This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 14-01-00417) *and by the Grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools* (*project no.* НШ-1096.2014.1).

References

1. Saks S. *Teoriia integrala* [Theory of the integral]. Moscow, Faktorial Press, 2004, 496 p. (in Russian).
2. Stein I. *Singuliarnye integraly i differentsial'nye svoistva funktsii* [Singular integrals and differential properties of functions]. Moscow, Mir, 1973, 342 p. (in Russian).
3. Lukashenko T. P., Skvortsov V. A., Solodov A. P. *Obobshchennye integraly* [Generalized integrals]. Moscow, Knizhnyi dom «LIBROKOM», 2010, 280 p. (in Russian).
4. Natanson I. P. *Teoriia funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable]. S.-Peterburg, Lan', 2008. 560 p. (in Russian).
5. Kashin B. S., Saakyan A. A. *Orthogonal series*. Translations of Math. Monographs, vol. 75, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1989. (Rus. ed.: Kashin B. S., Saakian A. A. *Ortogonal'nye riady*. Moscow, AFC, 1999, 560 p.).
6. Belousov K. V., Lukashenko T. P. O nekotorykh svoistvakh ortorekursivnykh razlozhenii funktsii mnogikh peremennykh po sisteme kharakteristicheskikh funktsii brusov [On some properties autorecording expansions of functions of many variables by system characteristic functions beams]. *Sovremennye problemy matematiki i mekhaniki* [Modern problems of mathematics and mechanics], 2011, vol. 6, no. 1, pp. 52–60 (in Russian).

УДК 517.538

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}$ И ИХ АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА

И. И. Шарапудинов

Доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sharapud@mail.ru

В настоящей статье вводятся двумерные специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$. Показано, что эти ряды выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вблизи границы квадрата $[0,\pi]^2$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем суммы Фурье. Приводится оценка скорости сходимости частичных сумм специального ряда к функциям $f(x,y)$ из пространства четных 2π-периодических по каждой переменной непрерывных функций.

Ключевые слова: специальные ряды по системе $\{\sin x \sin kx\}$, двумерные ряды, покусочная аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций(сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [1–9]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) $f = f(t)$ задана на достаточно длинном промежутке $[0,T]$ и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4, 6], обработкой временных рядов и изображений и других [5–7], в которых возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно исходный временный ряд (изображение) функцией, полученной в результате «пристыковки» функций, аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка» возникают нежелательные разрывы (артефакты) (см. [8]), которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения «кусков» исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. В работах автора [1, 2] введены некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби, частичные суммы $\sigma_n^\alpha(f,x)$ которых на концах отрезка $[-1,1]$ совпадают с исходной функцией $f(x)$, т.е. $\sigma_n^\alpha(f,\pm 1) = f(\pm 1)$. В качестве одного из частных случаев таких рядов возникает ряд вида

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin\theta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin k\theta, \tag{1}$$

где

$$a_\Phi(\theta) = \frac{\Phi(0)+\Phi(\pi)}{2} + \frac{\Phi(0)-\Phi(\pi)}{2}\cos\theta, \qquad \varphi(\theta) = \Phi(\theta) - a_\Phi(\theta), \qquad \varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\tau)\frac{\sin k\tau}{\sin\tau}d\tau.$$

В работе [2] исследованы, в частности, аппроксимативные свойства ряда (1) в пространстве $C_{2\pi}^e$, состоящем из четных непрерывных 2π — периодических функций.

В настоящей статье мы введем двумерные ряды вида (1) и рассмотрим некоторые свойства частичных сумм этих рядов. Пусть $f(x,y)$ — четная 2π — периодическая по каждой из переменных x и y и интегрируемая на квадрате $[0,\pi]^2$ функция, которая в точках $(i\pi, j\pi)$, $i,j\in\mathbb{Z}$ принимает конечные значения. Положим

$$S(f) = S(f)(u,v) = f(u,v) - \frac{f(0,v)+f(\pi,v)}{2} - \frac{f(0,v)-f(\pi,v)}{2}\cos u, \tag{2}$$

