УДК 517.538

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СО СВОЙСТВОМ ПРИЛИПАНИЯ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ $\{\sin x \sin kx\}$ И СИСТЕМЫ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЁВА ВТОРОГО РОДА

И. И. Шарапудинов[1], **Г. Г. Акниев**[2]

[1]Доктор физико-математических наук, заведующий отделом математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, sharapud@mail.ru

[2]Инженер-исследователь отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, hasan.akniyev@gmail.com

В настоящей статье вводятся дискретные ряды со свойством «прилипания» для периодического (по системе $\{\sin x \sin kx\}$) и непереодического (по системе полиномов Чебышёва второго рода $U_k(x)$) случаев. Показано, что дискретные ряды со свойством прилипания по системе $\{\sin x \sin kx\}$ выгодно отличаются от косинус-рядов Фурье тем, что их частичные суммы вблизи границ отрезка $[0, \pi]$ обладают значительно лучшими аппроксимативными свойствами. Аналогично, дискретные ряды со свойством прилипания по системе $U_k(x)$ вблизи границ отрезка $[-1, 1]$ приближают исходную функцию значительно лучше, чем суммы Фурье по полиномам Чебышёва первого рода.

Ключевые слова: теория приближений, ряды Фурье, специальные ряды, покусочная аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Представление функций в виде рядов по тем или иным ортонормированным системам с целью последующего их приближения частичными суммами выбранного ортогонального ряда является, пожалуй, одним из самых часто применяемых подходов в теории приближений и ее приложениях. Наряду с задачами математической физики, для решения которых указанный подход является традиционным, появились и продолжают появляться все новые важные задачи, для решения которых также все чаще применяются методы, основанные на представлении функций (сигналов) в виде рядов по подходящим ортонормированным системам (см., например, [1–8]). При этом часто возникает такая ситуация, когда функция (сигнал, временной ряд, изображение и т. д.) $f = f(t)$ задана на достаточно длинном промежутке $[0, T]$ и нам требуется разбить этот промежуток на части $[a_j, a_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \dots, m)$, рассмотреть отдельные фрагменты функции, определенные на этих частичных отрезках, представить их в виде рядов по выбранной ортонормированной системе и аппроксимировать каждый такой фрагмент частичными суммами соответствующего ряда. Такая ситуация является типичной для задач, связанных с решением нелинейных дифференциальных уравнений численно-аналитическими методами [4, 6], обработкой временных рядов и изображений и других [5–7], в которых возникает необходимость разбить заданный ряд данных на части, аппроксимировать каждую часть и заменить приближенно исходный временной ряд (изображение) функцией, полученной в результате «пристыковки» функций, аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка» возникают нежелательные разрывы (артефакты) (см. [8]), которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Такая картина непременно возникает при использовании для приближения «кусков» исходной функции сумм Фурье по классическим ортонормированным системам. В работах [1], [2] введены некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам Якоби, частичные суммы $\sigma_n^\alpha(f, x)$ которых на концах отрезка $[-1, 1]$ совпадают с исходной функцией $f(x)$, т. е. $\sigma_n^\alpha(f, \pm 1) = f(\pm 1)$. В качестве одного из частных случаев таких рядов возникает ряд вида

$$\Phi(\theta) = a_\Phi(\theta) + \sin\theta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin k\theta,$$

где

$$a_\Phi(\theta) = \frac{\Phi(0) + \Phi(\pi)}{2} + \frac{\Phi(0) - \Phi(\pi)}{2}\cos\theta, \qquad \varphi(\theta) = \Phi(\theta) - a_\Phi(\theta), \qquad \varphi_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\tau)\frac{\sin k\tau}{\sin\tau}\, d\tau.$$

В работе [2] исследованы, в частности, аппроксимативные свойства этого ряда в пространстве $C^e_{2\pi}$, состоящем из четных непрерывных 2π-периодических функций. В настоящей работе рассматриваются дискретные аналоги таких рядов и исследованы их аппроксимативные свойства.

