УДК 517.5

ФАКТОРИЗАЦИЯ ЦЕЛЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. Б. Шишкин

Шишкин Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, информатики и МП, Филиал Кубанского государственного университета, Славянск-на-Кубани, Shishkin-home@mail.ru

Пусть π — целая функция минимального типа при порядке 1. Целая функция F называется π-симметричной, если она представляется в виде композиции $f \circ \pi$, где f — целая функция. В статье рассматривается следующий вопрос: можно ли всякую целую π-симметричную функцию экспоненциального типа представить в виде произведения двух близких по росту функций, каждая из которых сама является целой π-симметричной функцией? На этот вопрос получен утвердительный ответ, но при условии подчинения функции π некоторым ограничениям. Этим ограничениям подчинена, например, целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r) \approx \rho \in (0;1)$ с постоянным положительным индикатором. Другие примеры связаны с обратимостью целой функции в кругах постоянного радиуса, центры которых лежат вне некоторого исключительного множества.

Ключевые слова: факторизация целых функций, нулевой порядок, уточненный вес, логарифмический вес, целые симметричные функции.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-42-68

ВВЕДЕНИЕ

Пусть даны некоторый класс P целых функций конечного порядка и некоторое отношение R близости роста элементов из класса P. Если две функции $f, g \in P$ удовлетворяют этому отношению, то говорим, что функции f и g эквивалентны. Проблема факторизации состоит в следующем. Возможно ли произвольную функцию из класса P представить в виде произведения двух эквивалентных функций из этого класса? Если ответ на этот вопрос положителен, то класс P называем *факторизуемым по данному отношению*. Факторизация целых функций подобна операции извлечения квадратного корня и находит применение в различных областях комплексного анализа. Приведем лишь два примера.

В качестве первого примера уместно рассмотреть известную *проблему Шевалле – Эренпрайса* о факторизации по свертке финитных гладких функций [1]. Двойственная к ней задача совпадает с проблемой факторизации некоторого класса целых функций экспоненциального типа. Первые исследования этой задачи провел Д. Г. Диксон (D. G. Dicson). В работе [2] он, например, рассмотрел класс всех целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условиям:

1) для любого натурального N имеет место оценка

$$\ln|f(x)| \leqslant -N\ln|x| + C_N, \qquad x \in \mathbf{R};$$

2) нули функции f лежат в некоторой полосе, параллельной вещественной оси;

3) если $n(r)$ — считающая функция нулей функции f, а Δ — плотность нулей функции f, то

$$n(r) = \Delta r + O(1), \qquad r \to \infty;$$

и показал, что этот класс факторизуем по отношению: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда функции f и g имеют одинаковые плотности нулей. Окончательное решение проблемы Шевалле – Эренпрайса получено Р. С. Юлмухаметовым. В статье [3] он показал, что класс всех целых функций f экспоненциального типа, удовлетворяющих условию 1) и условию

$$\ln|f(\lambda)| \leqslant \sigma_f\,|\operatorname{Im}\lambda| + M_f, \qquad \lambda \in \mathbf{C},$$

факторизуем по отношению: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда функции f и g имеют одинаковый тип.

Другой пример связан с задачей спектрального синтеза для линейного дифференциального оператора:

$$f \to \pi(D)f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k f, \qquad a_k \in \mathbf{C}.$$

Для нас этот пример является основным и поэтому рассмотрим его подробнее. Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbf{C}$; $H(\Omega)$ — пространство аналитических в области Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Считаем, что сужение оператора $\pi(D)$ на пространство $H(\Omega)$ является непрерывным эндоморфизмом этого пространства. Для этого достаточно, а если область Ω ограничена, то и необходимо, предположить, что функция

$$\pi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

является целой функцией минимального типа при порядке 1. *Задача спектрального синтеза* (в комплексной области) состоит в нахождении условий, при которых замкнутые $\pi(D)$-инвариантные подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ восстанавливаются по запасам содержащихся в них корневых элементов оператора $\pi(D)$ с помощью замыкания их линейной оболочки. Традиционный путь решения этой задачи связан с переходом к двойственной задаче. Полное исследование по этому вопросу проведено в [4]. В этой работе исследование замкнутого $\pi(D)$-инвариантного подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ на допустимость спектрального синтеза сведено к вопросу *обильности* его аннуляторного подмодуля $I := L_\Omega(W^0) \subseteq P(\Omega)$. Здесь $P(\Omega)$ — интерпретация сильного сопряженного $H^*(\Omega)$ к пространству $H(\Omega)$ в терминах преобразования Лапласа L_Ω, наделенная структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbf{C}[\pi(z)]$ от $\pi(z)$. В работе [5] свойство обильности замкнутого подмодуля $I \subseteq P(\Omega)$ расщепляется на три отдельных свойства: *интенсивность, устойчивость, насыщенность*. Общее исследование этих свойств проведено в работе [6]. Целая функция называется *целой π-симметричной*, если она представляется в виде композиции $f \circ \pi$, где f — целая функция. Пусть $P_\pi[1;+\infty)$ — класс всех целых π-симметричных функций экспоненциального типа, $S \in H^*(\Omega)$, $\varphi := L_\Omega(S) \in P(\Omega)$. Замкнутое $\pi(D)$-инвариантное подпространство

$$W_S := \left\{ f \in H(\Omega) : \left\langle S, \pi(D)^k f \right\rangle = 0,\ k = 0, 1, ... \right\} \subset H(\Omega)$$

называется *полиномиальным ядром* (точнее, $\mathbf{C}[\pi(D)]$-ядром) функционала S. Иногда полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов называют *главными* $\pi(D)$-инвариантными подпространствами в $H(\Omega)$. Полиномиальное ядро W_S функционала S допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация: если $\psi \in P(\Omega)$ и $\frac{\psi}{\varphi} \in P_\pi[1;+\infty)$, то существует такая последовательность многочленов p_k, что последовательность $(p_k \circ \pi)\varphi$ сходится к ψ в топологии пространства $P(\Omega)$. В работе [7] И. Ф. Красичков-Терновский доказал выполнимость этой импликации для любого функционала $S \in H^*(\Omega)$ в случае $\pi(z) \equiv z$. Отсюда вытекает следующая аппроксимационная теорема: в случае $\pi(z) \equiv z$ полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Доказательству этой теоремы предшествовало доказательство факторизуемости класса $P[1;+\infty)$ всех целых функций экспоненциального типа по *естественному отношению эквивалентности* $R(|z|)$: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда

$$|\ln|f(z)| - \ln|g(z)|| = o(|z|), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E_{f,g},$$

где $E_{f,g}$ — некоторое множество «нулевой плотности» в окрестности бесконечности. В работе [8] В. С. Азарин обобщил этот факт и показал, что класс всех целых функций конечного порядка $\rho \in (0;+\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|^\rho)$. Отсюда следует, что класс $P[\rho;+\infty)$ всех целых функций конечного порядка и конечного типа тоже факторизуем по отношению $R(|z|^\rho)$. Опираясь на этот результат, И. Ф. Красичков-Терновский в работе [9] показал, что класс целых π-симметричных функций $P_\pi[1;+\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|)$ в случае $\pi(z)$ — многочлен. Это позволило ему доказать такую аппроксимационную теорему: в случае $\pi(z)$ — многочлен, полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Замечательным является то, что позднее в диссертации [10] Б. Н. Хабибуллин существенно уточнил факторизационную теорему В. С. Азарина. Оказалось, например, что класс $P[\rho;+\infty)$ факторизуем по отношению $R\left(|z|^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}\right)$ для любого положительного ε. Отметим, что результаты В. С. Азарина и Б. Н. Хабибуллина по факторизации целых функций получены ими в связи с общими исследованиями по проблеме влияния близости распределений масс субгармонических функций на сходство их асимптотического поведения.

Расщепление целой π-симметричной функции $f\circ\pi \in P_\pi[1;+\infty)$ на эквивалентные π-симметричные множители связано с расщеплением целой функции f на эквивалентные множители. Если функция π отлична от многочлена, то функция f имеет нулевой порядок. Это означает, что продолжение исследований по спектральному синтезу предполагает решение задач факторизации целых функций нулевого порядка. Заметим, что все отмеченные выше факторизационные задачи к таковым не относятся, так как в каждой из них предполагается, что $\rho \in (0;+\infty)$. Приходится возвращаться к истокам.

Доказательство факторизационной теоремы из [7] существенно опиралось на результаты работы [11]. Статья [11] посвящена сравнению роста целых функций конечного порядка по параметрам близости их нулей. Оказалось, что техника сравнения целых функций, основанная на классических теоремах Бореля и Адамара и отточенная в работах [7] и [11], допускает экстраполяцию в область нулевого порядка и логарифмических весов (см. п. 1.1, определение 2). Первые результаты по факторизации целых функций нулевого порядка получены в работах [12] и [13]. Пусть $\mu(r) \sim \ln^\rho r$ — логарифмический вес порядка $\rho \in (1;+\infty)$. В статье [13] показано, что класс $P[\mu(r);+\infty)$ всех целых функций f, для которых выполняется условие

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < +\infty,$$

факторизуем по отношению эквивалентности $R(\mu(|z|))$. Однако прямое применение этого результата к расщеплению целых π-симметричных функций наталкивается на трудности, которые связаны с проверкой совпадения на классе $P_\pi[1;+\infty)$ всех целых π-симметричных функций экспоненциального типа естественного отношения эквивалентности $R(|z|)$ с отношением: $f\circ\pi \sim g\circ\pi$ тогда и только тогда, когда $f \sim g$ по отношению $R(\mu(|z|))$.

В настоящей работе показано, что при наложении на целую функцию π сильного ограничения (см. п. 2.1, определение 5) класс $P_\pi[1;+\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|)$. Этому ограничению подчинена, например, всякая целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho_\pi(r) \approx \rho_\pi \in (0;1)$ с постоянным положительным индикатором. Другие примеры приведены в конце статьи. Этот результат можно трансформировать в результаты по спектральному синтезу по схеме из [14], но это требует отдельного разговора.

1. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРИ СЛАБОМ ОГРАНИЧЕНИИ

1.1. Первичные определения и их следствия

Определение 1. Неотрицательную функцию $m(r)$, определенную в окрестности $+\infty$, называем уточненным весом порядка $\rho \in [0,+\infty)$, если она возрастает, дифференцируема и

$$\frac{m(r)}{\ln r} \to \infty, \qquad \frac{m'(r)r}{m(r)} \to \rho, \qquad r \to +\infty.$$

Если $m(r)$ — уточненный вес порядка ρ, то функция $\rho(r) := \dfrac{\ln m(r)}{\ln r}$ является уточненным порядком, т. е. $\rho(r) \to \rho$ и $r\rho'(r)\ln r \to 0$ при $r \to +\infty$. Легко проверить, что при $\rho > 0$ будет верно и обратное утверждение: для всякого уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$ функция $m(r) := r^{\rho(r)}$ является уточненным весом порядка ρ.

При $\rho > 0$ обратная функция $n(t)$ к функции $m(r)$ является уточненным весом порядка $1/\rho$. Действительно, $t := m(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. По известному правилу

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln n(t)}{\ln t} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln r}{\ln m(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{m(r)}{m'(r)r} = \frac{1}{\rho} \in (0,+\infty).$$

Значит, $r = n(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и

$$\frac{n(t)}{\ln t} = \frac{\ln r}{\ln m(r)} \frac{r}{\ln r} \to \infty, \qquad \frac{n'(t)t}{n(t)} = \frac{m(r)}{m'(r)r} \to \frac{1}{\rho}, \qquad t \to +\infty.$$

По свойствам уточненного порядка для всякого уточненного веса $m(r)$ функция $m(r)r^{-\rho} = r^{\rho(r)-\rho}$ является медленно растущей, значит, равномерно по q из любого отрезка $[a;b] \subset (0;+\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m(qr)(qr)^{-\rho}}{m(r)r^{-\rho}} = 1, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{m(qr)}{m(r)} = q^{\rho}. \tag{1}$$

Определение 2. Уточненный вес $m(r)$ нулевого порядка будем называть логарифмическим весом порядка ρ, если выполняется условие

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m'(r)r\ln r}{m(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m(r)}{\ln\ln r} = \rho \in (1;+\infty). \tag{2}$$

Условие (2) означает, что функция $m(e^r)$ является уточненным весом порядка ρ. Значит, равномерно по q из любого отрезка $[a;b] \subset (0;+\infty)$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m(e^{qr})}{m(e^r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{m(r^q)}{m(r)} = q^{\rho}.$$

Кроме того, из условия (2) вытекает, что $m(r) \sim \ln^{\rho} r$ по отношению $R\,(\ln\ln r)$, т. е.

$$\ln m(r) - \ln\ln^{\rho} r = o\,(\ln\ln r)\,, \qquad r \to +\infty.$$

Добавим еще, что для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших r выполняются неравенства $\ln^{\rho-\varepsilon} r \leqslant m(r) \leqslant \ln^{\rho+\varepsilon} r$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m(r)}{\ln^{\rho-\varepsilon} r} = \infty, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{m(r)}{\ln^{\rho+\varepsilon} r} = \lim_{r\to+\infty} \frac{m(r)}{r^{\varepsilon}} = 0.$$

Определение 3. Говорим, что радиальная плотность множества комплексных чисел E меньше $\varepsilon \in (0;+\infty)$, если это множество можно покрыть совокупностью колец

$$\Sigma := \{\{z : ||z| - t_n| \leqslant r_n\} : \ n \in \mathbf{N}\}\,,$$

где последовательность неотрицательных чисел $\{t_n\}$ имеет единственную предельную точку в бесконечности и

$$m_{\Sigma} := \varlimsup_{r\to+\infty} m_{\Sigma}(r) = \varepsilon' < \varepsilon, \text{ где } m_{\Sigma}(r) := \frac{1}{r}\sum_{t_n<r} r_n.$$

Если радиальная плотность множества E меньше любого положительного числа, то говорим, что множество E имеет нулевую радиальную плотность.

Если линейная плотность множества кружков меньше ε (равна нулю), то и радиальная плотность этого множества меньше ε (равна нулю). Обратное не выполняется. Это означает, что радиальная плотность множества E — более грубая оценка его плотности, чем линейная плотность множества кружков, покрывающего E, и, значит, ограничение на радиальную плотность множества является более слабым. Следует добавить еще, что оценка радиальной плотности множеств оказывается незаменимой при оценке плотности прообразов исключительных множеств.