$$H(f) = H(f)(u,v) = f(u,v) - \frac{f(u,0)+f(u,\pi)}{2} - \frac{f(u,0)-f(u,\pi)}{2}\cos v, \tag{3}$$

$$O(f) = O(f)(u,v) = S(u,v) - \frac{S(u,0)+S(u,\pi)}{2} - \frac{S(u,0)-S(u,\pi)}{2}\cos v, \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\Theta(f) = \Theta(f)(u,v) = \frac{f(0,0)-f(0,\pi)-f(\pi,0)+f(\pi,\pi)}{4}\cos u\cos v+ \\ +\frac{f(0,0)+f(0,\pi)-f(\pi,0)-f(\pi,\pi)}{4}\cos u + \frac{f(0,0)-f(0,\pi)+f(\pi,0)-f(\pi,\pi)}{4}\cos v+ \\ +\frac{f(0,0)+f(0,\pi)+f(\pi,0)+f(\pi,\pi)}{4}\end{gathered} \tag{5}$$

и заметим, что

$$f(x,y) = \Theta(f)(x,y) + O(f)(x,y) + A(f)(x) + B(f)(x)\cos y + c(f)(y) + D(f)(y)\cos x,$$

где

$$A(f)(u) = \frac{S(f)(u,0)+S(f)(u,\pi)}{2}, \qquad B(f)(u) = \frac{S(f)(u,0)-S(f)(u,\pi)}{2},$$

$$C(f)(u) = \frac{H(f)(0,v)+H(f)(\pi,v)}{2}, \qquad D(f)(u) = \frac{H(f)(0,v)-H(f)(\pi,v)}{2}.$$

Определим следующие коэффициенты:

$$o_{k,l}(f) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi O(f)(u,v)\frac{\sin ku\sin lv}{\sin u\sin v}\,du\,dv,$$

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi A(f)(u)\frac{\sin ku}{\sin u}du, \qquad b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi B(f)(u)\frac{\sin ku}{\sin u}\,du,$$

$$c_l(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi C(f)(u)\frac{\sin lv}{\sin v}\,dv, \qquad d_l(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi D(f)(u)\frac{\sin lv}{\sin v}\,dv,$$

и рассмотрим ряды:

$$O(f)(x,y) \sim \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} o_{k,l}(f)\sin kx \sin ly,$$

$$A(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\sin kx, \qquad B(f)(x) \sim \sin x \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\sin kx,$$

$$C(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} c_l(f)\sin ly, \qquad D(f)(y) \sim \sin y \sum_{l=1}^{\infty} d_l(f)\sin ly.$$

Тогда мы можем сопоставить функции $f(x,y)$ следующий специальный ряд:

$$f(x,y) \sim \Theta(f)(x,y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} o_{k,l}(f)\sin kx \sin ly +$$
$$+\sin x \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f) + b_k(f)\cos y)\sin kx + \sin y \sum_{l=1}^{\infty}(c_l(f) + d_l(f)\cos x)\sin ly. \tag{6}$$

Ряд (6) будем называть двумерным специальным рядом по системе $\{\sin x \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$. В настоящей работе исследованы аппроксимативные свойства таких рядов. Показано, что специальные ряды вида (6) выгодно отличаются от двумерных косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вида

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f) = S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x,y) = \Theta(f)(x,y) + \sin x \sin y \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1} o_{k,l}(f)\sin kx \sin ly +$$
$$+\sin x \sum_{k=1}^{\nu-1}(a_k(f) + b_k(f)\cos y)\sin kx + \sin y \sum_{l=1}^{\mu-1}(c_l(f) + d_l(f)\cos x)\sin ly \tag{7}$$

вблизи границы квадрата $[0,\pi]^2$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами, чем суммы Фурье вида

$$S_{n,m}(f)(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} a_{k,l}(f)\cos kx \cos ly. \tag{8}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, сопоставить оценку для функции Лебега $L_{n,m}^{\nu,\mu}(x,y)$ частичных сумм $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x,y)$ вида (7) , полученную в настоящей работе, с хорошо известной оценкой функции Лебега сумм Фурье $S_{n,m}(f)(x,y)$ вида (8).