Для натурального N рассмотрим сетку узлов $\Lambda^I_N = \left\{ t_j = \dfrac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j=-N}^{N-1}$. Через $l_2(\Lambda^I_N)$ обозначим евклидово пространство дискретных функций $f = f(x)$ вида $f\colon \Lambda^I_N \to \mathbb{R}$, в котором определено скалярное произведение:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=-N}^{N-1} f(t_j)g(t_j).$$

Не трудно проверить, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos x,\ \sin x, \ldots, \cos(N-1)x,\ \sin(N-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin Nx$$

образуют в $l_2(\Lambda^I_N)$ полную ортонормированную систему и, как следствие, для произвольного $f \in l_2(\Lambda^I_N)$ имеем представление

$$f(x) = \frac{a_{0,N}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} a_{k,N}\cos kx + b_{k,N}\sin kx + \frac{b_{N,N}}{2}\sin Nx, \tag{1}$$

где

$$a_{k,N} = \frac{1}{N}\sum_{j=-N+1}^{N-1} f(t_j)\cos kt_j, \qquad b_{k,N} = \frac{1}{N}\sum_{j=-N+1}^{N-1} f(t_j)\sin kt_j. \tag{2}$$

Если функция $f(x) \in l_2(\Lambda^I_N)$ является четной, то из (2) следует, что $b_{k,N} = 0$ $(k = 1, \ldots, N)$, поэтому равенство (1) принимает вид

$$f(x) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \hat{f}_k \cos kx, \tag{3}$$

где

$$\hat{f}_k = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)\cos kt_j, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Отображение $\mathfrak{F}^I_N : l_2(\Lambda^I_N) \to \mathbb{R}^N$, сопоставляющее функции $f \in l_2(\Lambda^I_N)$ вектор $\mathfrak{F}_N = (\hat{f}_0, \ldots, \hat{f}_{N-1})$ и называемое дискретным косинус-преобразованием Фурье, находит многочисленные применения в различных областях приложений, в таких, например, как обработка изображений и временных рядов и др. В приложениях, как правило, вместо полного разложения (3) используют приближенное равенство

$$f(x) \approx \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \hat{f}_{k_\nu}\cos k_\nu x, \qquad n \le N-1, \tag{4}$$

по следующей схеме. Заданный «длинный» ряд данных разбивается на части, аппроксимируется каждая часть, используя равенство (4). После этого заменяется приближенно исходный ряд функцией, полученной в результате «пристыковки» функций (правых частей равенств вида (4)), аппроксимирующих отдельные части. Но тогда в местах «стыка», как правило возникают нежелательные разрывы, которые искажают общий вид временного ряда (изображения). Указанные разрывы в точках стыка возникают из-за того, что суммы, фигурирующие в правых частях в приближенных равенствах вида (4), заметно отклоняются от исходной функции $f(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = \pi$.

В настоящей работе рассмотрена задача о конструировании аппроксимирующих операторов $\sigma_{n,N}(f) = \sigma_{n,N}(f,x)$, обладающих тем важным свойством, что в окрестностях точек $x = 0$ и $x = \pi$ $\sigma_{n,N}(f,x)$ приближают $f(x)$ значительно лучше, чем на всем отрезке $[0,\pi]$. Кроме того, требуется, чтобы $\sigma_{n,N}(f,x)$ приближали функцию $f(x)$ на всем $[0,\pi]$ не хуже, чем частичные суммы конечного ряда (3) вида

$$S_{n,N}(f,x) = \frac{\hat{f}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \hat{f}_k \cos kx. \tag{5}$$

Наконец, $\sigma_{n,N}(f,x)$ $(0 \le n \le N)$ должен допускать численную реализацию со скоростью, сопоставимой со скоростью численной реализации $S_{n,N}(f,x)$, использующей быстрое преобразование Фурье.

Как будет показано далее, операторы $\sigma_{n,N}(f,x)$, сконструированные в настоящей работе обладают указанными свойствами. Среди отмеченных свойств операторов $\sigma_{n,N}(f,x)$ мы особо выделяем первое, согласно которому $\sigma_{n,N}(f,x)$ приближает $f(x)$ в окрестности точек $x=0$ и $x=\pi$ значительно лучше, чем по всей сетке Λ_N^I. Это свойство операторов $\sigma_{n,N}(f,x)$ мы будем называть свойством «прилипания» ($\sigma_{n,N}(f,x)$ «прилипает» к $f(x)$ в окрестностях точек $x=0$ и $x=\pi$).

Именно свойство прилипания операторов $\sigma_{n,N}(f,x)$ в точках $x=0$ и $x=\pi$ существенно и выгодно отличает их от операторов Фурье (5). Наряду с $\Lambda_N^I = \left\{t_j = \dfrac{(2j+1)\pi}{2N}\right\}_{j=-N}^{N-1}$ мы будем рассматривать также сетку $\Lambda_N^{II} = \left\{\dfrac{j\pi}{N}\right\}_{j=-N}^{N-1}$ и соответствующее пространство $l_2(\Lambda_N^{II})$. Для $f \in l_2(\Lambda_N^{II})$ мы рассмотрим операторы, сконструированные по той же схеме, что и $\sigma_{n,N}(f,x)$, и исследуем их аппроксимативные свойства.

1. ДИСКРЕТНЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СИСТЕМЕ $\{\sin x \sin kx\}_{k=1}^N$ НА СЕТКАХ $\Omega_N^I = \left\{\dfrac{(2j+1)\pi}{2N}\right\}_{j=0}^{N-1}$ И $\Omega_N^{II} = \left\{\dfrac{j\pi}{N}\right\}_{j=1}^{N-1}$

Пусть N — натуральное число, $t_j = \dfrac{(2j+1)\pi}{2N}$, $\Omega_N^I = \{t_j\}_{j=0}^{N-1}$. Через $l_2(\Omega_N^I)$ обозначим евклидово пространство дискретных функций $g=g(x)$ вида $g\colon \Omega_N^I \to \mathbb{R}$, в котором для $f,g \in l_2(\Omega_N^I)$ определено скалярное произведение:

$$\langle f,g\rangle_I = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)g(t_j). \tag{6}$$

Заметим, что функцию $f(x) \in l_2(\Omega_N^I)$ можно продолжить на сетку Λ_N^I, полагая $f(-t_{j-1}) = f(t_j)$ для всех $t_j \in \Omega_N^I$. Не трудно проверить, что функции

$$\sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \sin Nx$$

образуют в $l_2(\Omega_N^I)$ ортогональную систему относительно скалярного произведения (6), также при $1 \le k,\ n \le N$ имеют место равенства

$$\frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \sin kt_j \sin nt_j = \begin{cases} 0, & k \ne n, \\ 1, & k = n < N, \\ 2, & k = n = N. \end{cases} \tag{7}$$

Из свойства (7) следует, что система $\{\sin kx\}_{k=1}^N$ является ортогональным базисом в $l_2(\Omega_N^I)$, и, следовательно, произвольная дискретная функция $\varphi \in l_2(\Omega_N^I)$ допустит представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \sin kx, \qquad x \in \Omega_N^I, \tag{8}$$

где

$$\varphi_k = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(t_j)\sin kt_j \cdot \begin{cases} 2/N, & k < N, \\ 1/N, & k = N. \end{cases}$$

Рассмотрим сетку Ω_N^I, добавив в нее две точки: $t_{-1} = 0$ и $t_N = \pi$, и обозначим $\overline{\Omega}_N^I = \Omega_N^I \cup \{0,\pi\}$. Пусть дискретная функция f определена на новой сетке $\overline{\Omega}_N^I$, т. е. $f : \overline{\Omega}_N^I \to \mathbb{R}$. Положим

$$a_f(x) = \frac{f(0)+f(\pi)}{2} + \frac{f(0)-f(\pi)}{2}\cos x, \tag{9}$$

$$g(x) = f(x) - a_f(x), \qquad \varphi(x) = \frac{g(x)}{\sin x}, \qquad x \in \Omega_N^I.$$

Тогда ряд (8) принимает следующий вид:

$$\frac{g(x)}{\sin x} = \sum_{k=1}^{N} g_{k,N} \sin kx, \qquad x \in \Omega_N^I, \tag{10}$$

где

$$g_{k,N} = \sum_{j=0}^{N-1} g(t_j) \frac{\sin kt_j}{\sin t_j} \cdot \begin{cases} 2/N, & k < N, \\ 1/N, & k = N. \end{cases}$$

Ввиду (9) ряд (10) можно переписать еще так

$$f(x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^{N} g_{k,N} \sin kx, \qquad x \in \overline{\Omega}_N^I. \tag{11}$$

Обозначим через $\sigma_{n,N}(f,x)$ частичную сумму ряда (11) следующего вида:

$$\sigma_{n,N}(f) = \sigma_{n,N}(f,x) = a_f(x) + \sin x \sum_{k=1}^{n-1} g_{k,N} \sin kx, \qquad k, n \le N. \tag{12}$$

Не трудно показать, что для произвольного четного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n \le N$ справедливо тождество

$$\sigma_{n,N}(T_n, x) \equiv T_n(x), \tag{13}$$

другими словами, $\sigma_{n,N}(f)$ является проектором на подпространство четных тригонометрических полиномов порядка n.