Заметим, что для всякого множества E, радиальная плотность которого меньше $\varepsilon \in (0;1/2)$, существуют окружности $|z| = R_k$, которые не пересекаются с E и для которых имеют место соотношения

$$R_k < R_{k+1} < \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2} R_k \to \infty, \qquad k \to \infty. \tag{3}$$

Действительно, пусть множество E покрывается множеством колец Σ и $m_\Sigma =: \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда

$$\frac{r_n}{t_n} < \varepsilon, \qquad \frac{r_n}{t_n - r_n} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

при $n > n_0$. Если кольцо $||z| - t_n| \leqslant r_n$ пересекается с кругом $|z| \leqslant r$ и $n > n_0$, то $t_n - r_n \leqslant r$, значит, $r_n < \varepsilon t_n < \varepsilon(r + r_n)$ или $r_n < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} r$. Отсюда следует, что при $r \geqslant \max\{t_1 + r_1, ..., t_{n_0} + r_{n_0}\}$ кольца $||z| - t_n| \leqslant r_n$, пересекающиеся с кругом $|z| \leqslant r$, лежат в круге $|z| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} r$. Пусть $T_1 > 0$, $T_{k+1} := q_k T_k$, где

$$q_k := \frac{1}{1 - qm(T_k)} > 1,$$
$$q := \frac{1}{2\varepsilon} \in \left(1; \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right), \qquad m(r) := \max_{t \geqslant r} \frac{1}{1-\varepsilon} m_\Sigma \left(\frac{1}{1-\varepsilon} t\right).$$

Толщина кольца $T_k \leqslant |z| \leqslant T_{k+1}$ равна

$$(q_k - 1)\, T_k = qm(T_k) T_{k+1} \geqslant qm(T_{k+1}) T_{k+1}.$$

При этом совокупная толщина колец $||z| - t_n| \leqslant r_n$, пересекающихся с кругом $|z| \leqslant T_{k+1}$, меньше

$$\frac{q}{1-\varepsilon} T_{k+1} m_\Sigma \left(\frac{1}{1-\varepsilon} T_{k+1}\right) \leqslant q T_{k+1} m(T_{k+1}).$$

Поэтому существует окружность $|z| = R_k$, $T_k \leqslant R_k \leqslant T_{k+1}$, которая не пересекается с множеством E, и при достаточно большом k имеем $m(T_k) \leqslant 2\,(1-\varepsilon)\,\varepsilon'$, значит,

$$\frac{R_{k+1}}{R_k} \leqslant \frac{T_{k+1}}{T_k} = q_k q_{k+1} \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2}.$$

1.2. Слабое ограничение

Пусть $\pi(z)$ — целая функция. Для любого множества $E \subseteq \mathbf{C}$ символом $\hat{E}$ обозначаем множество $\left\{\zeta : \pi^{-1}(\zeta) \setminus E \neq \varnothing\right\}$.

Определение 4. Говорим, что целая функция π и логарифмический вес $\mu(r)$ порядка ρ, подчинены слабому ограничению, если для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует множество E_ε, радиальная плотность которого меньше ε, и такая константа $\kappa_\varepsilon \geqslant 1$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ и любого $z \in \pi^{-1}(\xi) \setminus E_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \leqslant \kappa_\varepsilon. \tag{4}$$

Из (4) следует, что для фиксированного $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ при $z \to \infty$, $z \notin E_\varepsilon$,

$$\frac{\ln|\pi(z)|}{|z|} = \frac{\ln|\pi(z)|}{\mu(|\pi(z)|)} \frac{\mu(|\pi(z)|)}{|z|} \leqslant \frac{\ln|\pi(z)|}{\mu(|\pi(z)|)} \kappa_\varepsilon \to 0.$$

Значит, существуют окружности $|z| = R_k$, удовлетворяющие условию (3), на которых выполняется оценка $\ln|\pi(z)| \leqslant \sigma_k |z|$, где $\sigma_k \to 0$ при $k \to \infty$. Если z принадлежит кольцу $R_k \leqslant |z| \leqslant R_{k+1}$, то

$$\ln|\pi(z)| \leqslant \ln M_\pi(R_{k+1}) \leqslant \sigma_k R_{k+1} \leqslant \sigma_k \left(1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{-2} |z|.$$

Следовательно, целая функция $\pi(z)$ имеет минимальный тип при порядке 1. Полный образ целой функции минимального типа совпадает со всей комплексной плоскостью. Значит, из (4) следует, что для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ справедливы соотношения

$$\hat{E}_\varepsilon \subseteq \pi(\mathbf{C} \setminus E_\varepsilon) \subseteq \pi(E_\varepsilon) = \pi(\mathbf{C}) = \mathbf{C}, \qquad \mathbf{C} \setminus E_\varepsilon \subseteq \pi^{-1}\left(\hat{E}_\varepsilon\right).$$

Убедимся, что условия слабого ограничения на выбор функции $\pi(z)$ выполнены, если, например, $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \to \rho_\pi \in (0;1)$ с положительным индикатором $h_\pi(\theta)$. Действительно, функция $\mu_\pi(r) := r^{\rho_\pi(r)}$ является уточненным весом порядка ρ_π. Обратная к ней функция $\nu_\pi(t)$ является уточненным весом порядка ρ_π^{-1}. Положим $\mu(r) := \nu_\pi(\ln r)$. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mu(r)}{\ln r} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mu_\pi(t)} = \infty,$$

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mu'(r)r}{\mu(r)} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\nu_\pi'(\ln r)\ln r}{\nu_\pi(\ln r)} \frac{1}{\ln r} = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{\mu'(r)r\ln r}{\mu(r)} = \frac{1}{\rho_\pi}.$$

Из этих соотношений вытекает, что функция $\mu(r)$ является логарифмическим весом порядка ρ_π^{-1}. С другой стороны, в силу непрерывности индикатора $h_\pi(\theta)$ найдется такая константа $\kappa_\pi \geqslant 1$, что для всех θ выполняются неравенства $\kappa_\pi^{-\rho_\pi} < h_\pi(\theta) < \kappa_\pi^{\rho_\pi}$. Значит, вне некоторого множества E_π нулевой радиальной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln|\pi(z)| \approx h_\pi(\theta)\mu_\pi(|z|)$ и асимптотическое равенство $\mu(|\pi(z)|) \approx h(\theta)|z|$, где $\theta := \arg z$, $h(\theta) := h_\pi^{\frac{1}{\rho_\pi}}(\theta)$. Осталось для любого $\varepsilon \in (0;\frac{1}{2})$ положить $\kappa_\varepsilon := \kappa_\pi$, в качестве множества E_ε выбрать множество E_π, дополненное кругом достаточно большого радиуса, и заключить, что вне этого множества выполняются оценки (4).

1.3. Сравнение симметричных произведений

Выберем положительное число $d < 1/2$ и две произвольные последовательности $\Lambda := \{\lambda_i\}$ и $\Lambda' := \{\lambda_i'\}$ комплексных чисел с единственной предельной точкой в бесконечности. Считаем, что

$$\min_{i\in\mathbf{N}} \min\{|\lambda_i|, |\lambda_i'|\} \geqslant 1 \tag{5}$$

и последовательность Λ' является *d-близкой* к последовательности Λ, т. е. для любого натурального i выполняется неравенство $|\lambda_i' - \lambda_i| \leqslant d|\lambda_i|$. Предположим еще, что последовательность Λ удовлетворяет условию: при некотором $c \in (0;+\infty)$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t} dt < c, \tag{6}$$

где $n(t;\Lambda)$ — число элементов последовательности Λ в круге $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| \leqslant t\}$. Из неравенства (6) следует, что для всех достаточно больших r выполняется неравенство

$$n(r;\Lambda) < c\mu(r). \tag{7}$$

Легко проверить, что последовательность Λ является $\frac{d}{1-d}$-близкой к последовательности Λ'. Отсюда вытекает, что для всех $r > 0$ выполняется неравенство $n(r;\Lambda') \leqslant n\left(\frac{r}{1-d};\Lambda\right)$. Используя это неравенство и соотношение (1), нетрудно показать, что для последовательности Λ' выполняется неравенство

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{\mu(r)} \int_0^r \frac{n(t;\Lambda')}{t} dt < c, \tag{8}$$

значит, для всех достаточно больших r выполняется неравенство

$$n(r;\Lambda') < c\mu(r). \tag{9}$$

Для любого положительного σ символами $\Delta_\sigma(\zeta)$ и $\Delta(\zeta,\sigma)$ обозначаем замкнутый круг $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| \leqslant \sigma|\zeta|\}$ и открытый круг $\{\zeta' : |\zeta' - \zeta| < \sigma\}$ соответственно. Символом $O(x)$ обозначаем произведение абсолютной положительной константы на $x > 0$. Составим по последовательностям Λ и Λ' произведения:

$$G(\zeta;\Lambda) := \prod \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right), \qquad G_\sigma(\zeta;\Lambda) := \prod_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right),$$

$$G(\zeta;\Lambda') := \prod \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i'}\right), \qquad G_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) := \prod_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda_i'}\right).$$

Предложение 1. *Составленные произведения сходятся на всей комплексной плоскости и существует такое $l' > 0$, что вне круга $|\zeta| \leqslant l'$ выполняются оценки:*

$$\ln|G(\zeta;\Lambda)| \leqslant O\,(c)\,\mu\,(|\zeta|)\,, \qquad \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda)| \leqslant O\,(c)\,\mu\,(|\zeta|)\,,$$
$$\ln|G(\zeta;\Lambda')| \leqslant O\,(c)\,\mu\,(|\zeta|)\,, \qquad \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda)| \leqslant O\,(c)\,\mu\,(|\zeta|)\,.$$

Доказательство. Функция $\mu(r)$ является уточненным весом нулевого порядка, значит, $\dfrac{\ln\mu(t)}{\ln t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Из (7) вытекает, что $\dfrac{\ln n(t;\Lambda)}{\ln t} \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно, показатель сходимости последовательности Λ равен нулю. Это означает, что произведение $G(\zeta;\Lambda)$ сходится на всей комплексной плоскости и представляет там целую функцию нулевого порядка. Убедимся в справедливости указанной для произведения $G(\zeta;\Lambda)$ оценки.

Для любого комплексного ζ справедливо неравенство

$$\ln|G(\zeta;\Lambda)| \leqslant \sum \ln\left(1+\frac{|\zeta|}{|\lambda_i|}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) dn(t;\Lambda).$$

Представим последний интеграл в виде суммы двух интегралов $I\,(0;|\zeta|)+I\,(|\zeta|\,;+\infty)$ и оценим каждый из них. Во-первых,

$$I\,(0;|\zeta|) := \int\limits_0^{|\zeta|} \ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) dn(t;\Lambda) = n(t;\Lambda)\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right)\bigg|_0^{|\zeta|} + \int_1^{|\zeta|} \frac{|\zeta| n(t;\Lambda)}{(t+|\zeta|)t}\,dt.$$

Из неравенств (6) и (7) вытекает, что при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются неравенства

$$I\,(0;|\zeta|) \leqslant c\mu\,(|\zeta|)\ln 2 + \int\limits_1^{|\zeta|} \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt \leqslant c\,(1+\ln 2)\,\mu\,(|\zeta|)\,. \tag{10}$$

Во-вторых, оценим интеграл

$$I\,(|\zeta|\,;+\infty) := \int\limits_{|\zeta|}^{\infty} \ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) dn(t;\Lambda) = n(t;\Lambda)\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right)\bigg|_{|\zeta|}^{+\infty} + \int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta| n(t;\Lambda)}{(t+|\zeta|)t}\,dt.$$

Для этого оценим сначала интеграл

$$J\,(|\zeta|\,;+\infty) := \int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta|\,\mu\,(t)}{(t+|\zeta|)\,t}dt = \mu(t)\ln\frac{t}{t+|\zeta|}\bigg|_{|\zeta|}^{+\infty} + \int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \mu'(t)\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) dt.$$

Замечаем, что при $t \geqslant |\zeta|$ выполняются неравенства

$$\frac{t+|\zeta|}{|\zeta|}\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) \leqslant \frac{t+|\zeta|}{|\zeta|}\frac{|\zeta|}{t} = 1+\frac{|\zeta|}{t} \leqslant 2,$$

значит,

$$\int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \mu'\,(t)\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) dt =$$
$$= \int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu'\,(t)\,t}{\mu\,(t)}\frac{t+|\zeta|}{|\zeta|}\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right)\frac{|\zeta|\,\mu\,(t)}{(t+|\zeta|)\,t}dt = o(1)J\,(|\zeta|\,;+\infty)\,, \qquad \zeta \to \infty.$$

Учитывая, что

$$\left|\mu(t)\ln\frac{t}{t+|\zeta|}\right| = \mu(t)\ln\left(1+\frac{|\zeta|}{t}\right) \leqslant |\zeta|\frac{\mu(t)}{t} \to 0, \qquad t \to +\infty,$$

получаем:

$$J\left(|\zeta|\,;+\infty\right) = \mu(|\zeta|)\ln 2 + o(1)J\left(|\zeta|\,;+\infty\right), \qquad \zeta\to\infty.$$

Значит,

$$J\left(|\zeta|\,;+\infty\right) = \frac{\ln 2}{1-o(1)}\mu(|\zeta|), \qquad \zeta\to\infty. \tag{11}$$

Наконец, в силу (7) для всех достаточно больших $|\zeta|$ выполняется неравенство

$$I\left(|\zeta|\,;+\infty\right) = \int\limits_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{|\zeta| n(t;\Lambda)}{(t+|\zeta|)t}dt \leqslant cJ\left(|\zeta|\,;+\infty\right).$$

Используя (11), получаем

$$I\left(|\zeta|\,;+\infty\right) \leqslant cJ\left(|\zeta|\,;+\infty\right) \leqslant \frac{c\ln 2}{1-o(1)}\mu(|\zeta|), \qquad \zeta\to\infty.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших $|\zeta|$ выполняется неравенство

$$I\left(|\zeta|\,;+\infty\right) \leqslant 2c\mu(|\zeta|)\ln 2. \tag{12}$$

Из (10) и (12) вытекает, что при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются неравенства

$$\ln|G(\zeta;\Lambda)| \leqslant I\left(0;|\zeta|\right) + I\left(|\zeta|\,;+\infty\right) \leqslant O(c)\mu(|\zeta|).$$

Аналогично доказывается справедливость трёх других соотношений. При доказательстве двух последних соотношений ссылки на неравенства (6) и (7) заменяем ссылками на неравенства (8) и (9). Предложение доказано. □

Из неравенств (7), (9) и определения логарифмического веса вытекает, что существует положительное число l'', удовлетворяющее условию: для любого $r > l''$ выполняются неравенства

$$\max\left\{n(3r;\Lambda), n(3r;\Lambda')\right\} < c\mu(3r) < 2c\mu(r), \qquad \mu'(r)r < \tfrac{1}{2}\mu(r).$$

Из оценок (4), в свою очередь, вытекает, что для любого $\varepsilon\in(0;\frac{1}{2})$ существует положительное число l_ε, удовлетворяющее условию: если $|z| > l_\varepsilon$ и $z\notin E_\varepsilon$, то $|\pi(z)| > \max\left\{l', l''\right\}$. Далее будем считать, что для любого $\varepsilon\in(0;\frac{1}{2})$ множество E_ε включает круг $\{z : |z|\leqslant l_\varepsilon\}$.

