and Tchebychev series [Vychislitel'nye primeneniia mnogochlenov i riadov Chebysheva]. Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

5. Arushanyan O. B., Volchenskova N. I., Zaletkin S. F. On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations. Sib. Elektron. Mat. Izv., 2011, vol. 8, pp. 273–283 (in Russian).

6. Trefethen L. N. *Spectral methods in Matlab*. Philadelphia, SIAM, 2000.

7. Trefethen L. N. *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equation*. Cornell University, 1996.

8. Mukundan R., Ramakrishnan K. R. *Moment functions in image analysis. Theory and Applications*. Singapore, World Scientific, 1998.

УДК 517.51

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Т. Н. Шах-Эмиров

Научный сотрудник отдела математики и информатики, Дагестанский научный центр РАН, Махачкала, tadgius@gmail.com

Пусть для $\lambda \geqslant 1$ задана измеримая 2π-периодическая и существенно ограниченная функция (ядро) $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Исследуются условия на вес $w(x)$ и ядра $\{k_\lambda(t)\}_{\lambda\geqslant 1}$, при которых семейство операторов свертки $\{\mathscr{K}_\lambda f(x) : \mathscr{K}_\lambda f(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\}_{\lambda\geqslant 1}$ $(E = [-\pi,\pi])$ равномерно ограничено в весовых пространствах Лебега с переменным показателем — $L^{p(x)}_{2\pi,w}$.

Ключевые слова: пространство Лебега с переменным показателем, операторы свертки, условие Дини – Липшица.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $E = [-\pi,\pi]$, $1 \leqslant \underline{p}(E) \leqslant p(x) \leqslant \overline{p}(E) < \infty$ — измеримая 2π-периодическая функция, где $\underline{p}(D) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in D} p(x)$, $\overline{p}(D) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} p(x)$ для произвольного $D \subset R$, $w(x)$ — суммируемая почти всюду положительная функция (вес). Через $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ обозначим пространство измеримых 2π-периодических функций $f = f(x)$ таких, что

$$\int_E |f(x)|^{p(x)} w(x)\,dx < \infty.$$

Пространство $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ нормируемо, и одну из эквивалентных норм можно определить [1–4], полагая для $f \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\|_{p(\cdot),w}(E) = \inf\{\alpha > 0 : \int_E \left|\frac{f(x)}{\alpha}\right|^{p(x)} w(x)\,dx \le 1\}. \tag{1}$$

Отметим некоторые свойства, связанные с этими пространствами, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1°. $\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f\,w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$.

2°. Для любых измеримых множеств $A \subset B$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leqslant \|f\|_{p(\cdot),w}(B),$$

так как

$$\int_A \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\,dx \leqslant \int_B \left|\frac{f(x)}{\|f\|_{p(\cdot),w}(B)}\right|^{p(x)} w(x)\,dx = 1.$$

3°. Почти дословно повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1.6.1 в [2], можно показать, что если $1 \leqslant p(x) \leqslant q(x) \leqslant \overline{q}(A) < \infty$, то для любой функции $f \in L^{q(x)}_w(A)$

$$\|f\|_{p(\cdot),w}(A) \leqslant r^w_{p,q}\|f\|_{q(\cdot),w}(A),$$

где A — измеримое множество, $r^w_{p,q} \leqslant \dfrac{1}{\underline{\alpha}} + \dfrac{\int_A w(x)\,dx}{\underline{\alpha^*}}$ $\quad\left(\alpha(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)},\quad \alpha^*(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}\right)$.

4°. Если $p(x) > 1$, $x \in M$ (не исключая и случай, когда $\underline{p}(M) = 1$), то справедливо неравенство типа Гельдера для пространств Лебега с переменным показателем [1, неравенство (8)]:

$$\int_M |f(x)||g(x)|\,dx \leqslant c(p,M) \cdot \|f\|_{p(\cdot)}(M) \cdot \|g\|_{p'(\cdot)}(M),$$

где $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{p'(x)} = 1$, $(p,M) \leqslant \dfrac{1}{\underline{p}(M)} + \dfrac{1}{\underline{p'}(M)}$. Через $,(\alpha),(\alpha,\beta),\ldots$ здесь и далее будут обозначаться положительные числа, зависящие лишь от указанных параметров, различные в разных местах.

1. ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ

Пусть для каждого $\lambda \geqslant 1$ задана 2π-периодическая существенно ограниченная функция $k_\lambda = k_\lambda(x)$. Определим для $f \in L^1_{2\pi}$ линейный оператор:

$$\mathscr{K}_\lambda f = (\mathscr{K}_\lambda f)(x) = \int_E f(t) k_\lambda(t-x)\,dt. \tag{2}$$

Будем говорить, что семейство ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda \geqslant 1}$ удовлетворяет условиям $\mathscr{A}$), $\mathscr{B}$), $\mathscr{C}$), если имеют место следующие оценки: $\mathscr{A}$) $\int_E |k_\lambda(x)|\,dx \leqslant c_1$; $\mathscr{B}$) $\sup\limits_x |k_\lambda(x)| \leqslant c_2\lambda^\nu$; $\mathscr{C}$) $|k_\lambda(x)| \leqslant c_3$ при $\lambda^\gamma \leqslant |x| \leqslant \pi$, где ν, γ, $c_j > 0$ $(j = 1,2,3)$ и не зависят от λ.

Через $\mathscr{P}$ обозначим класс показателей $p(x)$, $p(x) \geqslant 1$, удовлетворяющих условию Дини – Липшица:

$$\bigl|p(x) - p(y)\bigr| \ln \frac{1}{|x-y|} \leqslant C \qquad (x, y \in E). \tag{3}$$

Из (2) следует, что для существования $K_\lambda(f)$ требуется, чтобы $L^{p(x)}_{2\pi,w} \subset L^1_{2\pi}$. Очевидно, что не для всякого w данное вложение будет иметь место. Поэтому на вес нужно наложить дополнительные условия. Пусть $E_1 = \{x \in E : p(x) = 1\}$, $E_2 = E \backslash E_1$:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

Лемма *Функция $f \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ будет суммируемой на E_1 в том и только в том случае, если вес отграничен от нуля почти всюду на E_1:*

$$w(x) \geqslant C_1(w) > 0 \quad \text{для почти всех } x \in E_1. \tag{4}$$

А для суммируемости $f \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ на E_2 достаточно выполнения следующего условия:

$$\|w^{-1/p(\cdot)}\|_{p'(\cdot)}(E_2) < \infty. \tag{5}$$

Эти условия были получены в работе [5].

Через $\mathscr{H}(E,p)$ обозначим класс весов, удовлетворяющих условиям (4), (5).

В настоящей работе исследуется вопрос о равномерной ограниченности семейств операторов свертки в пространствах в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$, $w \in \mathscr{H}(E,p)$. В случае, когда $w(x) \equiv 1$ данный вопрос был изучен в [6], где были получены достаточные условия на ядра, при которых обеспечивалась равномерная ограниченность. Вышеупомянутый результат был перенесен на многомерный случай в [7]. Схожая задача рассматривалась еще и в работе [8].

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата введем некоторые обозначения:

$\mathfrak{B}^h = \{\Delta^h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — множество отрезков длины $3h$, где $\Delta^h_k = [(k-1)h, (k+2)h]$;

$\mathfrak{B}_\varepsilon = \bigcup\limits_{h<\varepsilon} \mathfrak{B}^h$ — совокупность всех $\mathfrak{B}^h$ с длиной, меньше ε;

$\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon = \{\Delta^h_k \in \mathfrak{B}_\varepsilon : \underline{p}(\Delta^h_k) = 1\}$ — подмножество B_ε с равной единице существенной нижней гранью $p(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $p(x) \in \mathscr{P}$, $w \in \mathscr{H}(E,p)$ *и* $k_\lambda = k_\lambda(x)$ $(1 \leqslant \lambda < \infty)$ *удовлетворяет условиям* $\mathscr{A})$*–*$\mathscr{C})$. *Тогда семейство операторов* $\{K_\lambda\}_{1\leqslant\lambda<\infty}$ *будет равномерно ограничено в пространстве* $L^{p(x)}_{2\pi,w}$, *если для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполняются следующие условия:*

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon} \frac{1}{|B|^{v/\gamma}} \int_B w(x)\,dx < C, \tag{6}$$

$$\sup_{B\in\mathfrak{B}_\varepsilon\setminus\mathfrak{B}^{1,p}_\varepsilon} \left(\frac{1}{|B|^{v/\gamma}}\int_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|^{v/\gamma}}\int_B w(x)^{-1/(\underline{p}(B)-1)}\,dx\right)^{\underline{p}(B)-1} < C. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $N = [\lambda^{-\gamma}]$, $h = 1/N$

$$x_k = (kh-1)\pi \qquad (k = 0, \pm1, \ldots), \tag{8}$$

$$s_k = \min\{p(x), x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_{k+2}\}, \tag{9}$$

$$h(t) = s_k \qquad (x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}). \tag{10}$$