Мы можем трактовать $\sigma_{n,N}(f)$ как линейный оператор, действующий в различных функциональных пространствах. С этой целью введем некоторые обозначения. Пусть

$$\omega_N^I = \left\{ \frac{(2j+1)\pi}{2N} \right\}_{j \in \mathbb{Z}}, \qquad \mathbb{Z}_\pi = \{j\pi\}_{j \in \mathbb{Z}}, \qquad \overline{\omega}_N^I = \omega_N^I \cup \mathbb{Z}_\pi.$$

Тогда функцию $f = f(x)$, заданную на конечной сетке $\overline{\Omega}_N^I$, можно продолжить на бесконечную сетку $\overline{\omega}_N^I$ так, чтобы продолженная функция на $\overline{\omega}_N^I$ была четной и 2π-периодической, т. е. при $x \in \overline{\omega}_N^I$ $f(-x) = f(x)$ и $f(x + 2\pi) = f(x)$. Множество $C^e(\overline{\omega}_N^I)$ всех таких дискретных функций $f(x)$ является нормированным в пространстве с нормой $\|f\|_N = \max_{x \in \overline{\omega}_N^I} |f(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}_N^I} |f(x)|$. Через $E_{n,N}^\pi(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in C^e(\overline{\omega}_N^I)$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n, удовлетворяющими условиям $f(0) = T_n(0)$, $f(\pi) = T_n(\pi)$. Пусть $T_n(f) = T_n(f,x)$ — тригонометрический полином порядка n, удовлетворяющий условиям $f(0) = T_n(f,0)$, $f(\pi) = T_n(f,\pi)$, для которого

$$E_{n,N}^\pi(f) = \|f - T_n(f)\|_N. \tag{14}$$

Далее, с учетом (13) имеем:

$$f(x) - \sigma_{n,N}(f,x) = f(x) - T_n(f,x) + T_n(f,x) - \sigma_{n,N}(f,x) = f(x) - T_n(f,x) + \sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x).$$

Отсюда и из (14) находим

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f,x)| \le E_{n,N}^\pi(f) + |\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x)|. \tag{15}$$

Теперь обратимся к равенству (12), из которого в силу того что $f(0) = T_n(0)$, $f(\pi) = T_n(\pi)$,

$$\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x) = \sin x \sum_{k=1}^{n-1} (T_n(f) - f)_{k,N} \sin kx, \tag{16}$$

где

$$(T_n(f) - f)_{k,N} = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Big[T_n(f,t_j) - f(t_j) \Big] \frac{\sin kt_j}{\sin t_j}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получим:

$$\sigma_{n,N}(T_n - f, x) = \sin x \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Big[T_n(f, t_j) - f(t_j) \Big] \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j}. \tag{18}$$

Поэтому в силу (14)

$$|\sigma_{n,N}(T_n(f) - f, x)| \le E^{\pi}_{n,N}(f) \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j} \right|.$$

Из (15) и (18) имеем:

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f, x)| \le E^{\pi}_{n,N}(f)(1 + L^{\pi}_{n,N}(x)), \tag{19}$$

где

$$L^{\pi}_{n,N}(x) = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left| \sin x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin kt_j}{\sin t_j} \right|. \tag{20}$$

В связи с неравенством (19) возникает задача об оценке величины $L^{\pi}_{n,N}(x)$ при $x \in \overline{\Omega}_N$ Аналогичная задача возникает и в случае, если рассмотреть $\sigma_{n,N}(f)$ как оператор, действующий в пространстве $C^e_{2\pi}$, состоящем из четных 2π-периодических непрерывных функций $f(x)$, для которых норма определяется обычным образом, а именно $\|f\| = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. В этом случае аналог неравенства (19) имеет вид

$$|f(x) - \sigma_{n,N}(f, x)| \le E_n(f)(1 + L^{\pi}_{n,N}(x)),$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in C^e_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n. Требуется оценить величину $L^{\pi}_{n,N}(x)$, определенную равенством (20) для произвольного $x \in \mathbb{R}$.

Перейдем к сетке $\Omega^{II}_N = \{j\pi/N\}_{j=1}^{N-1}$. Через $l_2(\Omega^{II}_N)$ мы обозначим евклидово пространство дискретных функций $f(x)$ вида $f : \Omega^{II}_N \to \mathbb{R}$, в котором скалярное произведение определено с помощью равенства

$$\langle f, g \rangle_{II} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} f\left(\frac{j\pi}{N}\right) g\left(\frac{j\pi}{N}\right).$$

Полную ортонормированную систему в $l_2(\Omega^{II}_N)$ образуют функции

$$\sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \sin(N-1)x,$$

т. е.