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}$

Прежде всего покажем, что частичная сумма $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ специального ряда (6) вида (7) является проектором на подпространство четных тригонометрических полиномов вида

$$T_{n,m}^{\nu,\mu}(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} p_{k,l}\cos kx \cos ly + \sum_{k=n+1}^{\nu}(p_{k,0} + p_{k,1}\cos y)\cos kx +$$
$$+\sum_{l=m+1}^{\mu}(p_{0,l} + p_{1,l}\cos x)\cos ly, \tag{9}$$

т. е. если $f(x,y) = T_{n,m}^{\nu,\mu}(x,y)$, то

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f) \equiv T_{n,m}^{\nu,\mu}(x,y). \tag{10}$$

Поскольку $S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)$ – линейный оператор, то тождество (10) будет доказано, если мы покажем, что оно верно для $f(x,y) = \cos kx \cos ly$ с $(k,l) \in G_{n,m}^{\nu,\mu}$, где

$$G_{n,m}^{\nu,\mu} = \{(k,l) : 0 \leqslant k \leqslant n, 0 \leqslant l \leqslant m\} \cup \{(k,l) : 0 \leqslant k \leqslant 1, \mu - m + 1 \leqslant l \leqslant \mu\} \cup$$
$$\cup \{(k,l) : 0 \leqslant \nu - n + 1 \leqslant l \leqslant \nu, 0 \leqslant l \leqslant 1\}.$$

Пусть, например, k, l — четные, $0 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant l \leqslant m$. Положим $k = 2i$, $l = 2j$. Тогда из (2)–(5) для $f(x, y) = \cos kx \cos ly$ имеем:

$$S(f)(x,y) = \cos ly(\cos kx - 1), \qquad H(f)(x,y) = \cos kx(\cos ly - 1), \tag{11}$$

$$A(f)(x) = \frac{S(f)(x,0) + S(f)(x,\pi)}{2} = \cos kx - 1, \qquad B(f)(x) = 0, \tag{12}$$

$$B(f)(y) = \frac{H(f)(0,y) + H(f)(\pi,y)}{2} = \cos ly - 1, \qquad D(f)(y) = 0, \tag{13}$$

$$O(f)(x,y) = (\cos kx - 1)(\cos ly - 1), \qquad \Theta(x,y) = 1. \tag{14}$$

Из (11)–(14) находим

$$f(x,y) = \cos kx \cos ly = 1 + O(f)(x,y) + A(f)(x) + C(f)(y), \tag{15}$$

причем

$$\frac{A(f)(x)}{\sin x} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \sin jx, \qquad \frac{C(f)(y)}{\sin y} = \sum_{i=1}^{l-1} \beta_i \sin iy, \tag{16}$$

$$\frac{O(f)(x,y)}{\sin x \sin y} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_j \beta_i \sin jx \sin iy, \tag{17}$$

где

$$\alpha_j = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi A(f)(t) \frac{\sin jt}{\sin t} dt = a_j(f), \qquad \beta_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C(f)(t) \frac{\sin it}{\sin t}\, dt = c_i(f), \tag{18}$$

$$\alpha_j \beta_i = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi O(f)(u,v) \frac{\sin ju \sin iv}{\sin u \sin v}\, du\, dv = o_{ij}. \tag{19}$$

Кроме того,

$$b_j(f) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant k-1), \qquad d_i = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant l-1). \tag{20}$$

Из (15)–(20) получаем:

$$f(x,y) = \cos kx \cos ly = \Theta(x,y) + O_{k,l}(f)(x,y) + A_k(f)(x) + C_l(f)(y) = S_{k,l}^{k,l}(f)(x,y).$$

Тем самым мы доказали, что тождество (10) справедливо для $T_{k,l}^{\nu,\mu}(x,y) = \cos kx \cos ly$ в том случае, когда $\nu = k$, $\mu = l$, k, l — четные. Его справедливость в остальных случаях $(k,l) \in G_{n,m}^{\nu,\mu}$ проверяется аналогично.

