tions of Λ-bounded variation. *Dokl. AN SSSR*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1062–1064.
7. Privalov A. A. Uniform convergence of Lagrange interpolation processes. *Math. Notes*, 1986, vol. 39, no. 2, pp. 228–243.
8. Novikov V. V. On Birkhoff Interpolation of Functions of Ordered Λ-bounded Variation *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 81–83 (in Russian).

УДК 517.972:517.98:517.982

ДОМИНАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РОСТА ИНТЕГРАНТА И ГЛАДКОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

И. В. Орлов[1], И. А. Романенко[2]

[1]Орлов Игорь Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, igor_v_orlov@mail.ru
[2]Романенко Игорь Алексеевич, ассистент кафедры алгебры и функционального анализа, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым, rom.igor.alex@gmail.com

Для вариационных функционалов в пространствах Соболева $\{W^{1,p}\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ вводится последовательность так называемых «доминантных оценок роста» градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала в C^1-гладких точках пространства Соболева. Частными случаями доминантных оценок роста являются изученные ранее K-псевдополиномиальные представления интегранта. Однако, в отличие от псевдополиномиального случая $(p \in \mathbb{N})$ наш подход позволяет рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале $(1 \leqslant p < \infty)$.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, интегрант, доминантные оценки роста, доминантная смешаная гладкость, вариационные задачи.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-422-432

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Начиная с классических работ Л. Тонелли (L. Tonelli) [1] и по настоящее время вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков [2–4]. В последние годы при исследовании вариационных задач в пространствах Соболева, активно используются так называемые компактные экстремумы и компактно-аналитические (K-аналитические) свойства вариационных функционалов [5–7]. Это связано с тем, что классические аналитические свойства у вариационных функционалов в пространствах Соболева часто отсутствуют [8]. При этом при исследовании корректной определенности вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')\, dx \qquad \left(y(\cdot) \in W^{1,p}[a; b]\right), \tag{1}$$

классическая «оценка роста» интегранта $|f(x, y, z)| \leqslant A_1 + A_2|z|^p$ заменялась требованием так называемого K-псевдополиномиального представления интегранта:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} P_k(x, y, z) z^k, \tag{2}$$

коэффициенты которого доминантно (по x, y) ограничены. Далее последовательно вводились более узкие классы K-псевдополиномов за счет повышения уровня доминантной гладкости коэффициентов P_k. Попадание интегранта в такой класс гарантирует соответствующий уровень K-аналитичности вариационного функционала (K-непрерывность, K-дифференцируемость, кратную K-дифференцируемость).

Однако представление (2) не всегда возможно и, кроме того, приводит к рассмотрению задач лишь на «дискретной» соболевской шкале $\{W^{1,p}\}$ $(p \in \mathbb{N})$. Таким образом, актуальной является задача такого обобщения условия (2), которое позволит уйти от конкретного представления интегранта и рассматривать вариационные задачи на полной соболевской шкале $\{W^{1,p}\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

С этой целью в настоящей работе для вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ вводится последовательность так называемых доминантных «оценок роста» градиента соответствующего порядка от интегранта, каждая из которых гарантирует соответствующий уровень гладкости вариационного функционала (1) в C^1-гладких точках пространства Соболева. Эти оценки, как уже отмечалось, с одной стороны, можно рассматривать в качестве обобщения K-псевдополиномиальных представлений интегрантов, а с другой — как дополнение метода K-псевдополиномов, так как в C^1-гладких точках пространства Соболева вариационный функционал имеет не только K-аналитические, но и классические аналитические свойства.

Приведем определения компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости функционала в полном ЛВП [5]. Далее *ЛВП* означает локально выпуклое пространство, *абсолютно выпуклое подмножество* вещественного ЛВП есть выпуклое и симметричное множество, $\operatorname{span} C$ — линейная оболочка множества C, $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского множества C.