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \sin k\frac{j\pi}{N} \sin n\frac{j\pi}{N} = \delta_{kn} = \begin{cases} 0, & k \ne n, \\ 1, & k = n. \end{cases} \tag{21}$$

Из (21) следует, что произвольная функция $\psi \in l_2(\Omega^{II}_N)$ допускает представление

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \psi_k \sin kx, x \in \Omega^{II}_N, \tag{22}$$

где

$$\psi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \psi\left(\frac{j\pi}{N}\right) \sin \frac{kj\pi}{N}. \tag{23}$$

Пусть теперь $f(x)$ произвольная функция из $l_2(\Omega^{II}_N)$, которую доопределим в точках $x = 0$ и $x = \pi$. Положим

$$a_f(x) = \frac{f(0) + f(\pi)}{2} + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \cos x, \qquad h(x) = f(x) - a_f(x), \tag{24}$$

и заметим, что $h(0) = h(\pi) = 0$. Для функции $\psi(x) = \dfrac{h(x)}{\sin x}$ коэффициенты из (23) принимают следующий вид:

$$\psi_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h\left(\frac{j\pi}{N}\right) - a_f\left(\frac{j\pi}{N}\right)}{\sin \frac{j\pi}{N}} \sin \frac{kj\pi}{N} = \hat{h}_k. \tag{25}$$

Из (22)–(25) выводим

$$f(x)=a_f(x)+\sin x\sum_{k=1}^{N-1}\hat{h}_k\sin kx,\qquad x\in\left\{\frac{j\pi}{N}\right\}_{j=0}^{N}. \tag{26}$$

Обозначим через $\tau_{n,N}(f,x)$ частичную сумму ряда (26) следующего вида:

$$\tau_{n,N}(f,x)=a_f(x)+\sin x\sum_{k=1}^{n-1}\hat{h}_k\sin kx,\qquad 1\le n\le N-1.$$

Можно показать, что для произвольного четного тригонометрического полинома $T_n(x)$ порядка $n\le N-1$ имеет место тождество

$$\tau_{n,N}(T_n,x)\equiv T_n(x). \tag{27}$$

Дискретную функцию $f(x)$, заданную на конечной сетке $\{j\pi/N\}_{j=0}^{N}$, мы продолжим на бесконечную сетку $\mathbb{Z}_{\pi/N}=\{j\pi/N\}_{j=-\infty}^{\infty}$ так, чтобы продолженная функция была четной и 2π-периодической при $x\in\mathbb{Z}_{\pi/N}$, т. е. $x\in\mathbb{Z}_{\pi/N}$, $f(-x)=f(x)$ и $f(x+2\pi)=f(x)$. Множество всех таких функций мы обозначим $C^e(\mathbb{Z}_{\pi/N})$, которое мы превратим в нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{\pi/N}=\max_{x\in\mathbb{Z}_{\pi/N}}|f(x)|.$$

Через $E_{n,N/\pi}$ обозначим наилучшее приближение функции $f\in C^e(\mathbb{Z}_{n,N/\pi})$ тригонометрическими полиномами $T_n(x)$ порядка n, удовлетворяющих условиям $f(0)=T_n(0)$, $f(\pi)=T_n(\pi)$. Пусть $T_n(f)=T_n(f,x)$ — тригонометрический полином порядка n, удовлетворяющий условиям $f(0)=T_n(f,0)$, $f(\pi)=T_n(f,\pi)$, для которого

$$E_{n,\pi/N}(f)=\|f-T_n(f)\|_{\pi/N}. \tag{28}$$

Тогда в силу (27) $f(x)-\tau_{n,N}(f,x)=f(x)-T_n(f,x)+\tau_{n,N}(T_n(f)-f,x)$, а отсюда и из (28) находим

$$|f(x)-\tau_{n,N}(f,x)|\le E_{n,\pi/N}(f)+|\tau_{n,N}(T_n(f)-f,x)|.$$

Далее, из (25) и (26) имеем:

$$\tau_{n,N}(T_n(f)-f,x)=\sin x\sum_{j=1}^{n-1}(T_n(f)-f)_k\sin kx, \tag{29}$$

где

$$(T_n(f)-f)_k=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\left[T_n\left(f,\frac{j\pi}{N}\right)-f\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right]\frac{\sin\frac{jk\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) находим

$$\tau_{n,N}(T_n(f)-f,x)=\frac{2\sin x}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\Big[T_n\left(f,\frac{j\pi}{N}\right)-f\left(\frac{j\pi}{N}\right)\Big]\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx\sin\frac{jk\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}.$$