Предложение 2. *Если $d' := \dfrac{d}{1-d} < \sigma \leqslant 1$, то для любого $\varepsilon\in(0;\frac{1}{2})$ при $z\notin E_\varepsilon$ выполняются оценки:*

$$\left|\ln|G_\sigma(\pi\left(z\right);\Lambda'|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(\pi\left(z\right);\Lambda)|\right| \leqslant O\left(\frac{c\kappa_\varepsilon d}{\sigma-d'}\right)|z|\,, \tag{13}$$

$$\left|\ln|G_1(\pi\left(z\right);\Lambda)|\right| \leqslant O\left(c\kappa_\varepsilon\right)|z|\,. \tag{14}$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon\in(0;\frac{1}{2})$. Для любого комплексного ζ выполняется неравенство

$$\left|\ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda)|\right| \leqslant O\left(\frac{\sigma d}{\sigma-d'}\right)J(\zeta), \tag{15}$$

где

$$J(\zeta) = \sum_{\substack{|\lambda_i|\leqslant 2|\zeta|,\\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(\zeta)}} \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} + \sum_{\substack{|\lambda_i|>2|\zeta|,\\ \lambda_i\notin\Delta_\sigma(\zeta)}} \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1-\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} =: \Sigma_1(\zeta)+\Sigma_2(\zeta)$$

[11, теорема 1]. Пусть $\zeta := \pi(z)$. Оценим суммы $\Sigma_1(\zeta)$ и $\Sigma_2(\zeta)$. Так как $\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)$, то $\left|1 - \dfrac{\zeta}{\lambda_i}\right| > \left|\dfrac{\zeta}{\lambda_i}\right|\sigma$. Поэтому при $z \notin E_\varepsilon$,

$$\Sigma_1(\zeta) \leqslant \frac{1}{\sigma}\ n(2|\zeta|;\Lambda) \leqslant \frac{2c}{\sigma}\ \mu\left(|\zeta|\right) \leqslant \frac{2c\kappa_\varepsilon}{\sigma}\,|z|\,. \tag{16}$$

В то же время для членов ряда $\Sigma_2(\zeta)$, справедлива оценка

$$\frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} \leqslant \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{1 - \frac{|\zeta|}{|\lambda_i|}} < 2\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|,$$

откуда следует, что

$$\Sigma_2(\zeta) \leqslant 2|\zeta| \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{dn(t;\Lambda)}{t} = 2|\zeta|\left(\left.\frac{n(t;\Lambda)}{t}\right|_{2|\zeta|}^{+\infty} + \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{n(t;\Lambda)}{t^2}dt\right).$$

При этом

$$\frac{n(t;\Lambda)}{t} \leqslant c\frac{\mu(t)}{t} \to 0, \qquad t \to +\infty.$$

Значит, при $z \notin E_\varepsilon$ справедлива оценка

$$\Sigma_2(\zeta) \leqslant 2|\zeta| \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{n(t;\Lambda)}{t^2}dt \leqslant 4|\zeta|c \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}dt =: 4|\zeta|cJ(\zeta),$$

где

$$J(\zeta) := \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}dt = -\left.\frac{\mu(t)}{t}\right|_{2|\zeta|}^{+\infty} + \int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu'(t)t}{\mu(t)}\frac{\mu(t)}{t^2}dt \leqslant \frac{\mu(2|\zeta|)}{2|\zeta|} + \frac{1}{2}\int_{2|\zeta|}^{+\infty} \frac{\mu(t)}{t^2}dt = \frac{\mu(2|\zeta|)}{2|\zeta|} + \frac{1}{2}J(\zeta).$$

Следовательно, при $z \notin E_\varepsilon$ справедливы оценки

$$\Sigma_2(\zeta) \leqslant 4|\zeta|c\frac{\mu(2|\zeta|)}{|\zeta|} \leqslant 8c\mu(|\zeta|) \leqslant 8c\kappa_\varepsilon\,|z|\,. \tag{17}$$

Из (15), (16) и (17) следует, что оценка (13) справедлива.

Осталось доказать справедливость оценки (14). Легко заметить, что для любого комплексного ζ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -\ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda)| &= -\sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right| = \sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\frac{1}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\left(1 + \frac{\left|\frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}{\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|}\right) \leqslant J(\zeta) =: \Sigma_1(\zeta) + \Sigma_2(\zeta). \end{aligned}$$

Положим $\sigma = 1$. Из оценок (16) и (17) следует, что при $z \notin E_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$-\ln\left|G_1(\pi\,(z)\,;\Lambda)\right| \leqslant \left(2c\kappa_\varepsilon + 8c\kappa_\varepsilon\right)|z|\,.$$

С другой стороны, в силу предложения 1 при $z \notin E_\varepsilon$ справедливы оценки

$$\ln|G_1(\pi\,(z)\,;\Lambda)| \leqslant O(c)\mu(|\pi\,(z)\,|) \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)|z|.$$

Это означает, что при $z \notin E_\varepsilon$ выполняется оценка (14). Предложение доказано. □

2. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРИ СИЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

2.1. Сильное ограничение

Определение 5. Говорим, что целая функция π и логарифмический вес $\mu(r)$ порядка ρ подчинены сильному ограничению, если для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$ существует множество E_ε, радиальная плотность которого меньше ε, и такие константы $\kappa_\varepsilon \in [1; +\infty)$ и $h_\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$, что для любого $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$ выполняются условия: для любого $z \in \pi^{-1}(\xi) \setminus E_\varepsilon$ выполняются оценки (4); для любого $\zeta' \in \Delta(\zeta; h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon$ найдется $z' \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$, для которого выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \kappa_\zeta^- \leqslant \frac{\mu(|\zeta'|)}{|z'|} \leqslant \kappa_\zeta^+ \leqslant \kappa_\varepsilon, \tag{18}$$

где $\kappa_\zeta^+ - \kappa_\zeta^- \to 0$ при $\zeta \to \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$.

Фиксируя конкретную точку z' в слое $z' \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$, для которой выполняются оценки (18), мы определяем некоторое взаимно однозначное отображение $\Delta(\zeta; h_\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon \to \mathbf{C} \setminus E_\varepsilon$. Понятно, что это отображение является однозначной ветвью многозначного отображения $\pi^{-1}(\zeta')$. Обозначим ее символом $\pi_\zeta^{-1}(\zeta')$.

Условия сильного ограничения выполнены, если, например, $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \to \rho_\pi \in (0; 1)$ с постоянным положительным индикатором h_π, а функция $\mu(r)$ совпадает с произведением $h_\pi^{-\frac{1}{\rho_\pi}} \nu_\pi(\ln r)$, где $\nu_\pi(t)$ — обратная к функции $\mu_\pi(r) := r^{\rho_\pi(r)}$. Действительно, функция $\mu(r)$ является логарифмическим весом порядка $1/\rho_\pi$. При этом вне некоторого открытого множества E_π нулевой радиальной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln|\pi(z)| \approx h_\pi \mu_\pi(|z|)$ и асимптотическое равенство $\mu(|\pi(z)|) \approx |z|$. Значит, $\dfrac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \to 1$ при $\zeta \to \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\pi$ и $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$. С другой стороны, для любого $\zeta \in \hat{E}_\pi$ множество $\pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$ конечно. Пусть $\zeta \in \hat{E}_\pi$ и

$$\kappa_\pi^-(\zeta) := \min_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi} \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|}, \qquad \kappa_\pi^+(\zeta) := \max_{z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi} \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|}.$$

Тогда при достаточно большом $|\zeta|$ и любом $z \in \pi^{-1}(\zeta) \setminus E_\pi$ выполняются оценки

$$2^{-1} \leqslant \kappa_\pi^-(\zeta) \leqslant \frac{\mu(|\zeta|)}{|z|} \leqslant \kappa_\pi^+(\zeta) \leqslant 2.$$

При этом $\kappa_\pi^-(\zeta) \to 1$ и $\kappa_\pi^+(\zeta') \to 1$ при $\zeta \to \infty$, $\zeta \in \hat{E}_\varepsilon$. Осталось для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ в качестве множества E_ε выбрать множество E_π, дополненное кругом достаточно большого радиуса с центром в начале, и положить $\kappa_\varepsilon := 2$, $h_\varepsilon := \varepsilon$,

$$\kappa_\zeta^- := \inf_{\zeta' \in \Delta(\zeta;\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} \kappa_\pi^-(\zeta'), \qquad \kappa_{\zeta,z}^+ := \sup_{\zeta' \in \Delta(\zeta;\varepsilon) \cap \hat{E}_\varepsilon} \kappa_\pi^+(\zeta').$$

2.2. Подготовительные леммы

По-прежнему считаем, что последовательности Λ и Λ' удовлетворяют условиям (5), (6) и последовательность Λ' является *d-близкой* к последовательности Λ, $d \in (0; 1/2]$. В этом пункте докажем две леммы, касающиеся построения исключительных множеств малой радиальной плотности.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, любого $\sigma \in \left(0; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon}\right) \subseteq \left(0; \frac{3}{11}\right)$ и любого положительного N существует такое множество $E_{\varepsilon,\sigma,N}$ нулевой радиальной плотности, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon,\sigma,N}$ выполняется неравенство*

$$n_\sigma(\pi(z)) := \max\{n_\sigma(\pi(z), \Lambda), n_\sigma(\pi(z), \Lambda')\} < \kappa_\varepsilon N |z|,$$

где $n_\sigma(\zeta, \Gamma)$ — число точек последовательности Γ в круге $\Delta_\sigma(\zeta)$.

Доказательство. Пусть

$$\Lambda^{(0)} := \Lambda, \qquad E^{(0)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(0)}) \geqslant N\mu(|\zeta|) \right\},$$

ζ_0 — произвольный элемент $K^{(0)}$ с наименьшим модулем,

$$\Lambda^{(1)} := \left\{ \lambda_i \in \Lambda^{(0)} : \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta_0) \right\}, \qquad E^{(1)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(1)}) \geqslant N\mu(|\zeta|) \right\},$$

ζ_1 — произвольный элемент $E^{(1)}$ с наименьшим модулем,

$$\Lambda^{(2)} := \left\{ \lambda_i \in \Lambda^{(1)} : \lambda_i \notin \Delta_\sigma(\zeta_1) \right\}, \qquad E^{(2)} := \left\{ \zeta : n_\sigma(\zeta, \Lambda^{(2)}) \geqslant N\mu(|\zeta|) \right\}$$

и т. д. Если $E^{(k)} = \varnothing$, то полагаем $\Lambda^{(k+1)} = \Lambda^{(k+2)} = \ldots = \Lambda^{(k)}$. В результате этой процедуры построим конечную или бесконечную последовательность точек $\{\zeta_k : k \in K\}$ и бесконечную цепочку последовательностей $\left\{\Lambda^{(k)}\right\}$, которые обладают следующими свойствами:

1) $|\zeta_0| \leqslant |\zeta_1| \leqslant \ldots$, $\Lambda^{(0)} \supseteq \Lambda^{(1)} \supseteq \ldots$;

2) число точек ζ_k с ограниченным модулем конечно;

3) если круг $\Delta_\sigma(\zeta)$ не пересекается ни с каким кругом $\Delta_\sigma(\zeta_k)$, то $n_\sigma(\zeta, \Lambda) < N\mu(|\zeta|)$ [11, лемма 3].

Выберем произвольные $\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $\sigma \in \left(0; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon}\right)$. Пусть $\delta := \frac{2\sigma}{1-\sigma} \in \left(0; \frac{3}{4} - h_\varepsilon\right)$. Если $\zeta \notin \Delta_\delta(\zeta_k)$, то $\Delta_\sigma(\zeta) \cap \Delta_\sigma(\zeta_k) = \varnothing$. Отсюда следует, что для любой точки ζ, лежащей вне системы кругов $\Delta_\delta(\zeta_k)$ выполняется неравенство

$$n_\sigma(\zeta, \Lambda) < N\mu(|\zeta|).$$

Для произвольных $k, k' \in K$ множество $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ покрывается конечной совокупностью кружков

$$\Delta_{k,k',i} := \Delta\left(\zeta_{k,k',i}; h_\varepsilon\right), i \in \{1, \ldots, s_{k,k'}\},$$

где $\zeta_{k,k',i} \in \Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ и для любых $\zeta' \in \Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\kappa_\varepsilon^{-1} \leqslant \kappa_{k,k',i}^- \leqslant \frac{\mu\left(|\zeta'|\right)}{|z'|} \leqslant \kappa_{k,k',i}^+ \leqslant \kappa_\varepsilon, \tag{19}$$

в которых $z' := \pi_{k,k',i}^{-1}(\zeta') \in \pi^{-1}(\zeta') \setminus E_\varepsilon$ и $\kappa_{k,k',i}^+ - \kappa_{k,k',i}^- \to 0$ при $\zeta_k \to \infty$, $\zeta_k \in \hat{E}_\varepsilon$. Нам потребуется верхняя оценка числа $s_{k,k'}$. Получим ее. Множество $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$ содержится в квадрате со стороной $\delta|\zeta_{k'}|$. Этот квадрат покрывается совокупностью квадратиков со стороной $\dfrac{h_\varepsilon}{\sqrt{2}}$, состоящей из $\dfrac{2\delta^2 |\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2}$ элементов. Выберем из этой совокупности лишь те квадратики, которые пересекаются с множеством $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$. Каждый из этих квадратиков помещается в круг радиуса h_ε, центр которого лежит в множестве $\Delta(\zeta_k; \delta\zeta_{k'}) \cap \hat{E}_\varepsilon$. Значит,

$$s_{k,k'} \leqslant \frac{2\delta^2 |\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2} \leqslant \frac{2|\zeta_{k'}|^2}{h_\varepsilon^2}.$$

Положим

$$E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')} := \bigcup_{k \in K} \bigcup_{i=1}^{s_{k,k'}} \pi_{k,k',i}^{-1}\left(\Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon\right), \qquad E'_{\varepsilon,\sigma,N} := \bigcup_{k \in K} E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')}.$$

Если $z \notin E_\varepsilon \cup E'_{\varepsilon,\sigma,N}$, то $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')}$ при любом $k \in K$. Значит, $\zeta := \pi(z) \in \hat{E}_\varepsilon$ и $\zeta \notin \pi\left(E_{\varepsilon,\sigma,N}^{(k')}\right)$. Отсюда вытекает, что точка ζ не лежит в множестве $\Delta_\delta(\zeta_k) \cap \hat{E}_\varepsilon$ при любом k. Следовательно, точка ζ лежит вне системы кругов $\Delta_\delta(h_k)$. Из вышеизложенного следует, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_{\varepsilon,\sigma,N}$ выполняются неравенства

$$n_\sigma(\pi(z), \Lambda) < N\mu(|\pi(z)|) \leqslant \kappa_\varepsilon N|z|.$$

Оценим радиальную плотность множества $E'_{\varepsilon,\sigma,N}$. Для этого оценим радиальную плотность множества $E^{(k')}_{\varepsilon,\sigma,N}$. Если $z', z'' \in \pi^{-1}_{k,k',i}\left(\Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon\right)$, то образы $\zeta' := \pi(z')$ и $\zeta'' := \pi(z'')$ лежат в множестве $\Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon$. В силу оценок (19)

$$|z'| - |z''| \leqslant \frac{\mu(|\zeta'|)}{\kappa^-_{k,k',i}} - \frac{\mu(|\zeta''|)}{\kappa^+_{k,k',i}} \leqslant \frac{\mu(|\zeta_k|(1+\delta+h_\varepsilon))}{\kappa^-_{k,k',i}} - \frac{\mu(|\zeta_k|(1-\delta-h_\varepsilon))}{\kappa^+_{k,k',i}} =: \delta_{k,k',i} r_{k,k',i},$$

где

$$r_{k,k',i} := \frac{\mu(|\zeta_k|(1-\delta-h_\varepsilon))}{\kappa^+_{k,k',i}}, \qquad \delta_{k,k',i} := \frac{\kappa^+_{k,k',i}}{\kappa^-_{k,k',i}} \frac{\mu(|\zeta_k|(1+\delta+h_\varepsilon))}{\mu(|\zeta_k|(1-\delta-h_\varepsilon))} - 1.$$

При этом

$$1+\delta+h_\varepsilon \in \left(1; \frac{7}{4}\right), \qquad 1-\delta-h_\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}; 1\right).$$

В силу (1)

$$\delta_{k,k',i} \to 0, \qquad |\zeta_k| \to \infty.$$

Множество $\pi^{-1}_{k,k',i}\left(\Delta_{k,k',i} \cap \hat{E}_\varepsilon\right)$ лежит в кольце

$$\{z : r_{k,k',i} \leqslant |z| \leqslant (1+\delta_{k,k',i})\, r_{k,k',i}\},$$

значит, множество $E^{(k')}_{\varepsilon,\sigma,N}$ покрывается системой колец

$$\Sigma(k') := \{\{z : ||z| - r_{k,k',i}| \leqslant \delta_{k,k',i} r_{k,k',i}\} : \qquad k \in K, \qquad i \in \{1, ..., s_{k,k'}\}\}.$$

Пусть

$$t := \frac{1}{1-\delta-h_\varepsilon} \nu(\kappa_\varepsilon r).$$

Тогда $r = \kappa_\varepsilon^{-1} \mu(t(1-\delta-h_\varepsilon))$. Если $r_{k,k',i} \leqslant r$, то

$$|\zeta_k| \leqslant \frac{1}{1-\delta-h_\varepsilon} \nu\left(\kappa^+_{k,k',i} r\right) \leqslant t.$$

При этом для достаточно больших r выполняются неравенства

$$\mu(t(1-\delta-h_\varepsilon)) \geqslant \mu\left(\frac{1}{4}t\right) \geqslant \frac{1}{2}\mu(t).$$

Поэтому для любого $\varepsilon' > 0$ при достаточно больших r получаем:

$$m_{\Sigma(k')}(r) = \frac{1}{r} \sum_{|r_{k,k',i}| \leqslant r} \delta_{k,k',i} r_{k,k',i} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\kappa_\varepsilon}{\mu(t(1-\delta-h_\varepsilon))} \sum_{|\zeta_k| \leqslant t} \mu(|\zeta_k|(1-\delta-h_\varepsilon)) \sum_{i=1}^{s_{k,k'}} \frac{\delta_{k,k',i}}{\kappa^+_{k,k',i}} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{4c\mu(t)} \sum_{t' < |\zeta_k| \leqslant t} N\mu(|\zeta_k|),$$

где t' выбрано из условия

$$\delta_{k,k',i} < \frac{\varepsilon' \kappa^+_{k,k',i} h^2_\varepsilon}{16 c \kappa_\varepsilon |\zeta_{k'}|^2} N, \qquad i \in \{1, ..., s_{k,k'}\}, \qquad |\zeta_k| > t'.$$

Задача свелась к оценке суммы

$$\sum_{t' < |\zeta_k| \leqslant t} N\mu(|\zeta_k|) \leqslant \sum_{|\zeta_k| \leqslant t} N\mu(|\zeta_k|).$$

Учитывая, что в каждом круге $\Delta_\sigma(\zeta_k)$ содержится не менее $N\mu(|\zeta_k|)$ точек из $\Lambda^{(k)}$ и при этом разные круги содержат только разные точки, делаем вывод, что для $t > l''$ выполняются неравенства

$$\sum_{|\zeta_k|\leqslant t} N\mu\left(|\zeta_k|\right) \leqslant \sum_{|\zeta_k|\leqslant t} n_\sigma(\zeta_k, \Lambda^{(k)}) \leqslant n(t(1+\sigma), \Lambda) \leqslant n(2t, \Lambda) \leqslant 2c\mu\left(t\right).$$

Значит, для достаточно больших r выполняется неравенство $m_{\Sigma(k')}(r) < \varepsilon'$. Из произвольности выбора $\varepsilon' > 0$ вытекает, что множество $E^{(k')}_{\varepsilon,\sigma,N}$ имеет нулевую радиальную плотность. Отсюда следует, что множество $E'_{\varepsilon,\sigma,N}$ тоже имеет нулевую радиальную плотность.

Далее повторим рассуждения, но уже по отношению к последовательности Λ'. В результате будет построено множество $E''_{\varepsilon,\sigma,N}$ нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E''_{\varepsilon,\sigma,N}$ выполняется неравенство

$$n_\sigma(\pi\left(z\right), \Lambda') < \kappa_\varepsilon N\left|z\right|.$$

Осталось положить $E_{\varepsilon,\sigma,N} = E'_{\varepsilon,\sigma,N} \cup E''_{\varepsilon,\sigma,N}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon \in (0; 1/2)$ существует такое множество E'_ε, радиальная плотность которого равна нулю, что при любом $t \in (0; 1]$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется оценка*

$$n_t(\pi\left(z\right)) := \max\left\{n_t(\pi\left(z\right); \Lambda), n_t(\pi\left(z\right); \Lambda')\right\} \leqslant O\left(c\kappa_\varepsilon\right)\sqrt{t}\left|z\right|.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. Из включения $h_\varepsilon \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ вытекает, что $\frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon} \in \left(\frac{1}{9}; \frac{3}{11}\right)$. Выберем произвольное $\sigma_0 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{3-4h_\varepsilon}{11-4h_\varepsilon}\right)$ и для любого натурального k положим $\sigma_k := 2^{-2k}\sigma_0$, $N_k := c2^{-k}$. По лемме 1 существует такое множество $E_{\varepsilon,k}$, радиальная плотность которого равна нулю, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon,k}$ выполняется неравенство $n_{\sigma_{k-1}}(\pi\left(z\right)) < \kappa_\varepsilon N_k\left|z\right|$. Если $t \in [\sigma_k; \sigma_{k-1})$, то $n_t(\pi\left(z\right)) \leqslant n_{\sigma_{k-1}}(\pi\left(z\right))$. Значит, для всех $t \in [\sigma_k; \sigma_{k-1})$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E_{\varepsilon,k}$ имеет место оценка

$$n_t(\pi\left(z\right)) < \kappa_\varepsilon N_k\left|z\right|.$$

Положим

$$E'_\varepsilon := \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} E_{\varepsilon,k}.$$

Радиальная плотность множества E'_ε равна нулю. Выберем произвольное $t \in (0; \sigma_0)$ и определим k из условия

$$\frac{1}{9}2^{-2k} \leqslant \sigma_k \leqslant t < \sigma_{k-1}.$$

Если $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$, то

$$n_t(\pi\left(z\right)) \leqslant \kappa_\varepsilon N_k\left|z\right| = c\kappa_\varepsilon 2^{-k}\left|z\right| \leqslant 3c\kappa_\varepsilon\sqrt{t}\left|z\right| = O\left(c\kappa_\varepsilon\right)\sqrt{t}\left|z\right|.$$

Если же $t \in [\sigma_0; 1]$ и $z \notin E_\varepsilon$, то

$$n_t(\pi\left(z\right)) \leqslant \max\left\{n(2\left|\pi\left(z\right)\right|, \Lambda), n(2\left|\pi\left(z\right)\right|, \Lambda')\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2c\mu\left(\left|\pi\left(z\right)\right|\right) \leqslant 6\sqrt{\sigma_0}c\kappa_\varepsilon\left|z\right| \leqslant 6c\kappa_\varepsilon\sqrt{t}\left|z\right| = O\left(c\kappa_\varepsilon\right)\sqrt{t}\left|z\right|.$$

Лемма доказана. □

2.3. Сравнение симметричных произведений

Для любых $\alpha, \beta \in [0; 1]$ обозначим

$$I^{(1)}_\alpha(\zeta) := \alpha\int\limits_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda)}{t(t+\alpha)}dt, \qquad I^{(2)}_\alpha(\zeta) := \alpha\int\limits_0^1 \frac{n_t(\zeta; \Lambda')}{t(t+\alpha)}dt,$$

$$I^{(1)}_{\alpha,\beta}(\zeta) := \alpha \int\limits_{\beta}^{1} \frac{n_t(\zeta;\Lambda)}{(t+1)\,(t+\alpha)} dt, \qquad I^{(2)}_{\alpha,\beta}(\zeta) := \alpha \int\limits_{\beta}^{1} \frac{n_t(\zeta;\Lambda')}{(t+1)\,(t+\alpha)} dt.$$

Пусть

$$I(\zeta) := I^{(2)}_{1}(\zeta) - I^{(1)}_{1}(\zeta) = \int\limits_{0}^{1} \frac{n_t(\zeta;\Lambda') - n_t(\zeta;\Lambda)}{t(t+1)} dt.$$

Тогда для любого комплексного ζ выполняются неравенства [11, лемма 5]

$$-I^{(1)}_{\alpha_1}(\zeta) - \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} I^{(1)}_{\alpha_1,\beta_1}(\zeta) \leqslant I(\zeta) \leqslant I^{(2)}_{\alpha_2}(\zeta) + \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} I^{(2)}_{\alpha_2,\beta_2}(\zeta), \tag{20}$$

где

$$\alpha_1 := \frac{d}{1+d}, \qquad \alpha_2 := d, \qquad \beta_1 := \frac{1-d}{1+d}, \qquad \beta_2 := 1-2d, \qquad d \in (0;1/2]\,.$$

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ и любого $d \in (0;\frac{1}{2}]$ при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняются оценки:*

$$|I(\pi(z))| \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\sqrt{d}\,|z|\,, \qquad \left|I^{(1)}_{1}(\pi(z))\right| \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\,|z|\,.$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \pi(z)$. При $z \notin E_\varepsilon$ имеем:

$$\frac{1-\alpha_i}{\alpha_i} I^{(i)}_{\alpha_i,\beta_i}(\zeta) \leqslant 2c\,(1-\alpha_i)\,\mu\,(|\zeta|) \int\limits_{\beta_i}^{1} \frac{dt}{(t+1)\,(t+\alpha_i)} \leqslant$$

$$\leqslant 4cd\mu\,(|\zeta|) \leqslant 2\sqrt{2}c\sqrt{d}\mu\,(|\zeta|) \leqslant O\,(c\kappa_\varepsilon)\,\sqrt{d}\,|z|\,, \qquad i \in \{1;2\}\,.$$

Для оценки интеграла $I^{(i)}_{\alpha_i}(\zeta)$ воспользуемся леммой 2. Согласно этой лемме $n_t\,(\zeta) \leqslant O\,(c\kappa_\varepsilon)\,\sqrt{t}\,|z|$ при $t \in (0;1]$ и $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$. Значит, при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ получаем:

$$I^{(i)}_{\alpha_i}(\zeta) \leqslant \alpha_i \int\limits_{0}^{1} \frac{n_t\,(\zeta)}{t\,(t+\alpha_i)} dt \leqslant \alpha_i O\,(c\kappa_\varepsilon)\,|z| \int\limits_{0}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+\alpha_i)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\alpha_i} O\,(c\kappa_\varepsilon)\,|z| \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)} \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\sqrt{d}\,|z|\,, \qquad i \in \{1;2\}\,.$$

Из неравенств (20) вытекает первая из требуемых оценок. Вторая оценка практически очевидна. При $z \notin E_\varepsilon$ имеем:

$$0 \leqslant I^{(1)}_{1}(\zeta) = \int\limits_{0}^{1} \frac{n_t(\zeta;\Lambda)}{t(t+1)} dt \leqslant O\,(c\kappa_\varepsilon)\,|z| \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt \leqslant O\,(c\kappa_\varepsilon)\,|z|\,.$$

