25. Khromov A. P. The spectral analysis of differential operators on final interval. *Differential Equations*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1691–1696.
26. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 3631–3715. DOI: 10.1007/BF02172664.
27. Sadovnichaya I. V. Equiconvergence theorems in Sobolev and Hölder spaces of eigenfunction expansions for Sturm – Liouville operators with singular potentials. *Doklady Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 169–170. DOI: 10.1134/S1064562411020128.
28. Khromov A. P. Theorems of equiconvergence for integro-differential and integral operators. *Sb. Math.*, 1981, vol. 114 (156), no. 3, pp. 378–405.
29. Burlutskaya M. S., Khromov A. P. Rezolventny approach in the Fourier method. *Doklady Math.*, 2014, vol. 90, no. 2, pp. 545–548. DOI: 10.1134/S1064562414060076.
30. Khromov A. P. About the classical solution of the mixed problem for the wave equation. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2015, vol. 15, no. 1, pp. 56–66 (in Russian).


УДК 517.51

# ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ПО УПОРЯДОЧЕННОЙ $H$-ВАРИАЦИИ


**В. В. Новиков**

Новиков Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественных и математических наук, Энгельсский технологический институт (филиал), Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А., vvnovikov@yandex.ru



В 1972 г. Д. Ватерман ввел класс функций ограниченной $\Lambda$-вариации (в частности, гармонической или $H$-вариации). Позднее им же были введены классы функций ограниченной упорядоченной $\Lambda$-вариации и функций, непрерывных по $\Lambda$-вариации. Эти классы успешно применялись рядом авторов в исследованиях по сходимости и суммируемости рядов Фурье. В настоящей статье изучается поведение интерполяционных операторов Лагранжа на классе функций, непрерывных по упорядоченной гармонической вариации. Показано, что для функции $f \in C_{2\pi}$, непрерывной на $[-\pi, \pi]$ по упорядоченной $H$-вариации, тригонометрический интерполяционный процесс Лагранжа $\{L_n(f, x)\}$ с равноотстоящими узлами сходится к $f$ равномерно на $\mathbb{R}$.



*Ключевые слова:* обобщенная вариация, упорядоченная гармоническая вариация, интерполяция Лагранжа.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-418-422


## ВВЕДЕНИЕ

**Определение 1.** Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

Говорят, что $f$ есть *функция ограниченной $\Lambda$-вариации* (обозначение: $f \in \Lambda BV$), если

$$V(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_k \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем системам $\Pi$ непересекающихся интервалов вида

$$I_k := (t_{2k-1}, t_{2k}) \subset [-\pi, \pi], \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

**Определение 2.** Функция $f$ называется *функцией ограниченной упорядоченной $\Lambda$-вариации* (обозначение: $f \in O\Lambda BV$), если

$$\tilde{V}(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_k \frac{|f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})|}{\lambda_k} < +\infty,$$

причем супремум берется по всевозможным системам неналегающих интервалов (1) таких, что $I_k < I_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, или $I_k > I_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ (запись $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ означает, что $I_k$ расположен левее, соответственно, правее, чем $I_{k+1}$).

Положим $\Lambda = H := \{k\}_{k=1}^{\infty}$. Порожденная этой последовательностью вариация называется *гармонической* (или *$H$-вариацией*). Соответственно через $HBV$ ($OHBV$) мы будем обозначать классы ограниченной гармонической (упорядоченной гармонической) вариации.

**Определение 3.** Обозначим $\Lambda^m := \{\lambda_k\}_{k=m+1}^{\infty}$. Функция $f$ называется *непрерывной по $\Lambda$-вариации* (*по упорядоченной $\Lambda$-вариации*), если

$$\lim_{m\to\infty} V(\Lambda^m, f) = 0 \qquad \Big(\lim_{m\to\infty} \tilde{V}(\Lambda^m, f) = 0\Big).$$

Приведенные определения были предложены в 1970-х гг. прошлого века Ватерманом (D. Waterman) (см., например, [1, 2]). Введенные им классы функций нашли важные применения в исследованиях по сходимости и суммируемости рядов Фурье. Приведем характерный результат такого рода. Пусть $C_{2\pi}$ — пространство действительных непрерывных на всей числовой прямой $2\pi$-периодических функций с равномерной нормой.