Отсюда и из (29) имеем:

$$|\tau_{n,N}(T_n(f)-f,x)|\le E_{n,\pi/N}(f)\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sin x\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx\sin\frac{jk\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}\right|. \tag{31}$$

Сопоставляя (29) с (31), получаем:

$$|f(x)-\tau_{n,N}(f,x)|\le E_{n,\pi/N}(f)(1+L_{n,\pi/N}(x)),$$

где

$$L_{n,\pi/N}(x)=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\sin x\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx\sin\frac{jk\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}\right|. \tag{32}$$

Отсюда возникает задача об оценке величины $L_{n,\pi/N}(x)$ при n, $N\to\infty$.

2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРОВ $\sigma_{n,N}(f)$ И $\tau_{n,N}(f)$

В настоящем мы приводим оценки для величин $L^{\pi}_{n,N}(x)$ и $L_{n,\pi/N}$, определенных равенствами (20) и (32) и представляющих собой функции Лебега для частичных сумм $\sigma_{n,N}(f,x)$ и $\tau_{n,N}(f,x)$ соответственно.

Теорема 1. Имеют место следующие оценки:

$$L^{\pi}_{n,N}(x) \le C(1+\ln(n|\sin x|+1)), \qquad 1 \le n \le N,$$
$$L_{n,\pi/N}(x) \le C(1+\ln(n|\sin x|+1)), \qquad 1 \le n \le N-1.$$

3. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА

Мы рассмотрим на отрезке $[-1,1]$ сетку узлов

$$x_j = \cos\frac{j\pi}{N}, \qquad j = 1,2,\ldots,N-1.$$

Положим $A_N = \{x_j\}_{j=1}^{N-1}$ и рассмотрим евклидово $(N-1)$-мерное пространство $l_2(A_N)$, состоящее из дискретных функций вида $f : A_N \to \mathbb{R}$, в котором введено скалярное произведение:

$$\langle f,g\rangle_N = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(1-x_j^2)f(x_j)g(x_j).$$

Полную ортонормированную систему в $l_2(A_N)$ образуют функции

$$U_k(x) = \frac{\sin(k+1)\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-2, \tag{33}$$

представляющие собой классические полиномы Чебышёва второго рода. В самом деле, из (21) и (33) имеем:

$$\langle U_k,U_n\rangle = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(1-x_j^2)U_k(x_j)U_n(x_j) =$$
$$= \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(1-x_j^2)\frac{\sin k\arccos x_j}{\sqrt{1-x_j}}\frac{\sin n\arccos x_j}{\sqrt{1-x_j^2}} = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\sin k\frac{j\pi}{N}\sin n\frac{j\pi}{N} = \delta_{kn}.$$

Отсюда следует, что произвольная функция $\varphi(x) \in l_2(A_N)$ допускает представление

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N-2}\varphi_k U_k(x), \qquad x \in A_N, \tag{34}$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\varphi(x_j)U_k(x_j)(1-x_j^2). \tag{35}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $l_2(A_N)$, которую доопределим в точках $x=-1$ и $x=1$. Положим

$$b_f(x) = \frac{f(1)+f(-1)}{2} + \frac{f(1)-f(-1)}{2}x, \qquad g(x) = f(x) - b_f(x),$$

и заметим, что $g(1) = g(-1) = 0$. Для функции $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{(1-x^2)}$ коэффициенты (35) имеют вид

$$\varphi_k = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}g(x_j)U_k(x_j) = \hat{g}_k, \qquad k = 0,1,\ldots,N-2. \tag{36}$$

Из (34)–(36) для $x \in A_N \cup \{-1,1\}$ находим

$$f(x) = b_f(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{N-2}\hat{g}_k U_k(x). \tag{37}$$

Обозначим через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f,x)$ частичную сумму конечного ряда (37) следующего вида:

$$S_{n,N}(f,x) = b_f(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{n-2}\hat{g}_k U_k(x). \tag{38}$$

Тогда не трудно увидеть, что для произвольного алгебраического полинома $P_n(x)$ степени не выше n имеет место тождество

$$S_{n,N}(P_n,x) \equiv P_n(x). \tag{39}$$

В самом деле, $q_{n-2}(x) = \varphi(x) = \dfrac{g(x)}{1-x^2} = \dfrac{P_n(x) - b_{P_n}(x)}{1-x^2}$ представляет собой алгебраический полином степени не выше $n-2$, поэтому в силу свойства (33) и равенства (35) имеем $\hat{g}_k = \varphi_k = 0$ при $k = n-1, n, \ldots, N-2$. Поэтому в силу (36) и (37) мы можем записать

$$P_n(x) = b_{P_n}(x) + (1-x^2)\sum_{k=0}^{n-2}\hat{g}_k U_k(x) = S_{n,N}(P_n,x).$$

Расширим сетку A_N, добавив к ней две точки $x_0 = 1$ и $x_N = -1$. Положим $\overline{A}_N = A_N \cup \{-1,1\}$. Будем рассматривать дискретные функции вида $f : \overline{A}_N \to \mathbb{R}$. Множество всех таких функций, для которых определена норма $\|f\|_{A_N} = \max\limits_{x\in\overline{A}_N}|f(x)|$, обозначим через $C(\overline{A}_N)$. Пусть $E^A_{n,N}(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in C(\overline{A}_N)$ алгебраическими полиномами $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющие условию $P_n(-1) = f(-1)$, $P_n(1) = f(1)$. Пусть $P_n(f) = P_n(f,x)$ — алгебраический полином степени n, удовлетворяющий условиям $f(-1) = P_n(f,-1)$ и $f(1) = P_n(f,1)$, для которого

$$E^A_{n,N}(f) = \|f - P_n(f)\|_{A_N}. \tag{40}$$

Тогда в силу (39)

$$f(x) - S_{n,N}(f,x) = f(x) - P_n(f,x) + S_{n,N}(P_n(f) - f, x),$$

а отсюда и из (40) находим

$$|f(x) - S_{n,N}(f,x)| \le E^A_{n,N}(f) + |S_{n,N}(P_n(f) - f, x)|. \tag{41}$$

Далее, из (38) имеем ($b_{P_n(f)-f}(x) \equiv 0$)

$$S_{n,N}(P_n(f) - f) = (1-x^2)\sum_{k=0}^{n-2}(P_n\widehat{(f)-}f)_k U_k(x), \tag{42}$$

где в силу (36)

$$(P_n\widehat{(f)-}f)_k = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(P_n(f,x_j) - f(x_j))U_k(x_j). \tag{43}$$

Из (42) и (43) находим

$$S_{n,N}(P_n(f) - f, x) = \frac{2(1-x^2)}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(P_n(f,x_j) - f(x_j))\sum_{k=0}^{n-2}U_k(x)U_k(x_j),$$

откуда, в свою очередь, в силу (40) выводим

$$|S_{n,N}(P_n(f) - f, x)| \le E^A_{n,N}(f)\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(1-x^2)\left|\sum_{k=0}^{n-2}U_k(x)U_k(x_j)\right|. \tag{44}$$

Сопоставляя (44) с (41), мы можем записать

$$|f(x) - S_{n,N}(f,x)| \le E^A_{n,N}(f)(1 + \Lambda_{n,N}(x)), \tag{45}$$

где

$$\Lambda_{n,N}(x) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}(1-x^2)\left|\sum_{k=0}^{n-2}U_k(x)U_k(x_j)\right|. \tag{46}$$

В связи с неравенством (45) возникает задача об оценке величины $\Lambda_{n,N}(x)$. Положим $x=\cos\theta$. Тогда из (46), (33) и (32) имеем:

$$\Lambda_{n,N}(\cos\theta) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\sin\theta\left|\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\sin(k+1)\theta\sin\frac{j(k+1)\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}\right| = \frac{2\sin\theta}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin k\theta\sin k\frac{j\pi}{N}}{\sin\frac{j\pi}{N}}\right| = L_{n,\frac{\pi}{N}}(\theta).$$

Поэтому в силу теоремы 1 выводим следующий результат.

Теорема 2. *Имеет место оценка*

$$\Lambda_{n,N}(x) \le C(1+\ln(n\sqrt{1-x^2}+1)), \qquad -1\le x\le 1, \qquad 1\le n\le N-1.$$

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* Предельные ультрасферические ряды и их аппроксимативные свойства // Матем. заметки. 2013. Т. 94, вып. 2. С. 295-309. DOI: 10.4213/mzm10292.
2. *Шарапудинов И.И.* Некоторые специальные ряды по ультрасферическим полиномам и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 5. С. 201–224. DOI: 10.4213/im8117.
3. *Дедус Ф. Ф., Махортых С. А., Устинин М. Н., Дедус А. Ф.* Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов. М. : Машиностроение, 1999.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М. : Наука, 1983.
5. *Арушанян О. Б., Волченскова Н. И., Залеткин С. Ф.* О вычислении коэффициентов рядов Чебышёва для решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. Т. 8. С. 273–283.
6. *Trefethen L. N.* Spectral methods in Matlab. Fhiladelphia : SIAM, 2000.
7. *Trefethen L. N.* Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation. Cornell University, 1996.
8. *Mukundan R., Ramakrishnan K. R.* Moment functions in image analysis. Theory and Applications. Singapore : World Scientific, 1998.

