessen – Marcinkiewicz – Zygmund theorems of the differentiation of multiple integrals for the intermediate case of regularity of the system of sets. The application of the result to the Fourier-Haar series and to orthorecursive expansions with respect to system of indicators of multi-dimensional intervals is considered.

Key words: Fourier series, orthorecursive expansions, Lebesgue integral, Haar system.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 14-01-00417) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools* (*project no.* НШ-1096.2014.1).

References

1. Saks S. *Teoriia integrala* [Theory of the integral]. Moscow, Faktorial Press, 2004, 496 p. (in Russian).
2. Stein I. *Singuliarnye integraly i differentsial'nye svoistva funktsii* [Singular integrals and differential properties of functions]. Moscow, Mir, 1973, 342 p. (in Russian).
3. Lukashenko T. P., Skvortsov V. A., Solodov A. P. *Obobshchennye integraly* [Generalized integrals]. Moscow, Knizhnyi dom «LIBROKOM», 2010, 280 p. (in Russian).
4. Natanson I. P. *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable]. S.-Peterburg, Lan', 2008. 560 p. (in Russian).
5. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989. (Rus. ed.: Kashin B. S., Saakian A. A. *Ortogonal'nye riady*. Moscow, AFC, 1999, 560 p.).
6. Belousov K. V., Lukashenko T. P. O nekotorykh svoistvakh ortorekursivnykh razlozhenii funktsii mnogikh peremennykh po sisteme kharakteristicheskikh funktsii brusov [On some properties autorecording expansions of functions of many variables by system characteristic functions beams]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern problems of mathematics and mechanics], 2011, vol. 6, no. 1, pp. 52–60 (in Russian).

УДК 517.538

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

И. И. Шарапудинов

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sharapud@mail.ru

В настоящей статье вводятся двумерные специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$. Показано, что эти ряды выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вблизи границы квадрата $[0, \pi]^2$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем суммы Фурье. Приводится оценка скорости сходимости частичных сумм специального ряда к функциям $f(x, y)$ из пространства четных 2π-периодических по каждой переменной непрерывных функций.

Ключевые слова: специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$, двумерные ряды, покусочная аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций(сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [1–9]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) $f = f(t)$ задана на достаточно длинном промежутке $[0, T]$ и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4, 6], обработкой временных рядов и изображений и других [5–7], в которых возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно