Variable Limit of Integration. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, iss. 1, pp. 99–102. DOI: 10.1023/B:MATN.0000036745.53704.08.

12. Sedletskii A. M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 129, iss. 6, pp. 4251–4408. DOI: 10.1007/s10958-005-0349-y.
13. Kurdyumov V. P., Khromov A. P. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii differentsial'no-raznostnogo operatora s mnogotochechnym kraevym usloviem [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential operator with multi-point difference boundary condition]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2004, iss. 6, pp. 80–82 (in Russian).
14. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. New York, Ungar, 1967; Moscow, Nauka, 1969.
15. Kurdyumov V. P. , Khromov A. P. O bazisakh Rissa iz sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii differentsial'no-raznostnogo operatora s integral'nymi kraevymi usloviiami [The Riesz bases consisting of eigen and associated functions for a differential-difference operator with integral boundary conditions]. *Matematika. Mekhanika : sb. nauchn. tr.* [Mathematics. Mechanics : a collection of scientific works], Saratov, Saratov Univ. Press, 2005, iss. 7, pp. 61–63 (in Russian).

УДК 517.927.25

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ И РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

И. С. Ломов

Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, lomov@cs.msu.su

Настоящий обзор содержит анализ результатов, полученных В. А. Ильиным и его учениками, по вопросу оценки скорости сходимости и равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье спектральных разложений функций по корневым функциям линейных обыкновенных дифференциальных операторов как самосопряженных, так и несамосопряженных, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Приведена первая теорема В. А. Ильина о равносходимости спектральных разложений для дифференциального оператора произвольного порядка. Формулируются теоремы о скорости равносходимости спектральных разложений сначала для произвольных самосопряженных расширений одномерного оператора Шредингера. При этом потенциал оператора может иметь любые особенности на границе интервала. Это позволяет получить новые результаты даже для всех классических ортогональных полиномов. Далее формулируются результаты для несамосопряженных операторов. Завершается обзор теоремой о скорости равносходимости для так называемых нагруженных дифференциальных операторов. Оценки скорости равносходимости разложений получены как на любом внутреннем компакте интервала, так и на всем интервале. Установлена зависимость оценки скорости равносходимости разложений на произвольном компакте основного интервала от расстояния этого компакта до границы интервала.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, собственные значения, спектральные разложения, скорость сходимости, формула среднего значения.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418

Светлой памяти моего Учителя
Владимира Александровича Ильина
п о с в я щ а е т с я

Тригонометрические ряды Фурье, их свойства, условия сходимости исследованы весьма подробно. Многие математики, изучая спектральные разложения функций, занимались вопросом о равносходимости разложений функций по собственным функциям операторов и в тригонометрический ряд

Фурье (например, В. А. Стеклов, Ж. Биркгоф, А. Хаар, Я. Д. Тамаркин, М. Стоун, А. Ч. Титчмарш, Б. М. Левитан, В. А. Ильин, А. П. Хромов, Г. В. Радзиевский).

Первая теорема В. А. Ильина, открывающая большой цикл его работ по спектральным свойствам несамосопряженных дифференциальных операторов, была посвящена равносходимости указанных разложений (1975 г.) [1]. Доказано, что при определенных условиях на функцию и оператор оба разложения сходятся или расходятся одновременно (в равномерной метрике на любом компакте основного интервала). И хотя в этой теореме нет оценки скорости равносходимости разложений, чему посвящен обзор, сформулируем этот исходный результат В. А. Ильина.

Рассмотрим оператор L, действующий в $\mathscr{L}^2(G)$, порожденный дифференциальной операцией:

$$Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) u^{(k)}, \quad x \in G, \quad n \in \mathbb{N},$$

где G — конечный интервал, полупрямая или прямая, $p_k(x) \in C^{k+1}$ на некотором подмножестве D основной области G, $k = \overline{0, n-2}$[1].

Пусть $\{u_k(x)\}$, $\{v_k(x)\}$ — некоторая биртогональная в $\mathscr{L}^2(G)$ система такая, что $u_k(x)$ являются на D регулярными решениями дифференциального уравнения для собственных или присоединенных функций оператора L, отвечающих собственным значениям λ_k, а $v_k(x)$ — аналогичные функции сопряженного оператора L^*, отвечающие собственным значениям $\overline{\lambda}_k$. Полнота $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ во всей области G, вообще говоря, не предполагается.

Вместо λ_k рассмотрим числа $\mu_k = ((-\lambda_k)(-1)^{n/2})^{1/n}$ при n четном, при n нечетном, $\mu_k = ((-i)\lambda_k)^{1/n}$ при $\operatorname{Im}\lambda_k \geqslant 0$ и $\mu_k = ((-\lambda_k)(-1)^{n/2})^{1/n}$ при $\operatorname{Im}\lambda_k < 0$ (выбор корня: $(re^{i\varphi})^{1/n} = r^{1/n}e^{i\varphi/n}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \frac{3\pi}{2}$).

Рассмотрим частичные суммы биортогональных рядов:

$$\sigma_\lambda(x,f) = \sum_{|\mu_k|<\lambda} (f, v_k) u_k(x), \quad \widehat{\sigma}_\lambda(x,f) = \sum_{|\mu_k|<\lambda} (f, u_k) v_k(x),$$

составленные для любого вещественного числа $\lambda > 0$ и для произвольной функции[2] $f(x) \in \overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^1(D)$. Эти суммы будут сравниваться с частичной суммой тригонометрического ряда Фурье, которая с точностью до слагаемого, равномерно стремящегося к нулю, равна

$$S_\lambda(x,f) = \frac{2}{\pi} \int_{x-R}^{x+R} \frac{\sin \lambda |x-y|}{|x-y|} f(y)\, dy,$$

где $R > 0$ — достаточно малое число.

Введем три определения.

Система $\{u_k\}$ образует на компакте $K \subset G$ *след базиса в* $\mathscr{L}^2$ *в слабом смысле*, если для любой $f(x) \in \overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^2(K)$ разложение $\sigma_\lambda(x,f)$ слабо сходится в $\mathscr{L}^2(K)$ к функции f при $\lambda \to \infty$, т.е. $\forall\ f, g \in \overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^2(K) : (\sigma_\lambda(x,f) - f, g) \to 0,\ \lambda \to \infty$.

Система $\{u_k\}$ образует *след базиса в* $\mathscr{L}^2$ *в слабом смысле на множестве* D, если она образует след базиса в $\mathscr{L}^2$ в слабом смысле на любом компакте $K \subset D$.

Система $\{u_k\}$ образует на D *след базиса Бесселя*, если для любого компакта $K \subset D$ найдется постоянная $C(K)$, что для любой функции $f \in \overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^2(K)$ справедливо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(f, u_k)|^2 \leqslant C(K)(f,f)$.

Обозначим через Π полосу $|\operatorname{Im} z| \leqslant b = \mathrm{const}$.

[1]Требование гладкости C^{k+1} для $p_k(x)$ наложено, во-первых, для существования сопряженной операции L^*, во-вторых, это связано с методом доказательства формулы среднего Е. И. Моисеева. Вывод этой формулы с условием $p_k(x) \in \mathscr{L}^1(G)$ содержится в работе [2]. Если не рассматривать разложение по системе $\{v_k\}$, приведенное ниже, то и в работе В. А. Ильина можно не вводить оператор L^* и ограничиться требованием $p_k \in \mathscr{L}^1$.

[2] $\overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^1(D)$ — класс всех функций из $\mathscr{L}^1(D)$, продолженных нулем за пределы D.

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть выполняются два условия: 1) $\mu_k \in \Pi$; 2) для любого $\lambda \geqslant 1$ равномерно относительно x на любом компакте $K \subset D$ справедливы оценки*

$$\sum_{|\mu_k-\lambda|\leqslant 1} |u_k(x)|^2 = O(1), \qquad \sum_{|\mu_k-\lambda|\leqslant 1} |v_k(x)|^2 = O(1).$$

Тогда для того чтобы для любой функции $f(x) \in \overset{\circ}{\mathscr{L}}{}^2(D)$ на любом компакте $K \subset D$ равномерно относительно x

$$\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f) \to 0, \quad \widehat{\sigma}_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f) \to 0, \quad \lambda \to \infty,$$

т. е. имеет место равномерная равносходимость разложений функции f, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из систем $\{u_k\}$ или $\{v_k\}$ образовывала в D след базиса в $\mathscr{L}^2$ в слабом смысле.

Условие 2) можно заменить на одно из следующих двух условий:

2.1) справедлива оценка $\mu_k = M \cdot k + O(1)$, $M = \mathrm{const}$;

2.2) каждая из систем $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ образует след базиса Бесселя.

Отметим, что для рассматриваемого оператора подходят все случаи регулярных (двухточечных) краевых условий. Доказанные утверждения впервые устанавливают локальный характер не только требований на разлагаемую функцию, но и требований на коэффициенты дифференциального оператора и функции биортогональной системы.

Насколько нам известно, вопрос об оценке близости частичных сумм рассматриваемых спектральных разложений функций был *впервые* рассмотрен В. А. Ильиным и И. Йо (1978 г.) [3]. Доказано, что для абсолютно непрерывной функции f разность частичных сумм двух спектральных разложений $\sigma_\lambda(x,f)$ и $S_\lambda(x,f)$, первое из которых отвечает произвольному неотрицательному расширению оператора $lu = -u'' + q(x)u$, а второе является разложением в тригонометрический ряд Фурье, имеет на любом компакте рассматриваемого интервала тот же порядок малости, что и последний член любого из этих разложений. При этом предполагалось лишь, что потенциал $q(x)$ принадлежит классу $\mathscr{L}^r, r > 1$, или $\mathscr{L}^2_{loc}$ на интервале $(0,1)$.

Сформулируем точные утверждения. Пусть на интервале $G = (0,1)$ задан формальный дифференциальный оператор:

$$lu = -u'' + q(x)u, \quad q(x) \in \mathscr{L}^1_{loc}(G). \tag{1}$$

Рассмотрим совершенно произвольное самосопряженное неотрицательное расширение L с точечным спектром оператора (1) (считаем, что потенциал $q(x)$ допускает такое расширение), через $\{u_n(x)\}$ обозначим полную ортонормированную систему собственных функций этого расширения, а через $\{\lambda_n\}$ — соответствующую систему неотрицательных собственных значений. Для любой абсолютно непрерывной на замкнутом интервале $\overline{G}$ функции $f(x)$ составим частичные суммы указанного разложения:

$$\sigma_\lambda(x,f) = \sum_{\sqrt{\lambda_n}<\lambda} f_n u_n(x), \qquad f_n = (f, u_n).$$

Через $S_\lambda(x,f)$ обозначим частичную сумму тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, рассматриваемого как ортогональное разложение функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L_0:

$$l_0 u(x) = u''(x), \qquad x \in G, \qquad u(0) = u(1), \qquad u'(0) = u'(1), \qquad u(x) \in C^2(\overline{G}).$$

Теорема 2 (см. [3]). *Если функция $f(x) \in A(\overline{G})$, т.е. функция f абсолютно непрерывна на $\overline{G}$, $q(x) \in \mathscr{L}^r(G)$, $r > 1$, тогда справедлива следующая оценка скорости равносходимости разложений*

$$\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{2}$$

равномерная относительно x на любом компакте K основного интервала G.

Оценка точна по порядку. Это, по-видимому, первая теорема об оценке близости частичных сумм разложений по собственным функциям и в тригонометрический ряд. Предшествовавшие авторы, изучавшие вопрос равносходимости указанных двух разложений (в правых частях у них стоит $o(1)$), использовали асимптотическое поведение собственных функций и собственных значений рассматриваемого оператора. Тем самым используемые в этих работах методы были привязаны к конкретному виду краевых условий. В работах В. А. Ильина (1975–1976 гг.) для установления равносходимости разложений впервые был применен метод, основанный лишь на использовании формулы среднего значения для оператора (1) и охватывающий случай произвольных краевых условий (даже и для несамосопряженных операторов).

В силу важности сформулированной теоремы для развития всего описываемого направления приведем основные этапы ее обоснования.

Для доказательства теоремы 2 получены следующие оценки (с некоторыми постоянными c):

$$|u_n(x)| \leqslant c, \qquad x \in \overline{G}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\lambda|\leqslant 1} 1 \leqslant c \quad (\forall \lambda > 0),$$

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_n}-\lambda|\leqslant 1} \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2} u_n(y)\,dy\Big|^2 \leqslant \frac{c}{\lambda^2}, \qquad x_1, x_2 \in \overline{G}, \qquad \forall\ \lambda \geqslant 1.$$

Для доказательства этих оценок и далее используется формула среднего значения для оператора (1):

$$\frac{u_n(x+t)+u_n(x-t)}{2} = u_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\int\limits_{x-t}^{x+t} q(\xi)u_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-t)\,dt,$$

$(x-t, x+t) \subset G$, $n = 1, 2, \ldots$ (*формула среднего значения Титчмарша*, получается интегрированием по частям после использования равенства $-u_n'' + q(x)u_n(x) = \lambda_n u_n(x)$ в интегральном слагаемом).

Обозначим через $\Theta(x, y, \lambda)$ спектральную функцию оператора L:

$$\Theta(x, y, \lambda) = \sum_{\sqrt{\lambda_n}<\lambda} u_n(x)u_n(y), \quad x, y \in \overline{G}.$$

Фиксируем любой отрезок $K = [a, b] \subset G$, произвольное число R_0, для которого $0 < 2R_0 < \varrho(K, \partial G)$. Пусть $R \in [R_0, 2R_0]$, введем вспомогательную функцию:

$$v_R(r, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\lambda r}{r}, & 0 \leqslant r \leqslant R, \\ 0, & r \geqslant R, \end{cases} \qquad \lambda > 0,$$

$r = |x-y|, x \in K, y \in G$ (срезка модифицированного ядра Дирихле). Эта функция усредняется по R:

$$S_{R_0}v_R = \frac{1}{R_0}\int\limits_{R_0}^{2R_0} v_R(r, \lambda)\,dR,$$

полученное выражение разлагается в ряд по системе $\{u_n(x)\}$ и устанавливается основная оценка:

$$\int\limits_0^s \left(S_{R_0}v_R(|x-y|, \lambda) - \Theta(x, y, \lambda)\right)\,dy = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad s \in \overline{G}, \qquad \lambda \geqslant 1.$$

Далее доказывается оценка теоремы 2 и доказывается окончательность оценки теоремы.

Теорема 3 (см. [3]). *Если функция $f(x) \in A(\overline{G})$и имеет на этом интервале компактный носитель, $q(x) \in \mathscr{L}^2_{loc}(G)$, тогда справедлива следующая оценка скорости равносходимости разложений:*

$$\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{3}$$

равномерня относительно x на любом компакте K основного интервала G.

Оценка точна по порядку.

Отметим, что теорема 3 охватывает случай собственных функций общего оператора Штурма – Лиувилля с весовым множителем $\varrho(x)$, т.е. случай собственных функций, удовлетворяющих уравнению $-[p(x)u']' = \lambda\varrho(x)u$, при условии, что $p(x), \varrho(x)$ два раза непрерывно дифференцируемы и строго положительны только на любом компакте интервала G, который в этом случае можно считать и бесконечным. Достаточно заметить, что в результате известной замены этот общий оператор приведется к оператору $-u''+q(x)u$ с потенциалом $q(x) \in \mathscr{L}^2_{\rm loc}(G)$. Это позволяет получить новые результаты для всех классических ортогональных полиномов (Чебышева, Якоби, Лежандра, Лагерра, Эрмита и др.).

Результат теоремы 3 перенесен В. Е. Волковым и И. Йо (1986 г.) [4] на несамосопряженный оператор Шредингера с комплекснозначным потенциалом из класса $\mathscr{L}^2_{loc}$, получена точная по порядку оценка (3). Результат теоремы 2 перенесен В. А. Ильиным (1991 г.) [5–8] и Е. И. Никольской (1992 г.) [9] на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного. Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на *любом компакте $K \subset G$*. Такие же локальные оценки, но в интегральной метрике, получены В. М. Курбановым [10] для широкого класса обыкновенных дифференциальных операторов.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям (либо не удовлетворять никаким краевым условиям без спектрального параметра, как системы экспонент), поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке $\overline{G}$ в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценки скорости равносходимости разложений или оценки порядка приближения функций спектральными разложениями, именно на всем G, причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Вслед за работами В. А. Ильина, автор получал оценки скорости равносходимости соответствующих разложений *на всем интервале G* в интегральной метрике $\mathscr{L}^p$.

Для функции ограниченной вариации для самосопряженного оператора оценка была получена в 1979 г. (подробнее см. [11]). Сформулируем основное утверждение. Объект исследования тот же, что в теоремах 2, 3, потенциал $q(x)$ в (1) из класса $\mathscr{L}^r(G), r > 1$. Фиксируем произвольное число $p \in [2, \infty)$ и пусть q (без аргумента) – сопряженное число: $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Теорема 4 (см. [11]). 1. *Пусть функция $f(x) \in V(G)$, т.е. имеет ограниченное изменение на отрезке $\overline{G}$. Тогда для любого числа $\lambda \geqslant 3$ справедлива оценка*

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\mathscr{L}^p(G)} \leqslant c\|f\|_{V(G)}\frac{\ln\lambda}{\lambda^{1/p}}.$$

Если при этом $f(0) = f(1)$, то

$$\|f - \sigma_\lambda(x, f)\|_{\mathscr{L}^2(G)} \leqslant c\|f\|_{V(G)}\frac{\ln\lambda}{\lambda^{1/2}}.$$

Постоянные в оценках не зависят от f и λ.

2. *Если $f(x) \in \mathscr{L}^1(G)$ и при некотором числе $\alpha \in (\frac{1}{q}, 1]$ имеет место оценка $|f_n| \leqslant c_1(\sqrt{\lambda_n})^{-\alpha}$ и такая же оценка имеет место для тригонометрических коэффициентов Фурье, то*

$$\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{\mathscr{L}^p(G)} \leqslant c_2\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\alpha-1/q}}.$$

Этот результат перенесен на несамосопряженный оператор Шредингера в 1995 г. и затем на оператор Штурма – Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в дифференциальной операции в 1996 г. [12–14]. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен в 2001 г. [15–17] и в 2010 г. — для операторов нечетного порядка [18]. В 2010 г. [19] установлена оценка зависимости скорости локальной равносходимости разложений от расстояния внутреннего компакта до границы интервала G. А. С. Марков (2012 г.) перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений, что завершило исследование вопроса для классических дифференциальных операций.