**Теорема 1 (см. [1]).** *Если $f \in C_{2\pi} \cap HBV$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f$ сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Если же $\Lambda BV \supseteq HBV$, причем $\Lambda BV \neq HBV$, то найдется функция $f \in C_{2\pi} \cap \Lambda BV$, ряд Фурье которой расходится, по крайней мере, в одной точке.*

Очевидно, что $\Lambda BV \subseteq O\Lambda BV$. В статье [2] Ватерман поставил вопрос, является ли это включение строгим? Утвердительный ответ, сначала для случая гармонической вариации, был получен в работе [3]. Позднее также положительный ответ был дан в [4] для случая произвольной последовательности $\Lambda$. Отметим в этой связи любопытный факт. С одной стороны, исходя из определений, можно предположить, что различие между классами $\Lambda BV$ и $O\Lambda BV$ является незначительным. Косвенно это подтверждается и тем, что построенные в статьях [3] и [4] примеры довольно сложны, т.е. обнаружить различие между данными классами — технически сложная задача. С другой стороны, известно [4], что $\Lambda BV$ и $O\Lambda BV$ становятся банаховыми постранствами, если снабдить их подходящей нормой. При этом оказывается, что при всем внешнем сходстве обсуждаемых классов $\Lambda BV$ является всего лишь множеством первой категории в $O\Lambda BV$.

Вопросы сходимости ряда Фурье функций класса $O\Lambda BV$ рассматривались в заметке Ватермана [5]. Существует также ряд работ, авторы которых обобщали понятие $\Lambda$-вариации на многомерный случай применительно к изучению кратных рядов Фурье.

Хорошо известен факт, что между частичными суммами ряда Фурье и интерполяционными многочленами Лагранжа существует глубокая аналогия. В связи с этим результаты, полученные для рядов Фурье функций из классов обобщенной ограниченной вариации, позже переносились на случай интерполирования. В частности, Кельзоном в [6] доказан аналог теоремы 1 для случая тригонометрического интерполирования с равноотстоящими узлами. Ряд авторов рассматривал упомянутые классы функций применительно к алгебраическому интерполированию с узлами в нулях ортогональных многочленов.

В настоящей заметке обсуждается равномерная сходимость тригонометрической интерполяции для функций, непрерывных по $H$-вариации. Результат дополняет полученное автором в [8] утверждение относительно сходимости интерполяционного процесса Лагранжа, а также одного специального интерполяционного процесса Биркгофа для функций из класса $f \in C_{2\pi} \cap O\Lambda BV$.

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_n(f, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Если функция $f \in C_{2\pi}$ непрерывна по упорядоченной гармонической вариации на $[-\pi, \pi]$, то последовательность полиномов $\{L_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f$ равномерно на всей числовой прямой.*

Введем некоторые обозначения. Для $f \in C_{2\pi}$ и $n \geqslant 3$ положим

$$T^*_{n,p}(f) = \sideset{}{'}\sum_{k=-[n/2]}^{[n/2]} \left| \frac{f(x_{2k+1,n}) - f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1, n, p)} \right|, \qquad p = -n-1, \ldots, n,$$

где

$$\varphi(m,n,p)=\begin{cases}p-m, & \text{если } |p-m|\leqslant 3\left([n/2]+1\right),\\ 2n-(p-m), & \text{если } p-m>3\left([n/2]+1\right),\\ -2n-(p-m), & \text{если } p-m<-3\left([n/2]+1\right),\end{cases}$$

$$T_n^*(f)=\max_{-n-1\leqslant p\leqslant n} T_{n,p}^*(f).$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс $k$ является решением уравнения $\varphi(2k+1,n,p)=0$; кроме того, будем считать, что $x_{n+1,n}=\pi$, $x_{-n-1,n}=-\pi$.

Нам понадобится следующая лемма.