Определение 1. Пусть E — полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Скажем, что функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ *компактно непрерывен (K-непрерывен), компактно дифференцируем (дважды K-дифференцируем и т. д.)* в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + \operatorname{span} C)$ соответственно непрерывно, дифференцируемо по Фреше (дважды дифференцируемо по Фреше и т. д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в подпространстве $E_C = \operatorname{span} C$, порожденной C.

Замечание 1. Отметим, что в конечномерном случае K-непрерывность, K-дифференцируемость и т.д. совпадают соответственно с классической непрерывностью, дифференцируемостью и т.д. Однако в бесконечномерном случае K-аналитические свойства функционала, вообще говоря, слабее соответствующих классических аналитических свойств. Простые примеры K-непрерывных, но разрывных в обычном смысле функционалов связаны с переходом к слабой топологии (см. [5, пример 2.1.3]). Важным является то обстоятельство, что вариационные функционалы в пространствах Соболева при достаточно общих условиях обладают K-аналитическими свойствами, но *не обладают* соответствующими классическими аналитическими свойствами.

В данной работе, как уже было сказано, рассматриваются более общие, чем K-псевдополиномиальные, условия, обеспечивающие подходящие *аналитические* свойства вариационных функционалов в C^1*-гладких* точках пространств Соболева $W^{1,p}[a;b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

2. ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И КОРРЕКТНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a;b]$

Определение 2. Будем говорить, что борелевская функция $f : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in B_p(z)$, $0 < p < \infty$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ существуют неотрицательные константы $A_1(C)$ и $A_2(C)$ такие, что для любых $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$, f допускает оценку

$$\big|f(x,y,z)\big| \leqslant A_1(C) + A_2(C)|z|^p. \tag{3}$$

Напомним определение доминантно по x, y ограниченной функции [9].

Определение 3. Борелевская функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) ограниченной* (обозначение: $P \in B_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in B_p(z)$ — псевдополиномы порядка p с доминантно ограниченными коэффициентами. Нетрудно проверить, что справедливо следующее

Предложение 1. *Если борелевская функция f представима в виде*

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z)\,z^p \qquad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P \in B_{dom}(z)$ и $Q \in B_{dom}(z)$, то $f \in B_p(z)$.

Замечание 2. Утверждение предложения 1 справедливо и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} P_k(x,y,z)\,z^k \qquad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P_k \in B_{dom}(z)$.

Покажем теперь, что условие (3) для интегранта гарантирует корректную определенность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$, а также позволяет дать удобную локальную оценку функционала на компактах из $W^{1,p}[a;b]$.

Предварительно напомним определение пространств Соболева $W^{1,p}[a;b]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Определение 4. *Пространство* $W^{1,p}[a;b]$ состоит из абсолютно непрерывных на $[a;b]$ функций $y = y(x)$, для которых $y' \in L_p[a;b]$. *Норма* в $W^{1,p}[a;b]$ обычно вводится следующим образом:

$$\|y\|_{W^{1,p}} = \left(\int_a^b |y(x)|^p dx + \int_a^b |y'(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\|y\|_{L_p}^p + \|y'\|_{L_p}^p \right)^{1/p}.$$

Как известно, соотношение между соболевскими нормами в пространствах $W^{1,p}[a;b]$ и $W^{1,1}[a;b]$ при $1 \leqslant p < \infty$ имеет вид

$$\|y\|_{W^{1,1}} \leqslant N_{1p}\,\|y\|_{W^{1,p}}, \tag{4}$$

где $N_{1p} = (2(b-a))^{(p-1)/p}$.