Определим для $x \in E$ множество E_x следующим образом. Если $(x-\pi h, x+\pi h) \subset (-\pi,\pi)$, то

$$E_x = E \setminus (x-\pi h, x+\pi h)$$

Если же $x - \pi h < -\pi$ или $\pi < x + \pi h$, то положим соответственно

$$E_x = E \setminus \{(-\pi, x+\pi h) \cup (x-\pi h+2\pi, \pi)\},$$

или

$$E_x = E \setminus \{(x-\pi h, \pi) \cup (-\pi, x+\pi h-2\pi)\}.$$

Пусть

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leqslant 1. \tag{11}$$

Тогда, полагая $\overline{p} = \overline{p}(E)$, имеем из (2):

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x)|(\mathscr{K}_\lambda f)(x)|^{p(x)}\,dx\right)^{1/\overline{p}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x)\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\right|^{p(x)} dx\right)^{1/\overline{p}} =$$

$$= \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x)\left|\left(\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} + \int_{E_x}\right) f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\right|^{p(x)} dx\right)^{1/\overline{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x)\left|\int_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\right|^{p(x)} dx\right)^{1/\overline{p}} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} w(x)\left|\int_{E_x} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\right|^{p(x)} dx\right)^{1/\overline{p}} =$$

$$= J_1^{1/\overline{p}} + J_2^{1/\overline{p}}. \tag{12}$$

Здесь мы воспользовались тем, что отображение $(f,g) \to \rho(f,g)$, где

$$\rho(f,g) = \left(\int_E |f(x)-g(x)|^{p(x)} w(x)\,dx\right)^{1/\overline{p}}$$

является метрикой в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$, что легко можно показать, воспользовавшись леммой в [2, лемма 1.2.1] и свойством 1°. В самом деле, для любых функций $f, g \in L^{p(x)}_{2\pi,w}$ справедливы включения $fw^{1/p(x)}$, $gw^{1/p(x)} \in L^{p(x)}_{2\pi,1} = L^{p(x)}_{2\pi}$ и можно перейти к метрике в $L^{p(x)}_{2\pi}$:

$$\rho(f,g) = \left(\int_E |f(x)-g(x)|^{p(x)} w(x)\,dx\right)^{1/\overline{p}} = \left(\int_E |f(x)w^{1/p(x)}(x) - g(x)w^{1/p(x)}(x)|^{p(x)}\,dx\right)^{1/\overline{p}}.$$

Выражение в правой части равенства выше и представляет собой метрику, рассмотренную в [2]. Оценим J_1:

$$J_1 = \sum_{k=0}^{2N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{p(x)} dx = \sum_{k=0}^{2N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{s_k + p(x) - s_k} dx.$$

Из условия (3) и из (8) и (9) следует, что при $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}$

$$|p(x) - s_k| = (\ln(2\lambda^\gamma))^{-1} \leqslant c(\gamma) \frac{1}{\ln(2\lambda)}.$$

Поэтому в силу 2°, 3°, $\mathscr{B}$) и (11) приходим к следующей оценке:

$$\left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{p(x)-s_k} = (\lambda^v)^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} \left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)|\, dt \right)^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} =$$

$$= c(p,\gamma,w) \left(\|f\|_{p(\cdot),w} \right)^{c(\gamma)\frac{1}{\ln(2\lambda)}} \leqslant c(p,\gamma,w). \tag{13}$$

С учетом (13) имеем:

$$J_1 \leqslant c_1(p,\gamma,w) \sum_{k=0}^{2N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{s_k} dx. \tag{14}$$

Разобьем сумму (14) на 2 части:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{s_k} dx =$$

$$= \left(\sum_{k\in I_1} + \sum_{k\in I_2} \right) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right|^{s_k} dx = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2, \tag{15}$$

где $I_1 = \{k : s_k = 1\}$, $I_2 = \{k : s_k > 1\}$. Оценим $\mathfrak{S}_1$:

$$\mathfrak{S}_1 = \sum_{k\in I_1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left| \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} f(t) k_\lambda(t-x)\, dt \right| dx \leqslant \sum_{k\in I_1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} |f(t)||k_\lambda(t-x)|\, dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in I_1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)||k_\lambda(t-x)|\, dt\, dx \overset{\mathscr{B})}{\leqslant} \sum_{k\in I_1} \lambda^v \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x)\, dx \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in I_1} c(v,\gamma) \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x)\, dx \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|\, dt.$$