**Лемма (см. [7]).** *Условие $T_n^*(f)\to 0$ при $n\to\infty$ влечет равномерную на $\mathbb{R}$ сходимость к $f$ полиномов $\{L_n(f,x)\}$.*

**Доказательство теоремы 2.** Зафиксируем произвольное $p\in\{-n-1,...,n\}$ и представим $T_{n,p}^*(f)$ в виде

$$T_{n,p}^*(f)=\left(\sum_{k\in I}+\sum_{k\in J}+\sum_{k\in K}\right)\left|\frac{f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)}\right|=:\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3,$$

где множества индексов $I$, $J$, $K$ определяются следующим образом:

$$I:=\{k:|p-2k-1|\leqslant 3\left([n/2]+1\right)\},\qquad J:=\{k:p-2k-1>3\left([n/2]+1\right)\},$$

$$K:=\{k:p-2k-1<-3\left([n/2]+1\right)\}.$$

Получим оценку сверху для $T_{n,p}^*(f)$. Мы будем оценивать только сумму $\Sigma_1$, поскольку остальные две оцениваются аналогично.

В силу равномерной непрерывности функции $f$ найдется неубывающая последовательность номеров $\{m_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=+\infty$ и

$$A_n:=\omega\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right)\log m_n\to 0,\ n\to\infty. \tag{2}$$

Здесь $\omega(f;\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции $f$. Пусть $Q:=\{k\in I:\ |p-2k-1|<m_n\}$, $Q_1:=I\backslash Q$ и

$$\Sigma_1=\left(\sum_{k\in Q}+\sum_{k\in Q_1}\right)\left|\frac{f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})}{\varphi(2k+1,n,p)}\right|=:S_1+S_2.$$

Учитывая, что для всех $k=-[n/2],...,[n/2]$ верно неравенство

$$|f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})|\leqslant\omega\left(f;\frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

а также принимая во внимание определение функции $\varphi$ и тот факт, что $\mathrm{card}Q\leqslant m_n$, находим (как обычно, $C$ — абсолютная постоянная)

$$S_1\leqslant CA_n. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь сумму $S_2$. Обозначим $A:=\{k\in Q_1:2k+1<p\}$, $B:=\{k\in Q_1:2k+1>p\}$ и запишем $S_2$ в виде

$$S_2=\left(\sum_{k\in A}+\sum_{k\in B}\right)\left|\frac{f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})}{p-2k-1}\right|=$$

$$=\sum_{k\in A}\frac{|f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})|}{p-2k-1}+\sum_{k\in B}\frac{|f(x_{2k+1,n})-f(x_{2k,n})|}{2k+1-p}=:U_1+U_2.$$

Если расположить знаменатели $p - 2k - 1$ в сумме $U_1$ (знаменатели $2k + 1 - p$ в сумме $U_2$) в порядке возрастания, то соответствующие им неналегающие интервалы $I_k = (x_{2k,n}, x_{2k+1,n})$ будут упорядочены справа налево (соответственно слева направо). Тогда, учитывая определение величины $\tilde{V}(H^m, f)$ и тот факт, что для индексов суммы $S_2$ выполнено условие $|p - 2k - 1| \geqslant m_n$, получаем оценку

$$S_2 \leqslant C\tilde{V}(H^{m_n}, f). \qquad (4)$$

При этом в силу непрерывности $f$ по $H$-вариации и того, что $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{V}(H^{m_n}, f) = 0. \qquad (5)$$

Поскольку номер $p = -n - 1, ..., n$ произвольный, мы доказали на основании (2)–(5), что последовательность $T_n^*(f)$, $n = 1, 2, ...$ мажорируется некоторой сходящейся к нулю последовательностью. Применяя лемму, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} [f(x) - L_n(f, x)] = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. □

## Библиографический список


1. *Waterman D.* On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 107–117.
2. *Waterman D.* Λ-bounded variation : recent results and unsolved problems // Real Anal. Exchange. 1978–1979. Vol. 4. P. 69–75.
3. *Belna C. L.* On ordered harmonic bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 80. P. 441–444.
4. *Prus-Wisniowski F.* On ordered Λ-bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. Vol. 109. P. 375–383.
5. *Waterman D.* On the note of C. L. Belna // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 80. P. 445–447.
6. *Кельзон А. А.* О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1062–1064.
7. *Привалов А. А.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа // Матем. заметки. 1986. Т. 39, № 2. С. 228–243.
8. *Новиков В. В.* Интерполяция Биркгофа функций ограниченной упорядоченной Λ-вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 81–83.