Заметим, что если функция $f(x,y)$ обращается в нуль в точках множества $P = \{(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)\}$, то $\Theta(x,y) \equiv 0$ и, как следствие, равенство (7) принимает следующий вид:

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x,y) = \sin x \sin y \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} o_{k,l}(f) \sin kx \sin ly + \sin x \sum_{k=1}^{\nu-1} (a_k(f) + b_k(f) \cos y) \sin kx +$$
$$+ \sin y \sum_{l=1}^{\mu-1} (c_l(f) + d_l(f) \cos x) \sin ly. \tag{21}$$

Полагая $R_n(t,s) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sin kt \sin ks$, мы получаем из (21) следующее интегральное представление:

$$S_{n,m}^{\nu,\mu}(f)(x,y) = \frac{4 \sin x \sin y}{\pi^2} \int\limits_0^\pi \int\limits_0^\pi O(f)(u,v) \frac{R_n(x,u) R_m(y,v)}{\sin u \sin v}\, du\, dv +$$
$$+ \frac{2 \sin x}{\pi} \int_0^\pi [A(f)(u) + B(f)(u) \cos y] \frac{R_\nu(x,u)}{\sin u} du +$$

$$+\frac{2\sin y}{\pi}\int_0^\pi [C(f)(v)+D(f)(v)\cos x]\frac{R_\mu(y,v)}{\sin v}\,dv. \tag{22}$$

Перейдем к вопросу об аппроксимативных свойствах частичных сумм $S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)$. Прежде всего заметим, что если $T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)$ — тригонометрический полином вида (9), то в силу (10) имеет место равенство

$$f(x,y)-S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)=f(x,y)-T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)+T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)-S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)=$$
$$=f(x,y)-T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)+S^{\nu,\mu}_{n,m}(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(x,y). \tag{23}$$

Если, кроме того, полином $T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)$ вида (9) совпадает с $f(x,y)$ при $(x,y)\in P$, то из (22) следует, что

$$S^{\nu,\mu}_{n,m}(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(x,y)=\frac{4\sin x\sin y}{\pi^2}\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi O(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u,v)\frac{R_n(x,u)R_m(y,v)}{\sin u\sin v}\,du\,dv+$$
$$+\frac{2\sin x}{\pi}\int_0^\pi [A(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u)+B(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u)\cos y]\frac{R_\nu(x,u)}{\sin u}du+$$
$$+\frac{2\sin y}{\pi}\int_0^\pi [C(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(v)+D(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(v)\cos x]\frac{R_\mu(y,v)}{\sin v}dv. \tag{24}$$

Обозначим через $C^{2e}_{2\pi}$ пространство четных 2π-периодических по каждой из переменных x и y и непрерывных функций $f=f(x,y)$, для которых определена норма $\|f\|=\max_{x,y)\in\mathbb{R}^2}$, $\mathscr{T}^{\nu,\mu}_{n,m}(f)$ — пространство тригонометрических полиномов вида (9), совпадающих с $f(x,y)$ при $(x,y)\in P$. Тогда в силу (22)–(24) имеем:

$$|S(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u,v)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|,\qquad |H(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u,v)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\| \tag{25}$$

и, как следствие,

$$|O(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)(u,v)|\leqslant 9\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|. \tag{26}$$

Аналогично

$$|A(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|,\qquad |B(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|, \tag{27}$$
$$|C(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|,\qquad |D(T^{\nu,\mu}_{n,m}-f)|\leqslant 3\|T^{\nu,\mu}_{n,m}-f\|. \tag{28}$$

Пусть $\tilde E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)=\inf\limits_{T^{\nu,\mu}_{n,m}\in\mathscr{T}^{\nu,\mu}_{n,m}(f)}\|f-T^{\nu,\mu}_{n,m}\|$ — наилучшее приближение функции $f\in C^{2e}_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами $T^{\nu,\mu}_{n,m}=T^{\nu,\mu}_{n,m}(x,y)\in\mathscr{T}^{\nu,\mu}_{n,m}(f)$. Из (25) и (26) с учетом (25)–(28) получаем:

$$|f(x,y)-S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)|\leqslant \tilde E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)[1+9\Lambda_n(x)\Lambda_m(y)+6\Lambda_\nu(x)+6\Lambda_\mu(y)], \tag{29}$$