Лемма доказана. □

Составим суммы:

$$A_\sigma(\zeta;\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda_i}\right|, \qquad A_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\left|1 - \frac{\zeta}{\lambda'_i}\right|,$$

$$L_\sigma(\zeta;\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(z)} \ln\frac{|\zeta| + |\lambda_i - \zeta|}{|\lambda_i|}, \qquad L_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) = \sum_{\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)} \ln\frac{|\zeta| + |\lambda'_i - \zeta|}{|\lambda'_i|}$$

и обозначим $n_{t,\sigma}(\zeta;\Lambda'|\Lambda)$ число точек λ'_i, принадлежащих кругу $\Delta_t(\zeta)$, с номерами i, удовлетворяющими условию $\lambda_i \in \Delta_\sigma(\zeta)$. Справедливы соотношения:

$$A_\sigma(\zeta;\Lambda) - L_\sigma(\zeta;\Lambda) = n_\sigma(\zeta;\Lambda)\ln\frac{\sigma}{1+\sigma} - \int\limits_{0}^{\sigma} \frac{n_t(\zeta;\Lambda)}{t(1+t)} dt; \tag{21}$$

$$A_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) = n_{s,\sigma}(\zeta;\Lambda'|\Lambda)\ln\frac{s}{1+s} - \\ - \int\limits_0^s \frac{n_{t,\sigma}(\zeta;\Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)}dt, \qquad s = d+\sigma+\sigma d; \tag{22}$$

$$|L_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(\zeta;\Lambda)| \leqslant n\,(2\,|\zeta|\,;\Lambda)\,2d; \tag{23}$$

$$L_\sigma(\zeta;\Lambda) \leqslant \int_0^{2|\zeta|} \frac{n\,(t;\Lambda)}{t}dt, \qquad L_\sigma(\zeta;\Lambda') \leqslant \int_0^{2|\zeta|} \frac{n\,(t;\Lambda')}{t}dt. \tag{24}$$

Равенства (21) и (22) выполняются для любых комплексных ζ, любых $\sigma > 0$ и $d \in (0;1/2]$ [11, лемма 6]. Неравенства (23) и (24) справедливы для любых комплексных ζ, любых $\sigma \in (0;1]$ и $d \in (0;1/2]$ [11, лемма 7].

Предложение 3. *Для любого $\varepsilon \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ и любого $d \in (0;\frac{1}{2}]$ при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняются оценки:*

$$|\ln|G(\pi(z);\Lambda')| - \ln|G(\pi(z);\Lambda)|| \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\sqrt{d}\,|z|\,, \tag{25}$$

$$|\ln|G(\pi(z);\Lambda)|| \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\,|z|\,. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \pi(z)$. Имеют место следующие представления:

$$\ln|G(\zeta;\Lambda)| = A_\sigma(\zeta;\Lambda) + \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda)| = (A_\sigma(\zeta;\Lambda) - L_\sigma(\zeta;\Lambda)) + L_\sigma(\zeta;\Lambda) + \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda)|\,, \tag{27}$$

$$\ln|G(\zeta;\Lambda')| = A_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) + \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda)| = \\ = (A_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda)) + L_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda) + \ln|G_\sigma(\zeta;\Lambda'|\Lambda)|\,. \tag{28}$$

Используя (27) и (28), получим:

$$|\ln|G(z;\Lambda')| - \ln|G(z;\Lambda)|| \leqslant |(A_\sigma(z;\Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda'|\Lambda)) - (A_\sigma(z;\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda))| + \\ + |L_\sigma(z;\Lambda'|\Lambda) - L_\sigma(z;\Lambda)| + |\ln|G_\sigma(z;\Lambda'|\Lambda)| - \ln|G_\sigma(z;\Lambda)||\,. \tag{29}$$

Пусть $d \in (0;1/4)$. Положим в (29) $\sigma = 1$ и применим к соответствующим компонентам полученного неравенства соотношения (21), (22) и (23). Замечая, что $n_{1+2d,1}(\zeta;\Lambda'|\Lambda) = n_1(\zeta;\Lambda)$, получим:

$$|\ln|G(\zeta;\Lambda')| - \ln|G(\zeta;\Lambda)|| \leqslant |I(\zeta)| + \left|\int\limits_0^1 \frac{n_t(\zeta;\Lambda')}{t(1+t)}dt - \int\limits_0^{1+2d} \frac{n_{t,1}(\zeta;\Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)}dt\right| + n_1(\zeta;\Lambda)\ln\frac{1+2d}{1+d} + \\ + n\,(2\,|\zeta|\,;\Lambda)\,2d + |\ln|G_1(\zeta;\Lambda'|\Lambda)| - \ln|G_1(\zeta;\Lambda)||\,.$$

Если $t \in (0, 1-2d)$, то в силу $\frac{d}{1-d}$-близости последовательности Λ к последовательности Λ', из включения $\lambda'_i \in \Delta_t(\zeta)$ следует включение $\lambda_i \in \Delta_1(\zeta)$. Поэтому при таких значениях t выполняется равенство $n_{t,1}(\zeta;\Lambda'|\Lambda) = n_t(\zeta;\Lambda')$. Отсюда вытекает, что

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{n_t(\zeta;\Lambda')}{t(1+t)}dt - \int\limits_0^{1+2d} \frac{n_{t,1}(\zeta;\Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)}dt\right| \leqslant \int\limits_{1-2d}^1 \frac{n_t(\zeta;\Lambda')}{t(1+t)}dt + \int\limits_{1-2d}^{1+2d} \frac{n_t(\zeta;\Lambda'|\Lambda)}{t(1+t)}dt \leqslant \\ \leqslant 2n(3\,|\zeta|\,;\Lambda') \int\limits_{1-2d}^{1+2d} \frac{dt}{t(1+t)} \leqslant 2n(3\,|\zeta|\,;\Lambda')\ln\frac{(1+2d)\,(1-d)}{(1-2d)\,(1+d)} \leqslant O(D)n(3\,|\zeta|\,;\Lambda').$$

В силу предложения 2 и леммы 3 при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$

$$|\ln|G(\zeta;\Lambda')| - \ln|G(\zeta;\Lambda)|| \leqslant |I(\zeta)| + |\ln|G_1(\zeta;\Lambda'|\Lambda)| - \ln|G_1(\zeta;\Lambda)|| + O(D)n(3\,|\zeta|) \leqslant O\left(c\kappa_\varepsilon\right)\sqrt{d}\,|z|\,.$$

Таким образом, оценка (25) доказана в случае $d \in (0;1/4)$.

Пусть $d \in [1/4;1/2]$. Положим в (27) $\sigma = 1$ и применим к первому слагаемому в сумме справа соотношение (21). Получим равенство

$$\ln|G(\zeta;\Lambda)| = -n_1(\zeta;\Lambda)\ln 2 - I_1^{(1)}(\zeta) + L_1(\zeta;\Lambda) + \ln|G_1(\zeta;\Lambda)|\,.$$

Аналогичное равенство справедливо и для последовательности Λ':

$$\ln|G(\zeta;\Lambda')| = -n_\sigma(\zeta;\Lambda')\ln 2 - I_1^{(2)}(\zeta) + L_1(\zeta;\Lambda') + \ln|G_1(\zeta;\Lambda')|\,.$$

Из этих равенств вытекает оценка

$$|\ln|G(\zeta;\Lambda')| - \ln|G(\zeta;\Lambda)|| \leqslant |I(\zeta)| + n(2|\zeta|)2\ln 2 +$$
$$+L_1(\zeta;\Lambda) + |\ln|G_1(\zeta;\Lambda)|| + L_1(\zeta;\Lambda') + |\ln|G_1(\zeta;\Lambda')||\,.$$

Из этой оценки, неравенств (24), предложения 2 и леммы 3 вытекает, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется неравенство (25).

Для доказательства оценки (26) воспользуемся соотношением (27), в котором опять положим $\sigma = 1$. Получаем

$$|\ln|G(\zeta;\Lambda)|| \leqslant n_1(\zeta;\Lambda)\ln 2 + I_1^{(1)}(\zeta) + L_1(\zeta;\Lambda) + |\ln|G_1(\zeta;\Lambda)||\,.$$

Из этой оценки, неравенств (24), предложения 2 и леммы 3 вытекает, что при $z \notin E_\varepsilon \cup E'_\varepsilon$ выполняется неравенство (26). Предложение доказано. □

3. СРАВНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ СИЛЬНОМ ОГРАНИЧЕНИИ

3.1. Собственное исчерпание плоскости

Сначала докажем одно предложение, которое имеет самостоятельное значение.

Определение 6. Говорим, что *комплексная плоскость допускает собственное π-исчерпание*, если существуют открытые множества G_n, удовлетворяющие условиям: сужение функции $\pi(z)$ на каждое множество G_n является собственным отображением на некоторую односвязную область и

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{C}. \tag{30}$$

Сужение функции $\pi(z)$ на открытое множество G_n является собственным отображением на $\pi(G_n)$ тогда и только тогда, когда справедлива следующая импликация: если последовательность $z_k \in G_n$ не имеет в G_n предельных точек, то последовательность $\pi(z_k)$ не имеет предельных точек в $\pi(G_n)$. Воспользуемся этим описанием собственных отображений и покажем, что при выполнении слабого ограничения на выбор целой функции $\pi(z)$ (см. п. 1.2) комплексная плоскость допускает собственное π-исчерпание.

Предположим, что существуют положительные числа κ, q и последовательность r_n, удовлетворяющая условию

$$0 < r_1 \leqslant r_n < r_{n+1} \leqslant q r_n \to \infty, \qquad n \to \infty,$$

такая, что при всех действительных θ выполняется оценка

$$\kappa^{-1} r_n \leqslant \mu(|\pi(r_n e^{i\theta})|). \tag{31}$$

Пусть

$$G_n := \pi^{-1}(\Delta(0;t_n)) \cap \Delta(0;r_n)\,,$$

где $t_n := \nu((2\kappa)^{-1} r_n)$, ν — обратная к функции μ.

Предложение 4. *При достаточно большом n сужение функции $\pi(z)$ на множество G_n является собственным отображением на круг $\Delta(0;t_n)$ и при этом выполняются соотношения* (30).

Доказательство. Во-первых, убедимся, что для любого натурального n выполняется соотношение $\pi(G_n) = \Delta(0;t_n)$. Вложение $\pi(G_n) \subseteq \Delta(0;t_n)$ является очевидным. Проверим выполнимость обратного вложения $\Delta(0;t_n) \subseteq \pi(G_n)$. Пусть $\zeta \in \Delta(0;t_n)$. Если $|z| = r_n$, то в силу (1) и (31) при достаточно больших n

$$\kappa^{-1} r_n \leqslant \mu(|\pi(z)|) \leqslant \frac{\mu(|\pi(z)|)}{\mu\left(|\pi(z)|\left(1-\left|\frac{\pi(0)}{\pi(z)}\right|\right)\right)}\mu(|\pi(z)-\pi(0)|) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu(|\pi(z)|)}{\mu\left(|\pi(z)|\left(1-\frac{|\pi(0)|}{\nu(\kappa^{-1}r_n)}\right)\right)}\mu(|\pi(z)-\pi(0)|) \leqslant 2\mu(|\pi(z)-\pi(0)|).$$

Значит,

$$|-\zeta+\pi(0)| = |\zeta-\pi(0)| < t_n := \nu((2\kappa)^{-1} r_n) \leqslant |\pi(z)-\pi(0)|.$$

По теореме Руше функции $\pi-\pi(0)$ и $\pi-\zeta$ имеют в круге $\Delta(0;r_n)$ одинаковое число корней. Так как ноль является корнем функции $\pi-\pi(0)$, то найдется такое $z \in \Delta(0;r_n)$, что $\zeta = \pi(z)$. Это означает, что

$$z \in \pi^{-1}(\zeta) \cap \Delta(0;r_n) \subseteq G_n$$

или $\zeta \in \pi(G_n)$ и, следовательно, $\Delta(0;t_n) \subseteq \pi(G_n)$.

Во-вторых, убедимся, что при достаточно большом n сужение функции π на G_n является собственным отображением на круг $\Delta(0;t_n)$. Допустим, что последовательность $z_k \in G_n$ не имеет в G_n предельных точек и предположим, что $\zeta_0 \in \Delta(0;t_n)$ — предельная точка последовательности $\pi(z_k)$. Тогда существует подпоследовательность z_{k_m} такая, что

$$z_{k_m} \to z_0, \qquad \pi(z_{k_m}) \to \zeta_0, \qquad \pi(z_0) = \zeta_0, \qquad |z_0| \leqslant r_n.$$

Так как $\zeta_0 \in \Delta(0;t_n)$, то $|\zeta_0-\pi(0)| < t_n$, и в силу строгой монотонности функции μ имеем:

$$2\kappa\mu(|\zeta_0-\pi(0)|) < 2\kappa\mu(t_n) = r_n.$$

В силу (31) для достаточно большого n и любого действительного θ получаем:

$$2\kappa\mu(|\zeta_0-\pi(0)|) < r_n \leqslant 2\kappa\mu(|\pi(r_n e^{i\theta})-\pi(0)|).$$

Следовательно, в силу строгой монотонности функции μ для любого действительного θ будет выполняться неравенство

$$|\pi(z_0)-\pi(0)| = |\zeta_0-\pi(0)| < \left|\pi(r_n e^{i\theta})-\pi(0)\right|.$$

Так как $|z_0| \leqslant r_n$, то $|z_0| < r_n$, и, значит,

$$z_0 \in \pi^{-1}(\Delta(0;t_n)) \cap \Delta(0;r_n) =: G_n.$$

Это противоречит предположению, что последовательность z_k не имеет предельных точек в G_n.

В-третьих, докажем выполнимость соотношений (30). Так как последовательности t_n и r_n возрастают, то

$$\Delta(0;t_1) \subseteq \Delta(0;t_2) \subseteq \ldots, \qquad \Delta(0;r_1) \subseteq \Delta(0;r_2) \subseteq \ldots.$$

Отсюда следует, что $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$. Так как $t_n \to \infty$ и $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(0;t_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta(0;r_n) = \mathbf{C}.$$

Это означает, что для всякого комплексного z найдется такое натуральное n, что $\pi(z) \in \Delta(0;t_n)$ и $z \in \Delta(0;r_n)$. Из этих включений вытекает, что

$$z \in \pi^{-1}(\Delta(0;t_n)) \cap \Delta(0;r_n) =: G_n.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{C}.$$

Предложение доказано. □

Предложения такого типа используются при переходах от задач спектрального синтеза к эквивалентным задачам локального описания [4]. Нас же сейчас интересует лишь одно следствие предложения 4. Отметим предварительно, что при доказательстве этого предложения условие $r_{n+1} \leqslant q r_n$ не использовалось, но оно будет использовано ниже при доказательстве следствия.