Кратко прокомментируем результаты для оператора четного порядка. В работах автора 1998–2005 гг. исследован вопрос о скорости сходимости в интегральной и равномерной метриках спектральных разложений функций по собственным и присоединенным (корневым) функциям регулярных дифференциальных операторов L второго и произвольного четного порядков, порожденных дифференциальной операцией:

$$lu(x) = u^{(2n)}(x) + \sum_{k=1}^{2n} p_k(x) u^{(2n-k)}(x), \qquad x \in G = (0,1), \qquad n \geqslant 1,$$

на множестве гладких функций $W_1^{2n}(G)$, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до $(2n-1)$-го порядка на отрезке $\overline{G} = [0,1]$. На коэффициенты накладывались условия

$$p_1(x) \in \mathscr{L}^s(G),\ s > 1, \qquad p_k(x) \in \mathscr{L}^1(G), \qquad k = 2, 3, \dots, 2n. \tag{4}$$

В качестве краевых форм в краевых условиях могли быть любые линейные непрерывные функционалы: ограничения на них накладывались в терминах условий на собственные значения и корневые функции оператора L (условия Ильина, см. ниже). В целом развивается спектральный метод В. А. Ильина. Сопряженный оператор L^*, структура которого может быть весьма громоздкой, для доказательства утверждений не привлекался. При этом система функций, биортогонально сопряженная с системой корневых функций оператора L, могла быть не связанной с сопряженным оператором. Полученные оценки здесь не выписываем — их можно получить из оценок следующей теоремы 5, если положить в них все числа r_j равными нулю.

Известно, что наличие у дифференциального оператора интегрального краевого условия с абсолютно непрерывной мерой Стилтьеса или наличие условий сопряжения в некоторых точках G, приводит к необходимости рассматривать так называемые нагруженные дифференциальные операции для сопряженных операторов. На такие операторы результаты об оценках скорости равносходимости разложений были перенесены в 2014 г. [20]. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Примеры. Предварим постановку задачи несколькими примерами, поясняющими причину нашего интереса к так называемым нагруженным операторам.

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\nu(x)$ — вещественные интегрируемые на отрезке $\overline{G}$ функции. Рассмотрим прямые и сопряженные к ним задачи (сопряженные операторы не вводим).

1. Оператор L:

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u(0) + \beta(x)u(1), \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача L^* (получаем интегрированием по частям, используя формулу Лагранжа, $v \in W_1^2(G)$):

$$l^*v(x) = v''(x),\ \int_0^1 \beta(x)v(x)\,dx - v'(1) = 0,\ \int_0^1 \alpha(x)v(x)\,dx + v'(0) = 0.$$

2. Обе задачи могут содержать интегральные краевые условия и, тем самым, обе операции l и l^* будут нагруженными.

Оператор L ($u \in W_1^2(G)$):

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u(0) + \beta(x)u(1),\ u'(0) = 0,\ u'(1) = \int_0^1 \gamma(x)u(x)\,dx;$$

сопряженная задача ($v \in W_1^2(G)$):

$$l^*v(x) = v''(x) + \gamma(x)v(1), \qquad \int_0^1 \beta(x)v(x)\,dx - v'(1) = 0, \qquad \int_0^1 \alpha(x)v(x)\,dx + v'(0) = 0.$$

3. «Нагруженные» слагаемые со значениями во внутренних точках интервала G в операции l могут быть связаны с наличием разрывов функций или их производных в области определения сопряженной задачи (или с условиями сопряжения во внутренних точках отрезка $\overline{G}$).

Оператор L:

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u\left(\frac{1}{2}\right), \qquad u(0) = u(1) = 0, \qquad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача:

$$l^*v(x) = v''(x), \qquad v(0) = v(1) = 0, \qquad v\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \qquad v'\left[\frac{1}{2}\right] + \int_0^1 \alpha(x)v(x)\,dx = 0,$$

где обозначено $v\left[\frac{1}{2}\right] = v\left(\frac{1}{2}+0\right) - v\left(\frac{1}{2}-0\right)$ — скачок функции $v(x)$ в точке $x = 1/2$. Область определения сопряженной задачи — кусочно-гладкие функции ($v \in C(\overline{G}) \cap \left[W_1^2(0,\frac{1}{2}) \cup W_1^2(\frac{1}{2},0)\right]$).

4. Очевидно, внутренних фиксированных точек в операции l может быть больше одной. Оператор L:

$$lu(x) = u''(x) + \alpha(x)u\left(\frac{1}{4}\right) + \beta(x)u\left(\frac{1}{2}\right) + u(1),$$

$$u(0) = \int_0^1 \gamma(x)u(x)\,dx, \quad u'(1) = \int_0^1 \nu(x)u(x)\,dx, \quad u \in W_1^2(G);$$

сопряженная задача:

$$l^*v = v''(x) + \gamma(x)v'(0) + \nu(x)v(1), \qquad v(0) = 0, \quad v'(1) = \int_0^1 v(x)\,dx,$$

$$v\left[\frac{1}{4}\right] = v\left[\frac{1}{2}\right] = 0, \qquad v'\left[\frac{1}{4}\right] + \int_0^1 \alpha(x)v(x)\,dx = 0, \qquad v'\left[\frac{1}{2}\right] + \int_0^1 \beta(x)v(x)\,dx = 0.$$

Задача рассматривается на множестве кусочно-гладких функций.

Имеется и пример оператора L, в котором дифференциальная операция l содержит проекции функции на счетное число точек.

Приведенные примеры показывают, что «локальные» дифференциальные операции (в которых все функции рассматриваются в одной точке x) не охватывают всех возможных случаев и результаты о сходимости биортогональных разложений функций следует перенести на «нелокальные», будем называть их «нагруженные», дифференциальные операторы. Если говорить о приложениях, то отметим, что такого типа операторы возникают, например, в теории фильтрации жидкостей (А. М. Нахушев, 2012) [21].

Постановка задачи. Пусть $T = \{\tau_l\}_{l=0}^{\infty}$ — произвольное разбиение отрезка $\overline{G}$, $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = 1$, $\tau_i \neq \tau_j$, при $i \neq j$, $i, j \geqslant 0$. Каждой точке $\tau_l \in T$, $l \geqslant 0$, поставим в соответствие функции $r_{jl}(x) \in \mathscr{L}^1(G)$, $j = 2, \ldots, 2n$. Пусть ряды $r_j(x) = \sum\limits_{l=0}^{\infty} |r_{jl}(x)|$, $j = 2, \ldots, 2n$, сходятся почти всюду на $\overline{G}$ и для функций $r_j(x)$ справедливо

$$r_j(x) \in \mathscr{L}^1(G), \qquad j = 2, 3, \ldots, 2n. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор L, порожденный дифференциальной операцией:

$$lu(x) = u^{(2n)}(x) + p_1(x)u^{(2n-1)}(x) + \sum_{j=2}^{2n}\left[p_j(x)u^{(2n-j)}(x) + \sum_{l=0}^{\infty} r_{jl}(x)u^{(2n-j)}(\tau_l)\right], \tag{6}$$

$x \in G$, $n \geqslant 1$, на множестве функций $D_{2n} = W_1^{2n}(G)$.

Собственные и присоединенные функции оператора L определим в обобщенном (по Ильину) смысле. Это позволит рассматривать для оператора L краевые условия любого вида (в том числе и интегральные, и содержащие спектральный параметр), либо рассматривать обычную систему экспонент (в этом случае все коэффициенты в (6) следует положить равными нулю).

Под *собственной функцией* оператора L, отвечающей значению $\lambda \in \mathbb{C}$ спектрального параметра, будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{\circ}{u}(x) \in D_{2n}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $l\overset{\circ}{u}(x) - \omega\lambda^{2n}\overset{\circ}{u}(x) = 0$, $\omega = (-1)^n$.

Под *присоединенной функцией* порядка m, $m = 1, 2, \dots, m_0$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x) \in D_{2n}$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $l\overset{m}{u}(x) - \omega\lambda^{2n}\overset{m}{u}(x) = \mu_0 \overset{m-1}{u}(x)$. Здесь либо $\mu_0 = 1$ (задача 1), либо $\mu_0 = \nu_0\lambda^{2n-1}$ при $|\lambda| \geqslant 1$, $\mu_0 = \nu_0$ при $|\lambda| < 1, \nu_0 = \mathrm{const} \neq 0$ (задача 2). Будем считать, что спектральный параметр

$$\lambda \in S = \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0,\ \arg\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right], \exists\ \gamma_0 > 0 : |\,\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant \gamma_0\right\}.$$

Фиксируем некоторые числа $r \in [1, \infty)$ и $\gamma_0 > 0$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k(x)\}$ корневых функций оператора L, отвечающую спектральным параметрам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие следующим трем *условиям Ильина (условия А)*:

1) система $\{u_k(x)\}$ замкнута и минимальна в пространстве $\mathscr{L}^r(G)$;

2) найдется постоянная $c_1 > 0$ такая, что

$$\lambda_k \in S, \qquad \sum_{0\leqslant|\lambda_k|-\lambda\leqslant 1} 1 \leqslant c_1, \qquad \forall\ \lambda \geqslant 0;$$

3) найдется постоянная $c_2 > 0$ такая, что

$$\|u_k\|_r \cdot \|v_k\|_{r'} \leqslant c_2, \qquad \forall\ k,$$

где $\{v_k(x)\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k(x)\}$ система функций: $v_k \in \mathscr{L}^{r'}(G)$, $(u_k, v_j) = \delta_{kj}$, $\forall\ k, j \in \mathbb{N}$, $\|\cdot\|_r$ — обозначение нормы в пространстве $\mathscr{L}^r(G)$, $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. Будем также обозначать $\|f\|_{r,E}$ норму функции $f(x)$ в пространстве $\mathscr{L}^r(E), E \neq G$, $r \in [1, \infty)$.

Заметим, что для проверки второго и третьего условий А достаточно знать главные члены асимптотик для величин λ_k, u_k, v_k.

Присоединенные функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива «антиаприорная» оценка:

$$\|\overset{m-1}{u_k}\|_r \leqslant c\alpha_\lambda \|\overset{m}{u_k}\|_r, \qquad c = \mathrm{const} > 0, \qquad m = 1, 2, \dots, m_k, \tag{7}$$

c не зависит от λ_k, $\alpha_\lambda = |\lambda_k|^{2n-1}$ для задачи 1, $\alpha_\lambda = 1$ для задачи 2. Для оператора второго порядка ($n = 1$) эта оценка всегда выполняется при выполнении условия $|\,\mathrm{Im}\,\lambda_k| \leqslant \gamma_0$; для $n > 1$ такую систему всегда можно построить.

Пусть, кроме того,

$$\|u_k\|_\infty \leqslant c\|u_k\|_r, \qquad \forall\ k, \qquad c = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Для $n = 1$ эта оценка также всегда верна при выписанных условиях; для $n > 1$ это условие означает, что корневые функции содержат осциллирующие составляющие $\exp(\pm i\lambda_k x)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_k \neq 0$.

Для произвольной функции $f(x) \in \mathscr{L}^r(G)$ составим частичные суммы $\sigma_\lambda(x, f)$ биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}$.

Положим далее, что системы $\{u_k(x), v_k(x)\}$ и функция $f(x) \in \mathscr{L}^r(G)$ таковы, что с некоторой постоянной $\nu > 0$ выполняется условие

$$\hat{f}_k = f_k \cdot \|v_k\|_{r'}^{-1} = O(|\lambda_k|^{-\nu}), \qquad |\lambda_k| \geqslant 1. \tag{9}$$

Предполагаем, что для оператора L_0 в последнем условии показатель $\nu_0 \geqslant \nu$, т. е. тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют асимптотическому соотношению (при этом нормирующий множитель можно убрать, так как тригонометрическая система является почти нормированной в $\mathscr{L}^{r'}(G)$).

В терминах только функции $f(x)$ это условие записать нельзя (в отличие от тригонометрической системы функций).

Для произвольного отрезка $K \subset G$ обозначим $\eta = \varrho(K, \partial G) > 0$ — расстояние до границы интервала G.

Зафиксируем произвольное число $p \in [1, \infty)$. Основная задача состоит в получении оценки малости при $\lambda \to +\infty$ для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K}$ для произвольного отрезка $K \subset G$ и для величины $\|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_p$. Из этих оценок будет следовать, в частности, что оба разложения сходятся или расходятся в метрике $\mathscr{L}^p$ одновременно. Из установленных оценок следует, что на скорость равносходимости разложений влияют следующие характеристики задачи: гладкость разлагаемой функции $f(x)$, наличие коэффициентов $p_k(x)$, $k \geqslant 1$, в операции l, наличие бесконечного числа присоединенных функций в системе $\{u_k\}$, гладкость коэффициента $p_1(x)$, в частности, степень его суммируемости s, свойства функций $v_k(x)$, структура краевых условий рассматриваемой задачи, параметр η. Здесь мы выясним характер зависимости оценок скорости равносходимости σ_λ и S_λ от коэффициентов $r_{jl}(x)$ операции l.

Основная теорема. Сформулируем основной результат.

Теорема 5 (см. [20]). *Пусть для оператора L и функции $f(x)$ выполняются перечисленные условия* (4), (5), (7)–(9) *и условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ и любого отрезка $K \subset G$ справедливы следующие оценки:*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \leqslant \frac{c}{\eta}\Big[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right) + \|p_1\|_s \max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\right) + \\ + \sum_{j=2}^{2n}(\|p_j\|_1 + \|r_j\|_1)\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}}, \frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\right) + \frac{n_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big] \tag{10}$$

и аналогичная оценка на всем отрезке $\overline{G}$

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_p \leqslant c\left[\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}}, \frac{\ln^{1/\delta}\lambda}{\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\delta}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\|p_1\|_s}{\lambda^{1/s'}} + \sum_{j=2}^{2n}(\|p_j\|_1 + \|r_j\|_1)\max\left(\frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{\ln\lambda}{\lambda}\right) + \frac{n_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right], \tag{11}$$

где $\delta = \min(2, q, s), q = p/(p-1)$, постоянные $c > 0$ в оценках (10), (11) *не зависят от λ, число $n_0 = 1$, если общее число присоединенных функций в системе $\{u_k(x)\}$ бесконечно, и $n_0 = 0$, в противном случае.*

Замечание. Мы не упрощали правых частей оценок (10), (11) для того чтобы было ясно, какие параметры задачи и каким образом влияют на итоговую оценку скорости равносходимости. Так, из (10) следует, что наличие в дифференциальной операции (6) коэффициентов p_j, r_{jl} с номерами j, большими или равными двух, и наличие в системе корневых функций бесконечного числа присоединенных функций, никак не влияют на итоговую оценку.

Как следствие, из второй оценки теоремы 5 имеем

Следствие. *Пусть $f(x) \in V(G)$ — функция с ограниченным на $\overline{G}$ изменением, $p, s \geqslant 2, \nu = 1$, выполняются условия* (4), (5), (7), (8) *и условия A. Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедливо соотношение*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - f(x)\|_p \leqslant \frac{c}{\lambda^{1/p}}, \tag{12}$$

что совпадает с точной оценкой скорости сходимости тригонометрических рядов Фурье для функций с ограниченным изменением.

Приведем пример нагруженного дифференциального оператора второго порядка, для которого выполняются все условия теоремы 5 [22].

Пример. Оператор L:

$$lu(x) = u''(x) - u(0)\cos(\pi x), \quad x \in G, \quad u'(0) = u'(1) = 0, \quad u \in W_1^2(G).$$

Из теоремы 5 получим следующее утверждение для этого примера.

Утверждение. *Пусть выполняется условие* (9) *на коэффициенты Фурье с некоторым показателем* ν. *Тогда справедливы оценки*

$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_{p,K} \leqslant \frac{c}{\eta}\max\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\right),$$
$$\|\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)\|_p \leqslant c\max\left(\frac{\ln\lambda}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^{1/p}}, \frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}}\right),$$

$\delta = \min(2,q,s)$. *Если* $f(x) \in V(G)$, *то* $\nu = 1$ *в* (9) *и при* $p, s \geqslant 2$ *справедлива оценка* (12) *скорости сходимости биортогонального разложения к функции* $f(x)$.

Развить метод В. А. Ильина для получения оценок скорости равносходимости разложений на всем интервале G позволило применение следующего аппарата.

1. Использование теоремы Рисса (обобщающую теорему Рисса – Фишера на пространства $\mathscr{L}^p$) для ортонормированных систем в случае самосопряженных операторов и обобщение этой теоремы [12] на биортогональные системы для несамосопряженных операторов; применение условия (9).

2. Кроме указанной ранее срезки $v_R(r,\lambda)$, используются «смещенные» ядра Дирихле. Выберем произвольный отрезок $K_1 = [a,b] \subset G$, положим $t = (b-a)/4$. «Смещенные» ядра используются для получения оценок разности $\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)$ в приграничной зоне — на отрезках $[0,a]$ и $[b,1]$. Рассмотрим случай отрезка $[0,a]$, второй случай исследуется по той же схеме.

Итак, пусть $x \in [0,a]$. Положим $x = z - t$, тогда $z \in K = [t, a+t] \subset G$. Выберем произвольное число $R_0 \in (0, t/2)$ и рассмотрим новую переменную $R \in [R_0/2, R_0]$. Введем вспомогательные функции:

$$v_{1\lambda}(\varrho_1, R) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda\varrho_1}{\pi\varrho_1}, & \varrho_1 \in [0,R],\ \varrho_1 = z + t - y,\ z \in K,\ y \in \overline{G}, \\ 0, & \varrho_1 < 0,\ \varrho_1 > R, \end{cases}$$
$$v_{2\lambda}(\varrho_2, R) = \begin{cases} \dfrac{\sin\lambda\varrho_2}{\pi\varrho_2}, & \varrho_2 \in [-R,0],\ \varrho_2 = z - t - y, \\ 0, & \varrho_2 < -R,\ \varrho_2 > 0, \end{cases}$$

и рассмотрим функцию $v_0(z,y) = 2S_0[v_{1\lambda}(\varrho_1,R) + v_{2\lambda}(\varrho_2,R)]$, $z \in K$, $y \in \overline{G}$, где $S_0[\cdot]$ — операция усреднения. Функция $v_0(x,y)$ разлагается в биортогональный ряд и сравнивается со спектральной функцией оператора.

3. Для оператора второго порядка использовалась формула среднего Титчмарша, а для операторов высокого порядка — обобщение локальной формулы среднего Е. И. Моисеева [2].

В настоящее время метод распространяется на операторы, определенные на множестве негладких функций. Оценки скорости равносходимости получены и для другого вида асимптотик коэффициентов Фурье (9) — в правой части могут стоять логарифмы [23].

В заключение отметим, что оценки скорости локальной равносходимости биортогональных разложений функций с их тригонометрическими рядами Фурье для различных дифференциальных операторов получали Киевские математики [24] и Саратовские математики — представители крупной научной школы А. П. Хромова (см. обзоры [25, 26]). В настоящее время этот вопрос исследуется для операторов Штурма – Лиувилля с сингулярными потенциалами представителями крупной научной школы А. Г. Костюченко и А. А. Шкаликова – И. В. Садовничей [27], А. М. Савчуком и их учениками.

Вопрос о равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье рассматривается также для интегральных и интегродифференциальных операторов. Приведем в этой связи основополагающую статью А. П. Хромова [28]. В работе приведен обзор результатов, а также доказывается теорема о равносходимости для специального интегродифференциального оператора с интегральными краевыми условиями. Показано, что интегральные, дифференциальные и интегродифференциальные операторы можно свести к такого рода интегродифференциальному оператору. Таким образом, теорема о равносходимости Я. Д. Тамаркина для дифференциальных операторов обобщена на все перечисленные виды операторов.

Отметим недавние работы А. П. Хромова, также основополагающие, по обоснованию метода Фурье решения широкого класса смешанных задач для нестационарных уравнений (см., напр., [29, 30]. В этих работах, используя идеи академика А. Н. Крылова, проводится обоснование метода Фурье при минимальных требованиях на исходные данные задачи.

Автор выражает искреннюю признательность А. П. Хромову за внимание к этому обзору и полезные обсуждения результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12472-офи-м).

Библиографический список

1. *Ильин В. А.* О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // ДАН СССР. 1975. Т. 223, № 3. С. 548–551.
2. *Ломов И. С.* Формула среднего значения Е. И. Моисеева для обыкновенных дифференциальных операторов четного порядка с негладкими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 8. С. 1046–1057.
3. *Ильин В. А., Йо И.* Оценка разности частичных сумм разложений, отвечающих двум произвольным неотрицательным самосопряженным расширениям двух операторов типа Штурма – Лиувилля, для абсолютно непрерывной функции // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 7. С. 1175–1193.
4. *Волков В. Е., Йо И.* Оценка разности частичных сумм спектральных разложений, отвечающих двум операторам Шредингера // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 11. С. 1865–1876.
5. *Ильин В. А.* Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса $\mathscr{L}^1$ // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 577–597.
6. *Ильин В. А.* Покомпонентная равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым вектор-функциям оператора Шредингера с матричным неэрмитовым потенциалом, все элементы которого только суммируемы // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1862–1879.
7. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. М. : Наука, 1991. 368 с.
8. *Ильин В. А.* Избранные труды : в 2 т. Т. 2. М. : МАКС Пресс, 2008. 692 с.
9. *Никольская Е. И.* Оценка разности между частичными суммами разложений абсолютно непрерывной функции по корневым функциям, отвечающим двум одномерным операторам Шредингера с комплексными потенциалами из класса $\mathscr{L}^1$ // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 4. С. 598–612.
10. *Курбанов В. М.* О скорости равносходимости спектральных разложений // ДАН. 1999. Т. 365, № 4. С. 444–449.
11. *Ломов И. С.* О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма – Лиувилля в интегральной метрике // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 9. С. 1480–1493.
12. *Ломов И. С.* Коэффициентные условия сходимости в $L_p(0,1)$ биортогональных разложений функций // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 31–39.
13. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. I // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 5. С. 619–628.
14. *Ломов И. С.* О влиянии степени суммируемости коэффициентов дифференциальных операторов на скорость равносходимости спектральных разложений. II // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1066–1077.
15. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 3. С. 328–342.

16. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. II // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 648–660.
17. *Ломов И. С.* Сходимость биортогональных разложений функций на отрезке для дифференциальных операторов высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 5. С. 632–646.
18. *Афонин С. В., Ломов И. С.* О сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами нечетного порядка с негладкими коэффициентами // ДАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 151–153.
19. *Ломов И. С.* Зависимость оценок скорости локальной сходимости спектральных разложений от расстояния внутреннего компакта до границы // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1409–1420.
20. *Ломов И. С.* Нагруженные дифференциальные операторы : сходимость спектральных разложений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1077–1086.
21. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 232 с.
22. *Ломов И. С., Чернов В. В.* Исследование спектральных свойств одного нагруженного дифференциального оператора второго порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 861–865.
23. *Ломов И. С., Марков А. С.* Оценки скорости локальной сходимости спектральных разложений дифференциальных операторов четного порядка // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 5. С. 557–563.
24. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // ДАН. 1991. Т. 316, № 2. С. 265–270.
25. *Хромов А. П.* Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1691–1696.
26. *Minkin A. M.* Equiconvergence theorems for differential operators // J. Math. Sci. 1999. Vol. 96, № 6. P. 3631–3715. DOI: 10.1007/BF02172664.
27. *Садовничая И. В.* Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма – Лиувилля с потенциалами-распределениями // ДАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 162–163.
28. *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.
29. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье // ДАН. 2014. Т. 458, № 2. С. 138–140. DOI: 10.7868/S0869565214260041.
30. *Хромов А. П.* О классическом решении одной смешанной задачи для волнового уравнения // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 56–66.

Estimates of Speed of Convergence and Equiconvergence of Spectral Decomposition of Ordinary Differential Operators

I. S. Lomov

Lomov Igor Sergeevich, Moscow State University, Lenin mountains, 119992, Moscow, Russia, lomov@cs.msu.su

The present review contains results of V. A. Il'in and his pupils concerning an assessment of speed of convergence and equiconvergence with a trigonometrical series of Fourier of spectral decomposition of functions on root functions of linear ordinary differential operators both self-conjugate, and not self-conjugate, set on a final piece of a numerical straight line. The first theorem of V. A. Ilyin of equiconvergence of spectral decomposition for the differential operator of any order is provided. Theorems of the speed of equiconvergence of spectral decomposition at first for any self-conjugate expansions of the one-dimensional operator Schrodinger are formulated. Thus the potential of the operator can have any features on interval border. This allows us to receive new results even for all classical orthogonal polynomials. Further results for not self-conjugate operators are formulated. The review for the so-called loaded differential operators comes to the end with the theorem of equiconvergence speed. Estimates of speed of equiconvergence of decomposition are received both on any internal compact of an interval, and on the whole interval. Dependence of an assessment of speed of equiconvergence of decomposition on any compact of the main interval from distance of this compact to interval border is established.

Key words: ordinary differential operator, eigenvalues, spectral decomposition, convergence speed, formula of average value.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 13-01-12472).