Discrete Transform with Stick Property Based on $\{\sin x\sin kx\}$ and Second Kind Chebyshev Polynomials Systems

I. I. Sharapudinov, G. G. Akniev

Daghestan Scientific Centre Of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, sharapud@mail.ru, hasan.akniyev@gmail.com

In this paper we introduce the discrete series with the «sticking»-property of the periodic ($\{\sin x\sin kx\}$ system) and non-periodic (using the system of the second kind of Chebyshev polynomials $U_k(x)$) cases. It is shown that series of the system $\{\sin x\sin kx\}$ have an advantage over cosine Fourier series because they have better approximation properties near the bounds of the $[0,\pi]$ segment. Similarly discrete series of the system $U_k(x)$ near the bound of the $[-1,1]$ approximates given function significantly better than Fouries sums of Chebyshev polynomials.

Key words: approximation theory, Fouries series, special series, piecewise approximation.

References

1. Sharapudinov I. I. Limit Ultraspherical Series and Their Approximation Properties. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, iss. 2, pp. 281–293. DOI: 10.1134/S0001434613070274.
2. Sharapudinov I. I. Some special series in ultraspherical polynomials and their approximation properties. *Izv. Math.*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 1036–1059. DOI: 10.1070/IM2014v078n05ABEH002718.
3. Dedus F. F., Mahortyh S. A., Ustinin M. N., Dedus A. F. *Obobshchennyi spektral'no-analiticheskii metod obrabotki informatsionnykh massivov. Zadachi analiza izobrazhenii i raspoznavaniia obrazov* [Generalized spectral and analytic method of data arrays processing. Problems of image analysis and pattern recognition]. Moscow, Mashinostroenie, 1999 (in Russian).
4. Pashkovskiy S. Numerical applications of polynomials

and Tchebychev series [Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva]. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

5. Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., Zaletkin S. F. On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2011, vol. 8, pp. 273–283 (in Russian).

6. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000.

7. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996.

8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment functions in image analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998.

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, tadgius@gmail.com

Пусть для $\lambda \geqslant 1$ задана измеримая 2π-периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Исследуются условия на вес $w(x)$ и ядра $\{k_\lambda(t)\}_{\lambda\geqslant 1}$, при которых семейство операторов свертки $\{\mathscr{K}_\lambda f(x) : \mathscr{K}_\lambda f(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\}_{\lambda\geqslant 1}$ $(E = [-\pi,\pi])$ равномерно ограничено в весовых пространствах Лебега с переменным показателем — $L^{p(x)}_{2\pi,w}$.

Ключевые слова: пространство Лебега с переменным показателем, операторы свертки, условие Дини – Липшица.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $E = [-\pi,\pi]$, $1 \leqslant \underline{p}(E) \leqslant p(x) \leqslant \overline{p}(E) < \infty$ — измеримая 2π-периодическая функция, где $\underline{p}(D) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in D} p(x)$, $\overline{p}(D) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} p(x)$ для произвольного $D \subset R$, $w(x)$ — суммируемая почти всюду положительная функция (вес). Через $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x)\,dx < \infty.$$

Пространство $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ нормируемо, и одну из эквивалентных норм можно определить [1–4], полагая для $f \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)\,dx \le 1\}. \qquad (1)$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1°. $\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\,w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$.

2°. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leqslant \|f\|_{p(\cdot),w}(B),$$

так как

$$\int_A \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\,dx \leqslant \int_B \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\,dx = 1.$$

3°. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.6.1 в [2], можно показать, что если $1 \leqslant p(x) \leqslant q(x) \leqslant \overline{q}(A) < \infty$, то для любой функции $f \in L^{q(x)}_w(A)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leqslant r^w_{p,q}\|f\|_{q(\cdot),w}(A),$$

где A — измеримое множество, $r^w_{p,q} \leqslant \dfrac{1}{\underline{\alpha}} + \dfrac{\int_A w(x)\,dx}{\underline{\alpha^*}}$ $\left(\alpha(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)},\quad \alpha^*(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}\right)$.