Следствие. *Если для целой π-симметричной функции $f(\pi(z))$ при некоторых $a, b > 0$ выполняется равномерная по z оценка*

$$\ln |f(\pi(z))| \leqslant a\,|z| + b,$$

то вне круга $\Delta\,(0;t)$ при достаточно большом t выполняется оценка

$$\ln |f(\zeta)| \leqslant 4aq\kappa\mu(|\zeta|) + b.$$

Доказательство. Пусть $t_n \leqslant |\zeta - \pi(0)| \leqslant t_{n+1}$. По предложению 4 при достаточно большом n существует $z \in G_{n+1} \subseteq \Delta\,(0; r_{n+1})$, для которого $\zeta = \pi(z)$. Значит, вне круга $\Delta\,(0;t)$ при достаточно большом t выполняются оценки

$$\ln |f(\zeta)| = \ln |f(\pi(z))| \leqslant \ln M_{f\circ\pi}(r_{n+1}) \leqslant \ln M_{f\circ\pi}(q r_n) \leqslant a q r_n + b =$$
$$= 2aq\kappa\mu\,(t_n) + b \leqslant 2aq\kappa\mu\,(|\zeta - \pi(0)|) + b = 2aq\kappa \frac{\mu\,(|\zeta - \pi(0)|)}{\mu\,(|\zeta|)} \mu\,(|\zeta|) + b \leqslant 4aq\kappa\mu\,(|\zeta|) + b.$$

Следствие доказано. □

3.2. Сравнение симметричных функций

Теперь все готово для доказательства основной теоремы сравнения, которая предполагает наложение сильного ограничения на выбор целой функции $\pi(z)$. Пусть $f(\pi(z))$ и $g(\pi(z))$ — две целые π-симметричные функции экспоненциального типа; Λ и Λ' — последовательности корней целых функций $f\,(\zeta)$ и $g\,(\zeta)$ соответственно, лежащих вне единичного круга $\Delta\,(0;1)$; $d \in (0;1/2]$. В силу следствия из предложения 4

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < +\infty, \qquad \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_g(r)}{\mu(r)} < +\infty.$$

Теорема 1. *Если*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{\mu(r)} < c \in (0;+\infty) \tag{32}$$

и последовательность Λ' является d-близкой к последовательности Λ, то для любого $\varepsilon \in (0;1/2)$ существует такое множество $\mathscr{E}_\varepsilon \supseteq E_\varepsilon$, радиальная плотность которого меньше ε, что при $z \notin \mathscr{E}_\varepsilon$ выполняется оценка

$$|\ln |f(\pi(z))| - \ln |g(\pi(z))|| \leqslant O\,(c\kappa_\varepsilon)\,\sqrt{d}\,|z| + |m-n|\,\kappa_\varepsilon\,|z|^{\frac{2}{1+\rho}}\,, \tag{33}$$

где m и n — число корней (с учетом кратности) функций $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ соответственно в единичном круге $\Delta\,(0;1)$.

Доказательство. Всякий логарифмический вес является уточненным весом нулевого порядка, значит,

$$\frac{\ln \mu(r)}{\ln r} \to 0, \qquad r \to \infty.$$

В силу следствия из предложения 4 функции $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ являются целыми функциями нулевого порядка. По теореме Адамара для любых ζ имеем:

$$f(\zeta) = p(\zeta)G(\zeta;\Lambda), \qquad g(\zeta) = q(\zeta)G(\zeta;\Lambda'),$$

где $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ — некоторые многочлены с корнями в единичном круге $\Delta(0;1)$. Значит, имеют место представления

$$f(\pi(z)) = p(\pi(z))\,G(\pi(z);\Lambda), \qquad g(\pi(z)) = q(\pi(z))\,G(\pi(z);\Lambda').$$

Пусть m и n — степени многочленов $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ соответственно. Допустим, что функция $f(\zeta)$ имеет в нуле корень кратности $m_0 \in [0;m]$. По формуле Йенсена из неравенства (32) вытекает, что при достаточно больших r и некотором $\varepsilon_0 > 0$ выполняются неравенства

$$m_0 \ln r + \int_0^r \frac{n(t;\Lambda) + m - m_0}{t}dt < (c - \varepsilon_0)\,\mu(r) - \ln\frac{\left|f^{(m_0)}(0)\right|}{m_0!}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\mu(r)}\int_0^r \frac{n(t;\Lambda)}{t}dt + \varepsilon_0 < c - \frac{m\ln r}{\mu(r)} - \frac{1}{\mu(r)}\ln\frac{\left|f^{(m_0)}(0)\right|}{m_0!}.$$

Отсюда следует, что последовательность Λ удовлетворяет условию (6). По предложению 3 для любого $\varepsilon \in (0;\frac{1}{2})$ существует такое множество $\mathscr{E}_\varepsilon \supseteq E_\varepsilon$, радиальная плотность которого меньше ε, что при $z \notin \mathscr{E}_\varepsilon$ выполняется оценка

$$\left|\ln|G(\pi(z);\Lambda)| - \ln|G(\pi(z);\Lambda')|\right| \leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\sqrt{d}\,|z|\,.$$

Значит, при $z \notin \mathscr{E}_\varepsilon$ выполняются оценки

$$\left|\ln|f(\pi(z))| - \ln|g(\pi(z))|\right| \leqslant \left|\ln|G(\pi(z);\Lambda)| - \ln|G(\pi(z);\Lambda')|\right| + \left|\ln|p(\pi(z))| - \ln|q(\pi(z))|\right| \leqslant$$
$$\leqslant O(c\kappa_\varepsilon)\sqrt{d}\,|z| + \left|\ln\left|\frac{p(\pi(z))}{\pi(z)^m}\right| - \ln\left|\frac{|q(\pi(z))|}{\pi(z)^n}\right|\right| + |m-n|\left|\ln|(\pi(z))|\right|.$$

В силу определения логарифмического веса порядка ρ и условий на выбор функции $\pi(z)$ имеем:

$$\frac{\ln\mu(|\pi(z)|)}{\ln\ln|\pi(z)|} \to \rho \in (1;+\infty)\,, \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E_\varepsilon.$$

Следовательно, при $z \notin \mathscr{E}_\varepsilon$ вне круга $\Delta(0;r_\varepsilon)$ достаточно большого радиуса r_ε выполняются оценки

$$\left|\ln|\pi(z)|\right| < \mu^{\frac{2}{1+\rho}}(|\pi(z)|) \leqslant \kappa_\varepsilon^{\frac{2}{1+\rho}}|z|^{\frac{2}{1+\rho}} \leqslant \kappa_\varepsilon|z|^{\frac{2}{1+\rho}},$$
$$\left|\ln\left|\frac{p(\pi(z))}{\pi(z)^m}\right| - \ln\left|\frac{|q(\pi(z))|}{\pi(z)^m}\right|\right| + |m-n|\left|\ln|(\pi(z))|\right| \leqslant |m-n|\,\kappa_\varepsilon\,|z|^{\frac{2}{1+\rho}}.$$

Осталось дополнить множество $\mathscr{E}_\varepsilon$ кругом $\Delta(0;r_\varepsilon)$ и заключить, что вне этого множества выполняется оценка (33). Теорема доказана. □

4. ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

4.1. Эквивалентность симметричных произведений

Определение 7. Две функции f_1, f_2 комплексной переменной называются *эквивалентными* (в обозначениях $f_1 \sim f_2$), если существует множество E нулевой радиальной плотности такое, что

$$\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(z)| = o(|z|)\,, \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E.$$

Введенное отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично, транзитивно; оно сохраняется при умножении на эквивалентные функции: если $f_1 \sim f_2$ и $g_1 \sim g_2$, то $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}$ и $\Lambda' = \{\lambda'_i\}$ — последовательности комплексных чисел, лежащих вне единичного круга $\Delta(0;1)$ и имеющих единственную предельную точку в бесконечности.

Определение 8. Последовательность $\Lambda' = \{\lambda'_i\}$ называется *эквивалентной последовательности* $\Lambda = \{\lambda_i\}$ (в обозначениях $\Lambda' \sim \Lambda$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $i(\varepsilon)$ такой, что $|\lambda'_i - \lambda_i| \leqslant \varepsilon\,|\lambda_i|$ при $i > i(\varepsilon)$.

Это отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Если $\Lambda'_1 \sim \Lambda_1$ и $\Lambda'_2 \sim \Lambda_2$, то при соответствующем упорядочении объединенных последовательностей $\Lambda' = \Lambda'_1 \bigcup \Lambda'_2$ и $\Lambda = \Lambda_1 \bigcup \Lambda_2$ будем иметь $\Lambda' \sim \Lambda$. Таким образом, отношение эквивалентности сохраняется при объединении эквивалентных последовательностей.

Если целая функция $\pi(z)$ подчинена сильным ограничениям (см. п. 1.1), то справедливы следующие предложения.

Предложение 5. *Если последовательность Λ удовлетворяет условию* (6) *и последовательность Λ' эквивалентна последовательности Λ, то*

$$G(\pi\,(z)\,;\Lambda') \sim G(\pi\,(z)\,;\Lambda).$$

Доказательство. Для любого натурального n выберем положительные ε_n и d_n так, что $\varepsilon_n \in (0;2^{-n}) \subseteq (0;1/2)$ и $\kappa_{\varepsilon_n}\sqrt{d_n} \in \left(0;2^{-\frac{n}{2}}\right)$. Так как $\kappa_{\varepsilon_n} \geqslant 1$, то $d_n \in (0;2^{-n}) \subseteq (0;1/2]$. Для любого номера n найдется номер k_n такой, что последовательность $\Lambda'_{k_n} = \{\gamma_i : i \geqslant k_n\}$ является d_n-близкой к последовательности $\Lambda_{k_n} = \{\lambda_i : i \geqslant k_n\}$. Таким образом, согласно предложению 3, существует множество $\mathscr{E}^{(n)}$, радиальная плотность которого меньше ε_n, такое, что при $z \notin \mathscr{E}^{(n)}$ выполняется неравенство

$$\left|\ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda'_{k_n})\right| - \ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda_{k_n})\right|\right| \leqslant \delta_n\,|z|\,, \tag{34}$$

где $\delta_n := O(c)2^{-\frac{n}{2}} \to 0$ при $n \to \infty$. Если r_n достаточно велико, то при $|z| \geqslant r_n$ выполняются неравенства

$$\left|\ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda')\right| - \ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda'_{k_n})\right|\right| \leqslant \delta_n\,|z|\,, \tag{35}$$

$$\left|\ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda_{k_n})\right| - \ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda)\right|\right| \leqslant \delta_n\,|z|\,. \tag{36}$$

Пусть $\mathscr{E}_n := \mathscr{E}^{(n)} \cup \{z : |z| \leqslant r_n\}$. Радиальная плотность множества $\mathscr{E}_n$ по-прежнему меньше ε_n. Из неравенств (34), (35) и (36) следует, что при $z \notin \mathscr{E}_n$ выполняется неравенство

$$\left|\ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda')\right| - \ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda)\right|\right| \leqslant 3\delta_n|z|. \tag{37}$$

Теперь из множеств $\mathscr{E}_n$ получим новое множество $\mathscr{E}$ нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin \mathscr{E}$

$$\left|\ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda')\right| - \ln\left|G(\pi\,(z)\,;\Lambda)\right|\right| \leqslant o\,(|z|)\,, \qquad z \to \infty. \tag{38}$$

Для этой цели воспользуемся следующей процедурой. Для каждого n символом Σ_n обозначим множество колец, покрывающее множество $\mathscr{E}_n$ и удовлетворяющее условию

$$m_{\Sigma_n} =: \varepsilon'_n < \varepsilon_n \in (0;1/2)\,.$$

Пусть R_1 столь велико, что

$$m_{\Sigma_1}(r) + m_{\Sigma_2}(r) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

при $r \geqslant R_1$, и окружность $|z| = R_1$ не пересекается с кольцами из Σ_1 и Σ_2. Обозначим через Σ'_1 множество колец из Σ_1, лежащих в круге $|z| \leqslant R_1$. Далее выбираем R_2 так, что при $r \geqslant R_2$ выполняется неравенство

$$m_{\Sigma'_1}(r) + m_{\Sigma_2}(r) + m_{\Sigma_3}(r) < \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

и окружность $|z| = R_2$ не пересекается с кольцами из Σ_2 и Σ_3. Пусть Σ'_2 — множество колец из Σ_2, лежащих в кольце $R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2$, и т.д. Рассмотрим объединения

$$\Sigma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma'_n, \qquad \mathscr{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{E}'_n,$$

где $\mathscr{E}'_n$ — пересечение $\mathscr{E}_n$ с объединением колец, входящих в совокупность Σ'_n. Радиальная плотность множества $\mathscr{E}$ равна нулю. Действительно, это множество покрывается совокупностью колец Σ и при $R_n \leqslant r \leqslant R_{n+1}$ выполняются неравенства

$$m_\Sigma(r) \leqslant m_{\Sigma'_1}(r) + \dots + m_{\Sigma'_{n+1}}(r) \leqslant m_{\Sigma'_1}(r) + \dots + m_{\Sigma'_{n-1}}(r) + m_{\Sigma_n}(r) + m_{\Sigma_{n+1}}(r) \leqslant \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}.$$

Значит, $m_\Sigma(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Проверим оценку (38). Пусть $z \notin \mathscr{E}$ и $R_{n-1} \leqslant |z| \leqslant R_n$. Тогда $z \notin \mathscr{E}'_n$ и, значит, $z \notin \mathscr{E}_n$. Отсюда следует, что при таких z имеет место оценка (37). Так как это верно при всех n, то отсюда и следует оценка (38). Предложение доказано. □

Предложение 6. *Если последовательность Λ удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n\,(r;\Lambda)}{\mu(r)} = 0,$$

то

$$G(\pi\,(z)\,;\Lambda) \sim 1.$$

Доказательство. Для любого натурального n выберем положительные ε_n и c_n так, что $\varepsilon_n \in (0;2^{-n}) \subseteq (0;1/2)$ и $c_n\kappa_{\varepsilon_n} \in (0;2^{-n})$. Так как $\kappa_{\varepsilon_n} \geqslant 1$, то $c_n \in (0;2^{-n})$. Согласно предложению 3 существует множество $\mathscr{E}^{(n)}$, радиальная плотность которого меньше ε_n, такое, что при $z \notin \mathscr{E}^{(n)}$ выполняется неравенство

$$|\ln|G(\pi\,(z)\,;\Lambda)|| \leqslant \delta_n\,|z|\,,$$

где $\delta_n := O\,(2^{-n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь из множеств $\mathscr{E}^{(n)}$ с помощью процедуры, использованной при доказательстве предложения 5, получаем новое множество $\mathscr{E}$ нулевой радиальной плотности такое, что при $z \notin \mathscr{E}$

$$|\ln|G(\pi\,(z)\,;\Lambda)|| \leqslant o\,(|z|)\,, \qquad z \to \infty.$$

Предложение доказано. □

4.2. Факторизация симметричных функций

Если целая функция $\pi(z)$ подчинена сильным ограничениям (см. п. 1.1), то справедлива следующая факторизационная теорема.

Теорема 2. *Для любой целой π-симметричной функции $f\,(\pi\,(z))$ экспоненциального типа справедливо представление $f\,(\pi\,(z)) = f_1\,(\pi\,(z))\,f_2\,(\pi\,(z))$, где $f_1\,(\pi\,(z))$, $f_2\,(\pi\,(z))$ — целые π-симметричные функции и $f_1 \circ \pi \sim f_2 \circ \pi$.*

Доказательство. Последовательность корней $\{\lambda_i\}$ целой функции $f\,(\zeta)$, лежащих вне единичного круга $|\zeta| < 1$, обозначим Λ. При доказательстве теоремы 1 показано, что последовательность Λ удовлетворяет условию (6). Пусть $\varepsilon \in (1;\rho)$;

$$r_n := te^{n^{\frac{1}{\varepsilon}}}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

где параметр $t \in \left(0;e^{-1}\right)$ выбирается так, чтобы окружности $|z| = r_n$ лежали в области определения функции $\mu\,(|z|)$ и не проходили через точки из последовательности Λ;

$$\theta_{m,n} := \frac{2\pi}{1+[\ln n]} + s_n, \qquad m \in \{0,...,[\ln n]\}\,,$$

где $[\ln n]$ — целая часть числа $\ln n$, и параметр s_n выбирается так, чтобы лучи $z = re^{i\theta_{m,n}}$ не проходили через точки из множества $\Lambda \cap \{z : r_n \leqslant |z| \leqslant r_{n+1}\}$;

$$\Delta_{m,n} := \left\{re^{i\theta} : r_n \leqslant r \leqslant r_{n+1}, \theta_{m,n} \leqslant \theta \leqslant \theta_{m+1,n}\right\}.$$

Так как $r_1 := te < 1$, то совокупность кольцевых секторов

$$\Delta_{m,n}, \qquad m \in \{0, ..., [\ln n]\}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

покрывает последовательность Λ. При этом для диаметра кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ справедливо соотношение

$$d_{m,n} := \sup_{z,z' \in \Delta_{m,n}} |z - z'| = o(1)\, r_n, \qquad n \to \infty. \tag{39}$$

Действительно, толщина кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ равна

$$r_{n+1} - r_n = r_n \left(e^{(n+1)^{\frac{1}{\varepsilon}} - n^{\frac{1}{\varepsilon}}} - 1 \right) \leqslant r_n \left(e^{\frac{1}{\varepsilon} \frac{(n+1)^{\frac{1}{\varepsilon}}}{n}} - 1 \right) = o(1)\, r_n, \qquad n \to \infty,$$

а большая дуга кольцевого сектора $\Delta_{m,n}$ равна

$$\frac{2\pi}{1 + [\ln n]} r_{n+1} \leqslant \frac{2\pi}{1 + [\ln n]} (1 + o(1))\, r_n = o(1)\, r_n, \qquad n \to \infty.$$

Разбиваем последовательность $\Lambda := \{\lambda_i\}$ на три последовательности

$$\Lambda' := \{\lambda_i'\}, \qquad \Lambda'' := \{\lambda_i''\}, \qquad \Lambda''' := \{\lambda_i'''\}.$$

При этом соблюдаем условие: в любом кольцевом секторе $\Delta_{m,n}$ последовательности Λ' и Λ'' содержат одинаковое число точек, а последовательность Λ''' содержит не более одной точки. Последовательности Λ' и Λ'' упорядочиваем так, чтобы для любого i точки λ_i' и λ_i'' принадлежали одному сектору $\Delta_{m(i),n(i)}$. Тогда $n(i) \to \infty$ при $i \to \infty$ и из (39) следует, что

$$|\lambda_i' - \lambda_i''| \leqslant d_{m(i),n(i)} \leqslant o(1)\, |\lambda_i''|, \qquad i \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что последовательности Λ' и Λ'' эквивалентны. Поэтому по предложению 5

$$G(\pi(z); \Lambda') \sim G(\pi(z); \Lambda'').$$

Рассмотрим теперь произведение $G(\pi(z); \Lambda''')$. Каждый кольцевой сектор $\Delta_{m,n}$ содержит не более одной точки $\lambda_{m,n}$ из Λ'''. В кольце $\{z : r_n \leqslant z \leqslant r_{n+1}\}$ содержится $1 + [\ln n]$ кольцевых секторов $\Delta_{m,n}$. Значит, для $\rho' \in (\varepsilon; \rho)$ и для всех $n \geqslant n_0$ при достаточно большом n_0 выполняются неравенства

$$\mu(r_n) \geqslant \ln^{\rho'} r_n,$$

$$\sum_{m,n} \frac{1}{\mu(|\lambda_{m,n}|)} \leqslant \sum_n \frac{1 + \ln n}{\mu(r_n)} \leqslant \sum_{n < n_0} \frac{1 + \ln n}{\mu(r_n)} + \sum_{n \geqslant n_0} \frac{1 + \ln n}{\left(\ln t + n^{\frac{1}{\varepsilon}} \right)^{\rho'}} < +\infty.$$

Интегрированием по частям получаем:

$$\sum_{|\lambda_{m,n}| \leqslant r} \frac{1}{\mu(|\lambda_{m,n}|)} = \int_0^r \frac{dn(t; \Lambda''')}{\mu(t)} = \frac{n(r; \Lambda''')}{\mu(r)} + \int_0^r \frac{n(t; \Lambda''')\, \mu'(t)}{\mu(t)^2} dt.$$

Из этого равенства вытекает, что последний интеграл сходится при $r \to +\infty$. Следовательно,

$$\frac{n(r; \Lambda''')}{\mu(r)} = n(r; \Lambda''') \int_r^\infty \frac{\mu'(t)\, dt}{\mu(t)^2} \leqslant \int_r^\infty \frac{n(t; \Lambda''')\, \mu'(t)}{\mu(t)^2} dt \to 0$$

при $r \to +\infty$. По предложению 6 $G(\pi(z); \Lambda''') \sim 1$.

Наконец, если последовательности Λ' и Λ''' объединить в одну последовательность A, а в последовательность Λ'' включить нули функции $f(\zeta)$, лежащие в круге $\Delta(0; 1)$, и обозначить вновь полученную последовательность B, то при некотором $C \neq 0$ будем иметь

$$f_1(\pi(z)) := G(\pi(z); A) \sim CG(\pi(z); B) =: f_2(\pi(z)),$$
$$f_1(\pi(z))\, f_2(\pi(z)) = f(\pi(z)).$$

Теорема доказана. □

5. ПРИМЕР

В п. 2 показано, что сильное ограничение на выбор функции $\pi(z)$ выполнено, если $\pi(z)$ — целая функция вполне регулярного роста при некотором уточненном порядке $\rho_\pi(r) \to \rho_\pi \in (0;1)$ с постоянным положительным индикатором h_π. Ниже приводится пример целой функции вполне регулярного роста, удовлетворяющей сильному ограничению, но индикатор которой не является постоянным.

Выберем произвольный квазиполином:

$$f(z) := \sum_{j=1}^{s} a_j e^{i\gamma_j z}, \qquad a_j \neq 0.$$

Будем считать, что все точки γ_j лежат в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ и не лежат на одной прямой с началом (значит, $s \geqslant 2$). Положим

$$\pi(z) := p(z) + zq(z),$$

где

$$p(z) := \frac{1}{2}\left(f(\sqrt{z}) + f\left(-\sqrt{z}\right)\right) = \sum_{j=1}^{s} a_j \cos\gamma_j\sqrt{z},$$

$$q(z) := \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(f(\sqrt{z}) - f\left(-\sqrt{z}\right)\right) = i\sum_{j=1}^{s} a_j \frac{\sin\gamma_j\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$\sqrt{z}$ — значение в точке z произвольной ветви функции $\xi^{\frac{1}{2}}$, голоморфной в окрестности точки z.

Предложение 7. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные константы c_ε и ρ_ε, что вне некоторого множества кружков, линейная плотность которого меньше ε, выполняются оценки*

$$[\pi'(z)] \geqslant c_\varepsilon, \tag{40}$$

$$\left|\frac{\pi(\xi) - \pi(z)}{\xi - z} - \pi'(z)\right| \leqslant \frac{1}{3}\,|\pi'(z)| \tag{41}$$

равномерно по ξ из круга $\{\xi' : |\xi' - z| \leqslant \rho_\varepsilon\}$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получаем:

$$\pi'(z) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} a_j\,(i - \gamma_j)\,\frac{\sin\gamma_j\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{s} a_j\gamma_j\cos\gamma_j\sqrt{z} =$$

$$= \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{s} a_j\left(\left(\gamma_j - \frac{i-\gamma_j}{\sqrt{z}}\right)e^{i\gamma_j\sqrt{z}} + \left(\gamma_j + \frac{i-\gamma_j}{\sqrt{z}}\right)e^{-i\gamma_j\sqrt{z}}\right).$$

При этом

$$\pi'(z^2) = \frac{i}{4}\sum_{j=1}^{s} a_j\left(\left(\gamma_j - \frac{i-\gamma_j}{z}\right)e^{i\gamma_j z} + \left(\gamma_j + \frac{i-\gamma_j}{z}\right)e^{-i\gamma_j z}\right).$$

Из асимптотических равенств

$$\left(\gamma_j - \frac{i-\gamma_j}{z}\right)e^{i\gamma_j z} \approx \gamma_j e^{i\gamma_j z}, \qquad \left(\gamma_j + \frac{i-\gamma_j}{z}\right)e^{-i\gamma_j z} \approx \gamma_j e^{-i\gamma_j z}$$

и свойств квазиполиномов вытекает, что функция $\pi'(z^2)$ имеет вполне регулярный рост при порядке 1 и ее индикатриса всюду положительна, значит, функция $\pi'(z)$ имеет вполне регулярный рост при порядке $1/2$ и ее индикатриса тоже всюду положительна [15, гл. I, § 2, п. 8]. Отсюда вытекает, что при некотором $c_\varepsilon > 0$ вне некоторого множества кружков нулевой линейной плотности выполняется неравенство (40).

Перейдем к доказательству оценки (41). Пусть $\gamma_j \in \{\gamma_1, ..., \gamma_s\}$, $\gamma_j \neq 0$ и

$$p_j(z) := \cos \gamma_j \sqrt{z}, \qquad q_j(z) := \sqrt{z} \sin \gamma_j \sqrt{z}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{p_j(\xi) - p_j(z)}{(\xi - z)\, p_j'(z)} - 1 = \frac{\left(\frac{a_j - b_j}{a_j b_j} \operatorname{tg} b_j - 1\right) \operatorname{tg} a_j + \operatorname{tg} b_j}{\operatorname{tg} a_j - \operatorname{tg} b_j},$$

$$\frac{q_j(\xi) - q_j(z)}{(\xi - z)\, q_j'(z)} - 1 = \frac{\left(\left(\frac{b_j}{a_j} - 1\right) \operatorname{tg} b_j - \frac{b_j}{a_j^2}\right) \operatorname{tg} a_j + \frac{1}{b_j} \operatorname{tg} b_j - 1 + \frac{b_j}{a_j}}{\left(\frac{1}{a_j} + \left(1 - \frac{b_j}{a_j}\right) \operatorname{tg} b_j\right) \operatorname{tg} a_j - \frac{1}{a_j} \operatorname{tg} b_j + 1 - \frac{b_j}{a_j}},$$

где

$$a_j := \gamma_j \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2}, \qquad b_j := \gamma_j \frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{z}}{2}.$$

Функция $|\operatorname{tg} z|$ вне кружков любого достаточно малого радиуса с центрами в точках $z = \frac{\pi}{2}k$, $k \in \mathbf{Z}$, ограничена и снизу, и сверху положительными константами. При этом если $|z| \geqslant r \geqslant 1$, $|\xi| \geqslant r$ и $|\xi - z| \leqslant \rho_\varepsilon < 1$, то

$$\left|\sqrt{z} + \frac{\pi}{2}k\right| \leqslant \sqrt{|z|} + \frac{\pi}{2}\,|k| \leqslant \sqrt{\frac{\pi^2}{4}k^2 + \left|z - \frac{\pi^2}{4}k^2\right|} + \frac{\pi}{2}|k|,$$

$$\left|\sqrt{\xi}\right| \geqslant \sqrt{||z| - |z - \xi||} \geqslant \sqrt{1 - \rho_\varepsilon}, \qquad \left|\sqrt{z}\right| \geqslant \sqrt{||\xi| - |\xi - z||} \geqslant \sqrt{1 - \rho_\varepsilon}.$$

Если предположить дополнительно, что

$$\left|z - \frac{\pi^2}{4}k^2\right| \geqslant \frac{\pi}{2}|k|\varepsilon',$$

где $\varepsilon' := \varepsilon/s$, $\varepsilon > 0$, то при достаточно малом $h_\varepsilon > 0$ и всех $k \neq 0$ получим:

$$\left|\frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{2}k\right| \geqslant \left(\left|\sqrt{z} - \frac{\pi}{2}k\right| - \left|\frac{\sqrt{\xi} - \sqrt{z}}{2}\right|\right) =$$

$$= \frac{\left|z - \frac{\pi^2}{4}k^2\right|}{\left|\sqrt{z} + \frac{\pi}{2}k\right|} - \left|\frac{\xi - z}{2\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{z}\right)}\right| \geqslant \frac{\left|\zeta - \frac{\pi^2}{4}k^2\right|}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}k^2 + \left|\zeta - \frac{\pi^2}{4}k^2\right|} + \frac{\pi}{2}|k|} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon'}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi|k|}}} + 1} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geqslant \frac{\varepsilon'}{3} - \frac{\rho_\varepsilon}{4\sqrt{1 - \rho_\varepsilon}} \geqslant \frac{\varepsilon'}{4},$$

значит,

$$\left|a_j - \frac{\pi}{2}\gamma_j k\right| = |\gamma_j| \left|\frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{2}k\right| \geqslant |\gamma_j|\, \frac{\varepsilon'}{4}.$$

Следовательно, для всех z, лежащих вне некоторого круга с центром в начале и вне кружков,

$$\left|z - \frac{\pi^2}{4}k^2\right| < \frac{\pi}{2}|k|\varepsilon', \qquad k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}, \tag{42}$$

функция

$$|\operatorname{tg} a_j| = \left|\operatorname{tg}\left(\gamma_j \frac{\sqrt{\xi} + \sqrt{z}}{2}\right)\right|$$

ограничена и снизу, и сверху положительными константами равномерно по ξ из круга $\Delta(z,\rho_\varepsilon)$. Отсюда следует, что при достаточно малом ρ_ε вне некоторого круга с центром в начале и вне множества кружков (42) равномерно по ξ из круга $\Delta(z,\rho_\varepsilon)$ будут выполняться неравенства

$$\left|\frac{p_j(\xi)-p_j(z)}{(\xi-z)\,p'_j(z)}-1\right|\leqslant\frac{1}{3},\qquad\left|\frac{q_j(\xi)-q_j(z)}{(\xi-z)\,q'_j(z)}-1\right|\leqslant\frac{1}{3}.$$

Из очевидных оценок

$$\frac{1}{r}\sum_{\frac{\pi^2}{4}k^2\leqslant r}\frac{\pi}{2}|k|\varepsilon'\leqslant\frac{\pi}{2r}\varepsilon'\sum_{|k|\leqslant\frac{2}{\pi}\sqrt{r}}|k|\leqslant\varepsilon'\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

вытекает, что линейная плотность множества кружков (42) меньше ε'. Значит, при достаточно малом $\rho_\varepsilon>0$ вне некоторого множества кружков, линейная плотность которого меньше $\varepsilon=s\varepsilon'$, равномерно по ξ из круга $\Delta(z,\rho_\varepsilon)$ будет выполняться неравенство (41). Предложение доказано. □

Предложение 8. *Пусть z_0 — фиксированная точка, лежащая вне множества кружков, линейная плотность которого меньше $\varepsilon>0$ и вне которого выполняются оценки* (40) *и* (41). *Тогда в некоторой окрестности точки z_0 функция $\pi(z)$ является однолистной. Обратная функция $\pi_{z_0}^{-1}(\zeta)$ определена по крайней мере в круге $\Delta(\pi(z_0),h_\varepsilon)$, где $h_\varepsilon:=\frac{1}{3}c_\varepsilon\rho_\varepsilon$, и ее значения в этом круге лежат в круге $\Delta(z_0,\rho_\varepsilon)$.*

Доказательство. Выберем произвольное ζ из круга $\Delta(\pi(z_0),h_\varepsilon)$. Легко увидеть, что на окружности $|z-z_0|=\rho_\varepsilon$ выполняется неравенство $|F(z)|>|f(z)|$, где

$$F(z):=(z-z_0)\pi'(z_0),\qquad f(z):=\pi(z)-\zeta-(z-z_0)\pi'(z_0)=$$
$$=(z-z_0)\left(\frac{\pi(z)-\pi(z_0)}{z-z_0}-\pi'(z_0)\right)-(\zeta-\pi(z_0)).$$

По теореме Руше функция $\pi(z)-\zeta=f(z)+F(z)$ имеет в круге $\Delta(\pi(z_0),h_\varepsilon)$ лишь один нуль. Предложение доказано. □

Функция $\pi(z)$ является первообразной для функции $\pi'(z)$, значит, функция $\pi(z)$ является целой функцией вполне регулярного роста при порядке $\frac{1}{2}$ с положительным индикатором $h_\pi(\theta)$ [16]. Положим $\mu(r):=\ln^2 r$. Вне некоторого множества кружков E_π нулевой линейной плотности имеет место асимптотическое равенство $\ln|\pi(z)|\approx h_\pi(\theta)\sqrt{|z|}$, $\theta:=\arg z$. По предложениям 7 и 8 для любого $\varepsilon>0$ найдется такое множество кружков $E_\varepsilon\supseteq E_\pi$, линейная плотность которого меньше ε, что для любого $\zeta\in\hat{E}_\varepsilon$ и всякого $z\in\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\varepsilon$ функция $\pi_{\zeta,z}^{-1}(\zeta')$ отображает однолистно круг$\Delta(\zeta,h_\varepsilon)$ в круг $\Delta(z,\rho_\varepsilon)$. При этом число $\arg z'$, $z'\in\Delta(z,\rho_\varepsilon)$, является функцией от $\zeta'\in\Delta(\zeta,h_\varepsilon)$. Эту функцию обозначим $\theta_{\zeta,z}(\zeta')$. Для любых $\zeta\in\hat{E}_\varepsilon$ и $\zeta'\in\Delta(\zeta,h_\varepsilon)$ положим

$$\kappa_{\zeta,z}^-:=\inf_{\zeta'\in\Delta(\zeta,h_\varepsilon)\cap\hat{E}_\varepsilon}h_\pi^2(\theta_{\zeta,z}(\zeta')),\qquad\kappa_{\zeta,z}^+:=\sup_{\zeta'\in\Delta(\zeta,h_\varepsilon)\cap\hat{E}_\varepsilon}h_\pi^2(\theta_{\zeta,z}(\zeta')).$$

Тогда для любых $\zeta\in\hat{E}_\pi$, $z\in\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\pi$ и $\zeta'\in\Delta(\zeta;h_{\zeta,z})\cap\hat{E}_\pi$ при достаточно больших $|\zeta|$ выполняются оценки (18), в которых z выбрано произвольно из $\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\varepsilon$, z' — произвольный элемент слоя $\pi^{-1}(\zeta)$, лежащий в множестве $\Delta(z;\rho_\varepsilon)\setminus E_\varepsilon$,

$$\kappa_\zeta^-:=\min_{z\in\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\varepsilon}\kappa_{\zeta,z}^-,\qquad\kappa_\zeta^+:=\max_{z\in\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\varepsilon}\kappa_{\zeta,z}^+$$

и $\kappa_\varepsilon\geqslant 1$ выбраны из условия: $\kappa_\varepsilon^{-1}<h(\theta)<\kappa_\varepsilon$ для любого θ. При этом в силу непрерывности индикатора $h_\pi(\theta)$

$$\kappa_\zeta^+-\kappa_\zeta^-\leqslant\max_{z\in\pi^{-1}(\zeta)\setminus E_\varepsilon}\left(\sup_{z'\in\Delta(z;\rho_\varepsilon)}h_\pi^2(\theta')-\inf_{z'\in\Delta(z;\rho_\varepsilon)}h_\pi^2(\theta')\right)\to 0$$

при $\zeta\to\infty,\zeta\in\hat{E}_\varepsilon$. Здесь $\theta':=\arg z'$. Таким образом, выбранная функция $\pi(z)$ удовлетворяет всем условиям сильного ограничения.

Библиографический список

1. *Ehrenpreis L.* Solution of some problems division. IV // Amer. J. Math. 1960. Vol. 82. P. 522–588.
2. *Dicson D. G.* Factoring Fourier transforms with zeros in a strip // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 106. P. 107–114.
3. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л. Эренпрайса о факторизации // Матем. сб. 1999. Т. 190, № 4. С. 123–157.
4. *Шишкин А. Б.* Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 47–64.
5. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций // Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН, 2014. С. 218–230.
6. *Волковая Т. А., Шишкин А. Б.* Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // Владикавк. матем. журн. 2014. Т. 16, № 2. С. 14–28.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.
8. *Азарин В. С.* О разложении целой функции конечного порядка на сомножители, имеющие заданный рост // Матем. сб. 1973. Т. 90, № 2. С. 229–230.
9. *Красичков-Терновский И. Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 23–46.
10. *Хабибуллин Б. Н.* Теоремы сравнения и однородности для субгармонических функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д, 1985. 103 с.
11. *Красичков И. Ф.* Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней // Матем. сб. 1966. Т. 70(112), № 2. С. 198–230.
12. *Письменный Р. Г.* О разложении целой функции конечного порядка на эквивалентные множители // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 19–30.
13. *Письменный Р. Г., Шишкин А. Б.* Расщепление целых функций конечного порядка на эквивалентные множители // Вестн. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естественно-математические и технические науки. 2010. № 2(61). С. 23–28.
14. *Волковая Т. А.* Синтез в полиномиальном ядре двух аналитических функционалов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 3. С. 251–262.
15. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М. : Наука, 1976. 536 с.
16. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста // Теория функций, функц. анализ и их прил. (Харьков). 1973. № 18. С. 70–81.

Factorization of Entire Symmetrical Functions of Exponential Type

A. B. Shishkin

Shishkin Andrey Borisovich, Kuban State University, 149, Stavropolskaya st., Krasnodar, Russia, 350040, Shishkin-home@mail.ru

Let π be an entire function of minimal type of order 1. The entire function F is called π-symmetric if it is represented in the form of a composition $f \circ \pi$, where the f is an entire function. The article deals with the following question. Can we present every π-symmetric function of exponential type as a product of two functions with a close growth, each of which is itself an entire π-symmetric function? This question is answered in the affirmative, but under certain restrictions on for the subordinate function π. For example, an entire function of completely regular growth at proximate order $\rho(r) \approx \rho \in (0; 1)$ with constant positive indicator is subject to these restrictions. Other examples relate to the reversibility of the entire function in the circles of constant radius whose centers lie outside some exceptional set.

Key words: factorization of entire functions, zero at the order, proximate weight, logarithmic weight, entire symmetric functions.

References

1. Ehrenpreis L. Solution of some problems division. IV. *Amer. J. Math.*, 1960, vol. 82, pp. 522–588.
2. Dicson D. G. Factoring Fourier transforms with zeros in a strip. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 106, pp. 107–114.
3. Yulmukhametov R. S. Solution of the Ehrenpreis factorization problem. *Sb. Math.*, 1999, vol. 190, no. 4, pp. 597–629. DOI: 10.4213/sm400.
4. Shishkin A. B. Projective and injective descriptions in the complex domain. Duality. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 1, pp. 47–64 (in Russian).
5. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Lokal'noe opisanie tselykh funktsii [Local description of entire functions]. *Issledovaniia po matematicheskomu analizu. Itogi nauki. Iug Rossii. Mat. forum* [Research

on mathematical analysis. The results of science. South of Russia. Mat. forum]. Vladikavkaz, UMI VSC RAS, 2014, vol. 8, pt. 1, pp. 218–230 (in Russian).

6. Volkovaya T. A., Shishkin A. B. Lokal'noe opisanie tselykh funktsii. Podmoduli ranga 1 [Local description of entire functions. Submodules of rank 1]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2014, vol. 16, no. 2, pp. 14–28 (in Russian).
7. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral analysis on convex regions. *Math. USSR-Sb.*, 1972, vol. 16, no. 4, pp. 471–500.
8. Azarin V. S. On the decomposition of an entire function of finite order into factors having given growth. *Math. USSR-Sb.*, 1973, vol. 19, no. 2, pp. 225–226.
9. Krasichkov-Ternovskii I. F. Spectral synthesis in a complex domain for a differential operator with constant coefficients. IV : Synthesis. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993, vol. 76, no. 2, pp. 407–426.
10. Khabibullin B. N. *Teoremy sravneniia i odnorodnosti dlia subgarmonicheskikh funktsii*. Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Comparison theorems for subharmonic functions : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Rostov-on-Don, 1985. 103 p. (in Russian).
11. Krasichkov I. F. Sravnenie tselykh funktsii tselogo poriadka po raspredeleniiu ikh kornei [Comparison of entire functions of finite order by means of the distribution of their roots]. *Mat. Sb.*, 1966, vol. 70(112), no. 2, pp. 198–230 (in Russian).
12. Pis'mennyi R. G. Factoring of an entire function into two equivalent functions. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 19–30 (in Russian).
13. Pis'mennyi R. G., Shishkin A. B. Rasshcheplenie tselykh funktsii konechnogo poriadka na ekvivalentnye mnozhiteli [Splitting entire functions of finite order in the equivalent factors]. *Vest. Adyg. gos. un-ta. Ser. Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 2(61), pp. 23–28 (in Russian).
14. Volkovaya T. A. Synthesis in the Polynomial Kernel of Two Analytic Functionals. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 251–262 (in Russian).
15. Leont'ev A. F. *Riady eksponent* [Exponential series]. Moscow, Nauka, 1976, 536 p. (in Russian).
16. Gol'dberg A. A., Ostrovskii I. V. O proizvodnykh i pervoobraznykh tselykh funktsii vpolne reguliarnogo rosta [Derivatives and primitives of entire functions of completely regular growth]. *Teoriia funktsii, funkts. analiz i ikh pril. (Kharkiv)*, 1973, no. 18, pp. 70–81 (in Russian).

УДК 517.984

ОБ ОБРАТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

В. А. Юрко

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале с периодическими краевыми условиями в центрально-симметричном случае, когда потенциал симметричен относительно середины интервала. Обсуждается постановка обратной задачи, приводится алгоритм ее решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, периодические краевые условия, обратные спектральные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-68-75

ВВЕДЕНИЕ

Исследуется обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля:

$$\ell y := y'' + q(x)y, \qquad x \in (0, \pi),$$

на конечном интервале $(0, \pi)$ с периодическими краевыми условиями. Обратные задачи заключаются в восстановлении коэффициентов дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике и приложениях. Обратные задачи для дифференциальных