References

1. Il'in V. A. The uniform equiconvergence of expansions in the eigen- and associated functions of a nonselfadjoint ordinary differential operator and in a trigonometric Fourier series. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 223, no. 3, pp. 548–551.
2. Lomov I. S. A Moiseev mean formula for even-order differential operators with nonsmooth coefficints. *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 8, pp. 1054–1066.
3. l'in V. A., Joo I. Estimation of the difference of partial sums of expansions corresponding to two arbitrary nonnegative selfadjoint extensions of two operators of Sturm – Liouville. *Differential Equations*, 1979, vol. 15, no. 7, pp. 1175–1193.
4. Volkov V. E., Joo I. Assessment of a difference of the partial sums spectral the decomposition answering to two operators of Schrodinger. *Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 11, pp. 1865–1876.
5. Il'in V. A. Equiconvergence with a trigonometric series of expansions in root functions of the Schrodinger operator with an arbitrary summable complex-valued potential. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 4, pp. 577–597.
6. Il'in V. A. Pokomponentny equiconvergence with the trigonometrical series of decomposition on root vector functions of the operator Schrodinger with matrix non-Hermitian potential, which all elements only are summarized. *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 11, pp. 1862–1879.
7. Il'in V. A. *Spektralnaya teoriya differentsialnykh operatorov. Samosopryazhennye differentsialnye operatory* [Spectral theory of differential operators. Selfadjoint differential operators]. Moscow, Nauka, 1991, 368 p. (in Russian).
8. Il'in V. A. *Izbrannye trudy. Vol. 2.* [Chosen works]. Moscow, MAKS Press, 2008, 692 p. (in Russian).
9. Nikol'skaya E. I. Difference assessment between the partial sums decomposition of absolutely continuous function on root functions, to the answering two one-dimensional operators of Schrodinger with the complex potentials from class $\mathscr{L}^1$ are summarized. *Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 598–612.
10. Kurbanov V. M. About the speed of equiconvergence of spectral decompositions. *Soviet Math. Dokl.*, 1999, vol. 365, no. 4. pp. 444–449.
11. Lomov I. S. On speed of equiconvergence of Fourier series on eigenfunctions of operators of Storm – Liouville in the integral metrics. *Differential Equitions*, 1982, vol. 18, no. 9, pp. 1480–1483.
12. Lomov I. S. A coefficient condition for the convergence of biorthogonal expansions of functions in $\mathscr{L}^p(0,1)$. *Differential Equitions*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 29–38.
13. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. I. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 5, pp. 621–630. DOI: 0012-2661/98/3405-0621.
14. Lomov I. S. The influence of the integrability degree of coefficients of differential operators on the equiconvergence rate of spectral expansions. II. *Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 8, pp. 1070–1081. DOI: 0012-2661/98/3408-1070.
15. Lomov I. S. The local convergence of biorthogonal series related to differential operators with nonsmooth coefficients. I. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 351–366. DOI: 10.1023/A:1019242515472.
16. Lomov I. S. The local convergence of biorthogonal series related to differential operators with nonsmooth coefficients. II. *Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 5, pp. 680–694. DOI: 10.1023/A:1019268615898.
17. Lomov I. S. Convergence of biorthogonal expansions of functions on an interval for higher-order differential operators. *Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 660–676. DOI: 10.1007/S10625-005-0201-7.
18. Afonin S. B., Lomov I. S. On the convergence of biorthogonal series related to odd-order differential operators with nonsmooth coefficients. *Doklady Math.*, 2010, vol. 81, no. 2, pp. 190–192. DOI: 10.1134/S1064562410020079.
19. Lomov I. S. Dependence of estimates of the local convergence rate of special expansions on the distance from an interior compact set to the boundary. *Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 10, pp. 1415–1426. DOI: 10.1134/S0012266110100058.
20. Lomov I. S. Loaded differential operators : convergence of spectral expansions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1070–1079. DOI: 10.1134/S0012266114080060.
21. Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie* [The loaded equations and their application]. Moscow, Nauka, 2012, 232 p. (in Russian).
22. Lomov I. S., Chernov V. V. Study of spectral properties of a loaded second-order differential operator. Differential Equitions, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 861–865. DOI: 10.1134/S0012266115070046.
23. Lomov I. S., Markov A.S. Estimates of the local convergence rate of spectral expansions for even-order differential operators. Differential Equitions, 2013, vol. 49, no. 15, pp. 529–535. DOI: 10.1134/S0012266113050017.
24. Gomilko A. M., Radzievskyi G.V. Equiconvergence of ranks on eigenfunctions of the ordinary functional and differential operators. *Soviet Math. Dokl.*, 1991, vol. 316, no. 2. pp. 265–270.

25. Khromov A. P. The spectral analysis of differential operators on final interval. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1691–1696.
26. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 3631–3715. DOI: 10.1007/BF02172664.
27. Sadovnichaya I. V. Equiconvergence theorems in Sobolev and Hölder spaces of eigenfunction expansions for Sturm – Liouville operators with singular potentials. *Doklady Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 169–170. DOI: 10.1134/S1064562411020128.
28. Khromov A. P. Theorems of equiconvergence for integro-differential and integral operators. *Sb. Math.*, 1981, vol. 114 (156), no. 3, pp. 378–405.
29. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Rezolventny approach in the Fourier method. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076.
30. Khromov A. P. About the classical solution of the mixed problem for the wave equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 56–66 (in Russian).

УДК 517.51

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ПО УПОРЯДОЧЕННОЙ H-ВАРИАЦИИ

В. В. Новиков

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественных и математических наук, Энгельсский технологический институт (филиал), Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., vvnovikov@yandex.ru

В 1972 г. Д. Ватерман ввел класс функций ограниченной Λ-вариации (в частности, гармонической или H-вариации). Позднее им же были введены классы функций ограниченной упорядоченной Λ-вариации и функций, непрерывных по Λ-вариации. Эти классы успешно применялись рядом авторов в исследованиях по сходимости и суммируемости рядов Фурье. В настоящей статье изучается поведение интерполяционных операторов Лагранжа на классе функций, непрерывных по упорядоченной гармонической вариации. Показано, что для функции $f \in C_{2\pi}$, непрерывной на $[-\pi, \pi]$ по упорядоченной H-вариации, тригонометрический интерполяционный процесс Лагранжа $\{L_n(f, x)\}$ с равноотстоящими узлами сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$.

Ключевые слова: обобщенная вариация, упорядоченная гармоническая вариация, интерполяция Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422

ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

Говорят, что f есть *функция ограниченной Λ-вариации* (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$V(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_{k} \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем системам Π непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Определение 2. Функция f называется *функцией ограниченной упорядоченной Λ-вариации* (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если

$$\tilde{V}(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_{k} \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (1) таких, что $I_k < I_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно, правее, чем I_{k+1}).