# Interpolation of Continuous in Ordered $H$-variation Functions

**V. V. Novikov**

Novikov Vladimir Vasil'evich, Engels Technological Institute, State Technical University of Saratov, 17, pl. Svobody, 413100, Engels, Saratov region, Russia, vvnovikov@yandex.ru

In 1972 D. Vaterman introduced a class of functions of Λ-bounded variation (in particular, a harmonic variation or an $H$-variation). Later he introduced also the class of functions of ordered Λ-bounded variation and the class of continuous in Λ-variation functions. These classes have been used by many authors in studies on the convergence and summability of the Fourier series. This paper investigates the behavior of the Lagrange interpolation of continuous in ordered $H$-variation functions. We prove a result: if $f \in C_{2\pi}$ is continuous in ordered harmonic variation on $[-\pi, \pi]$, then the Lagrange trigonometric polynomials $\{L_n(f, x)\}$ based on equidistant nodes converge to $f$ uniformly on $\mathbb{R}$.

*Key words:* generalized variation, ordered harmonic variation, Lagrange interpolation.

## References


1. Waterman D. On convergence of Fourier Series of functions of generalized bounded variation. *Studia Math.*, 1972, vol. 44, pp. 107–117.
2. Waterman D. Λ-bounded variation : recent results and unsolved problems. *Real Anal. Exchange*, 1978–1979, vol. 4, pp. 69–75.
3. Belna C. L. On ordered harmonic bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 80, pp. 441–444.
4. Prus-Wisniowski F. On ordered Λ-bounded variation. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 109, pp. 375–383.
5. Waterman D. On the note of C. L. Belna. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, vol. 80, pp. 445–447.
6. Kelzon A. On trigonometric interpolation of func-

tions of Λ-bounded variation. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1062–1064.
7. Privalov A. A. Uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 2, pp. 228–243.
8. Novikov V. V. On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered Λ-bounded Variation *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 81–83 (in Russian).

УДК 517.972:517.98:517.982

# ДОМИНАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА ИНТЕГРАНТА И ГЛАДКОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

**И. В. Орлов**[1], **И. А. Романенко**[2]

[1]Орлов Игорь Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, igor_v_orlov@mail.ru
[2]Романенко Игорь Алексеевич, ассистент кафедры алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, rom.igor.alex@gmail.com

Для вариационных функционалов в пространствах Соболева $\{W^{1,p}\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ вводится последовательность так называемых «доминантных оценок роста» градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала в $C^1$-гладких точках пространства Соболева. Частными случаями доминантных оценок роста являются изученные ранее $K$-псевдополиномиальные представления интегранта. Однако, в отличие от псевдополиномиального случая $(p \in \mathbb{N})$ наш подход позволяет рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале $(1 \leqslant p < \infty)$.

*Ключевые слова:* вариационный функционал, пространства Соболева, интегрант, доминантные оценки роста, доминантная смешаная гладкость, вариационные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-422-432

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начиная с классических работ Л. Тонелли (L. Tonelli) [1] и по настоящее время вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков [2–4]. В последние годы при исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, активно используются так называемые компактные экстремумы и компактно-аналитические ($K$-аналитические) свойства вариационных функционалов [5–7]. Это связано с тем, что классические аналитические свойства у вариационных функционалов в пространствах Соболева часто отсутствуют [8]. При этом при исследовании корректной определенности вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\, dx \qquad \left(y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]\right), \tag{1}$$

классическая «оценка роста» интегранта $|f(x, y, z)| \leqslant A_1 + A_2|z|^p$ заменялась требованием так называемого $K$-псевдополиномиального представления интегранта:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} P_k(x, y, z) z^k, \tag{2}$$

коэффициенты которого доминантно (по $x, y$) ограничены. Далее последовательно вводились более узкие классы $K$-псевдополиномов за счет повышения уровня доминантной гладкости коэффициентов $P_k$. Попадание интегранта в такой класс гарантирует соответствующий уровень $K$-аналитичности вариационного функционала ($K$-непрерывность, $K$-дифференцируемость, кратную $K$-дифференцируемость).