где

$$\Lambda_s(t)=|\sin t|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{|R_s(t,u)|}{\sin u}du=|\sin t|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\sum_{k=1}^{s-1}\frac{\sin kt\sin ku}{\sin u}\right|du.$$

Далее, пусть $E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)$ — наилучшее приближение функции $f\in C^{2e}_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами $T^{\nu,\mu}_{n,m}$ вида (9), не обязательно совпадающими с $f(x,y)$ в точках множества P. Тогда не трудно заметить, что

$$E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)\leqslant\tilde E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)\leqslant 2E^{\nu,\mu}_{n,m}. \tag{30}$$

Сопоставляя (30) с (29), мы можем записать

$$|f(x,y)-S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)|\leqslant 2E^{\nu,\mu}_{n,m}(f)[1+9\Lambda_n(x)\Lambda_m(y)+6\Lambda_\nu(x)+6\Lambda_\mu(y)]. \tag{31}$$

В связи с оценками (29) и (31) возникает задача об исследовании поведения величины $\Lambda_n(t)$ при $n\to\infty$ и $-1\leqslant t\leqslant 1$. Эта задача была решена в работе автора [2], в которой получена следующая оценка:

$$\Lambda_n(t)\leqslant c(1+\ln(1+n|\sin t|)). \tag{32}$$

С учетом (32) из (31) мы выводим следующий результат:

Теорема. *Имеет место оценка*

$$|f(x,y) - S^{\nu,\mu}_{n,m}(f)(x,y)| \leqslant cE^{\nu,\mu}_{n,m}(f)[1 + \ln(1 + n|\sin x|)\ln(1 + m|\sin y|) + \\ + \ln(1 + \nu|\sin x|) + \ln(1 + \mu|\sin y|)].$$

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295–309. DOI: 10.4213/mzm10292.
2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
3. *Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф.* Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М. : Машиностроение, 1999.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М. : Наука, 1983. 384 с.
5. *Арушанян О. Б., Волченскова Н. И., Залеткин С. Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 273–283.
6. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab. Fhiladelphia : SIAM, 2000.
7. *Trefethen L. N.* Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996.
8. *Mukundan R., Ramakrishnan K. R.* Moment functions in image analysis. Theory and Applications. Singapore : World Scientific, 1998.
9. *Malvar H. S.* Signal processing with lapped transforms. Boston ; London : Artech House, 1992.

Some Special Two-dimensional Series of $\{\sin x \sin kx\}$ System and Their Approximation Properties

I. I. Sharapudinov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, sharapudinov@mail.ru

In present paper there were introduced two-dimensional special series of the system $\{\sin x \sin kx\}$. It's shown that these series have the advantage over two-dimensional cosine Fourier series, because they have better approximation properties near the bounds of the square $[0,1]^2$. It's given convergence speed estimate of special series partial sums to functions $f(x,y)$ from the space of even 2π-periodic continuous functions.

Key words: special series of system $\{\sin x \sin kx\}$, two-dimensional series, piecewise approximation.

References

1. Sharapudinov I. I. Limit Ultraspherical Series and Their Approximation Properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
2. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. Izv. Math., 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
3. Dedus F. F., Mahortyh S. A., Ustinin M. N., Dedus A. F. *Obobshchennyi spektral'no-analiticheskii metod obrabotki informatsionnykh massivov. Zadachi analiza izobrazhenii i raspoznavaniia obrazov* [Generalized spectral and analytic method of data arrays processing. Problems of image analysis and pattern recognition]. Moscow, Mashinostroenie, 1999 (in Russian).
4. Pashkovskiy S. Numerical applications of polynomials and Tchebychev series [Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva]. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
5. Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., Zaletkin S. F. On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2011, vol. 8, pp. 273–283 (in Russian).
6. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Fhiladelphia, SIAM, 2000.
7. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996.
8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment functions in image analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998.
9. Malvar H. S. *Signal processing with lapped transforms*. Boston ; London, Artech House, 1992.