Из условия (6) и свойства 3° нормы (1) получаем:

$$\sum_{k\in I_1} c(v,\gamma) \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x)\, dx \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|\, dt \leqslant c(w,v,\gamma) \sum_{k\in I_1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} |f(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 3c(w,v,\gamma) \|f\|_{p(\cdot),w} \leqslant 3c(w,v,\gamma). \tag{16}$$

Следовательно, сумма $\mathfrak{S}_1$ ограничена. Покажем ограниченность второй суммы. Оценим ее с помощью неравенства Гельдера (свойство 4°):

$$\mathfrak{S}_2 \leqslant \sum_{k\in I_2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{1/s_k}(t) |f(t) k_\lambda(t-x)| w^{-1/s_k}(t)\, dt \right)^{s_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k\in I_2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} w(t)|f(t)k_\lambda(t-x)|^{s_k}\,dt \right)^{1/s_k} \left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{-s'_k/s_k}(t)\,dt \right)^{1/s'_k} \right)^{s_k} dx =$$

$$= \sum_{k\in I_2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} w(x) \left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} w(t)|f(t)k_\lambda(t-x)|^{s_k}\,dt \left(\int\limits_{x-\pi h}^{x+\pi h} w^{-s'_k/s_k}(t)\,dt \right)^{\frac{s_k}{s'_k}} \right) dx \overset{\mathscr{B})}{\leqslant}$$

$$\leqslant c_2 \sum_{k\in I_2} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x)\,dx \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} \lambda^{v s_k} w(t)|f(t)|^{s_k}\,dt \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-s'_k/s_k}(t)\,dt \right)^{\frac{s_k}{s'_k}} \leqslant$$

$$\leqslant c(v,\gamma) \sum_{k\in I_2} \frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(x)\,dx \left(\frac{1}{(3h)^{v/\gamma}} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w^{-1/(s_k-1)}(t)\,dt \right)^{s_k-1} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(t)|f(t)|^{s_k}\,dt.$$

С учетом последнего неравенства и (7) получаем:

$$\mathfrak{S}_2 \leqslant c(w,v,\gamma) \sum_{k\in I_2} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k+2}} w(t)|f(t)|^{s_k}\,dt \leqslant 3c(w,v,\gamma) \int_E w(t)|f(t)|^{s_k}\,dt.$$

Из свойства 3° и (10) имеем:

$$\int_E w(t)|f(t)|^{s_k}\,dt = \int_E w(t)|f(t)|^{h(t)}\,dt = \int_E w(t)\|f\|^{h(t)}_{h(\cdot),w} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_E w(t)(r^w_{h,p})^{h(t)}\|f\|^{h(t)}_{p(\cdot),w} \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt \leqslant$$

$$\leqslant c(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}(E)} \int_E w(t) \left| \frac{f(t)}{\|f\|_{h(\cdot),w}} \right|^{h(t)} dt = c(p,w)(r^w_{h,p})^{\overline{p}(E)}. \tag{17}$$

Из (12), (15), (16) и (17) следует равномерная ограниченность операторов свертки на единичном шаре пространства $L^{p(x)}_{2\pi,w}$. □

В качестве следствий теоремы 1 приведем примеры семейств операторов с некоторыми классическими ядрами, равномерно ограниченных в пространстве $L^{p(x)}_{2\pi,w}$.

Операторы Фейера. Для каждого натурального n положим

$$k_n(x) = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right\}^2,$$

а в случае, когда $n \leqslant \lambda < n+1$, будем считать, что $k_\lambda(x) = k_n(x)$. Операторы Фейера F_λ определим следующим образом:

$$F_\lambda f = (F_\lambda f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt.$$

Не трудно проверить, что ядра Фейера удовлетворяют условиям $\mathscr{A})$–$\mathscr{C})$ и, следовательно, равномерно ограничены в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ при выполнении условий (6) и (7).

Операторы Стеклова. Пусть $\lambda \geqslant 1$. Положим

$$k_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in \left[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}\right], \\ 0, & x \in [-\pi,\pi] \setminus \left[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}\right], \end{cases}$$

и продолжим ядро Стеклова 2π-периодически на $(-\infty,\infty)$. Операторы Стеклова определяются равенством

$$(S_\lambda(f))(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)k_\lambda(t-x)\,dt.$$

Легко проверить выполнение условий $\mathscr{A})$–$\mathscr{C})$ для ядер $(S_\lambda(f))(x)$, что вместе с условиями (6) и (7) дает равномерную ограниченность этих операторов в $L^{p(x)}_{2\pi,w}$.

Автор выражает благодарность И. И. Шарапудинову за постановку задачи.

Библиографический список

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–632.
2. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. 270 с.
3. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. P. 509. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. *Cruz-Uribe D., Fiorenza A.* Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2013. P. 312. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. *Магомед-Касумов М. Г.* Базисность системы Хаара в весовых пространствах Лебега с переменным показателем // Владикавказ. матем. журн. 2014. Т. 16, вып. 3. С. 38–46.
6. *Шарапудинов И. И.* О равномерной ограниченности в L^p $(p = p(x))$ некоторых семейств операторов свертки // Матем. заметки. 1996. Т. 59, вып. 2. С. 291–302. DOI: 10.4213/mzm1716.
7. *Шах-Эмиров Т. Н.* О равномерной ограниченности в $L^{p(x)}_{2\pi}$ некоторых семейств интегральных операторов свертки // Вестн. ДНЦ РАН. 2013. Вып. 51. С. 13–17.
8. *Samko S. G* Denseness of $C_0^\infty(R^n)$ in generalized Sobolev Spaces $W^{m,p(x)}(R^n)$ // Intern. Soc. for Analysis, Applic. and Comput. Vol. 5. Direct and Inverse Problems of Math. Physics / eds. R. Gilbert, J. Kajiwara, S. Xu. Yongzhi. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 333–342.

On Uniform Boundedness of Some Families of Integral Convolution Operators in Weighted Variable Exponent Lebesgue Spaces

T. N. Shakh-Emirov

Daghestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences, 45, Gadgieva str., Makhachkala, Republic of Dagestan, 367000, Russia, tadgius@gmail.com

Let $k_\lambda(x)$ be a measurable essentially bounded 2π-periodic function (kernel), where $\lambda \geqslant 1$. Conditions on the weight and on the kernels $\{k_\lambda(x)\}_{\lambda\geqslant 1}$ that provide the family of convolution operators $\{\mathscr{K}_\lambda f(x) : \mathscr{K}_\lambda f(x) = \int_E f(t)k_\lambda(t-x)\,dt\}_{\lambda\geqslant 1}$ $(E = [-\pi,\pi])$ uniform boundedness in weighted variable exponent Lebesgue space $L^{p(x)}_{2\pi,w}$ are investigated.

Key words: Lebesgue spaces with variable exponent, convolution operators, Dini – Lipschitz condition.

References

1. Sharapudinov I. I. Topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. *Math. Notes*, 1979, vol. 26, iss. 4, pp. 796–806. 10.1007/BF01159546.
2. Sharapudinov I. I. Some aspects of approximation theory in variable Lebesgue spaces. Vladikavkaz, 2012, 270 p. (in Russian).
3. Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 2011, 509 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8.
4. Cruz-Uribe D., Fiorenza A. *Variable Lebesgue Spaces : Foundations and Harmonic Analysis*. Berlin ; Heidelberg, Springer-Verlag, 2013, 312 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0548-3.
5. Magomed-Kasumov M. G. Basis property of the Haar system in the weighted variable Lebesgue spaces. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 38–46 (in Russian).
6. Sharapudinov I. I. Uniform boundedness in L^p $(p = p(x))$ of some families of convolution operators. *Math. Notes*, 1996, vol. 59, iss. 2, pp. 205–212. DOI: 10.1007/BF02310962.
7. Shakh-Emirov T. N. O ravnomernoi ogranichennosti v $L^{p(x)}_{2\pi}$ nekotorykh semeistv integral'nykh operatorov svertki [On the uniform boundedness in $L^{p(x)}_{2\pi}$ of some families of integral operators convolution]. *Vestnik DNC RAN*, 2014, iss. 51, pp. 13–17 (in Russian).
8. Samko S. G Denseness of $C_0^\infty(R^n)$ in generalized Sobolev Spaces $W^{m,p(x)}(R^n)$. *Intern. Soc. for Analysis, Applic. and Comput. Vol. 5. Direct and Inverse Problems of Math. Physics* / eds. R. Gilbert, J. Kajiwara, S. Xu. Yongzhi. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000, pp. 333–342.