Теорема 1. *Если интегрант $f \in B_p(z)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал Эйлера – Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx \qquad \big(y(\cdot) \in W^{1,p}[a;b]\big)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}[a;b]$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ при $y(\cdot) \in C_\Delta$ справедлива локальная оценка:

$$\big|\Phi(y)\big| \leqslant \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\|y\|_{W^{1,p}}^p, \tag{5}$$

где коэффициенты α и β зависят только от выбора компакта C_Δ; $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательное отображение:

$$e : \big(W^{1,p}[a;b]\big) \times [a;b] \to \mathbb{R}, \qquad e(y,x) = y(x).$$

Поскольку сходимость в $W^{1,p}[a;b]$, как известно, сильнее равномерной сходимости, то

$$\left(y \xrightarrow{W^{1,p}} 0,\ x \to 0 \right) \quad \Longrightarrow \quad (y(x) = e(y,x) \to 0)\,.$$

Отсюда ввиду билинейности e следует непрерывность e всюду в $W^{1,p}[a;b] \times [a;b]$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса множество

$$C_Y := C_\Delta\big([a;b]\big) = \bigcup_{y \in C_\Delta} y\big([a;b]\big) \text{ — компакт в } \mathbb{R}.$$

Так как по условию теоремы $f \in B_p(z)$, то при $(x, y) \in C = [a; b] \times C_Y$ выполнена оценка интегранта вида (3). Отсюда при $y(\cdot) \in C_\Delta$ получаем оценку

$$\left|\Phi(y)\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x, y, y')\right| dx \leqslant \int_a^b \left(A_1(C) + A_2(C)|y'|^p\right) dx = (b-a)\, A_1(C) +$$
$$+ A_2(C) \int_a^b |y'|^p dx =: \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\, \|y'\|^p_{Lp} \leqslant \alpha(C_\Delta) + \beta(C_\Delta)\, \|y\|^p_{W^{1,p}},$$

т. е. оценка (5) выполнена. ☐

3. C-ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a; b]$

Определение 5. Будем говорить, что непрерывная функция $f \in B_p(z)$ $(0 < p < \infty)$ удовлетворяет *C-доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in CB_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k соответственно переменных y, z при $(x, y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ приращение f допускает оценку

$$|\Delta_{yz} f(x, y, z; h, k)| = |f(x, y+h, z+k) - f(x, y, z)| \leqslant A_1(C; h, k) + A_2(C; h, k)\, |z|^p, \tag{6}$$

где коэффициенты A_i $(i = 1, 2)$ — неотрицательные борелевские функции от h, k, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &(i)\ A_i \text{ локально по } h \text{ ограничены равномерно по } k; \\ &(ii)\ A_i(C; h, k) = o(1) \text{ при } h, k \to 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что из условий (6), (7) следует равномерная непрерывность f на $C \times \mathbb{R}_z$.

Напомним определение доминантно непрерывной функции [9].

Определение 6. Непрерывная функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) непрерывной по z* (обозначение: $P \in C_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ функция P равномерно непрерывна и ограничена на множестве $C \times \mathbb{R}_z$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in CB_p(z)$.

Предложение 2. *Если непрерывная функция f представима в виде*

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)\, z^p \quad (p \in \mathbb{N}),$$

где $P \in C_{dom}(z)$ и $Q \in C_{dom}(z)$, то $f \in CB_p(z)$.

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условию предложения. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{yz} f(x, y, z; h, k) = P(x, y+h, z+k) + Q(x, y+h, z+k)(z+k)^p - \\ - [P(x, y, z) + Q(x, y, z) z^p] \pm Q(x, y+h, z+k) z^p = [P(x, y+h, z+k) - P(x, y, z)] + \\ + [Q(x, y+h, z+k) - Q(x, y, z)]\, z^p + Q(x, y+h, z+k)\, [(z+k)^p - z^p]\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) следует оценка

$$\begin{aligned} |\Delta_{yz} f(x, y, z; h, k)| \leqslant |\Delta_{yz} P(x, y, z; h, k)| + |\Delta_{yz} Q(x, y, z; h, k)|\, |z|^p + \\ + |Q(x, y+h, z+k)|\, |(z+k)^p - z^p| =: \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2\, |z|^p + \widetilde{A}_3\, |(z+k)^p - z^p|. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим с учетом доминантной непрерывности соответствующих выражений в (9)

$$B_1(C; h, k) = \sup_{(x,y,z) \in C \times \mathbb{R}_z} \widetilde{A}_1(x, y, z; h, k);\ B_2(C; h, k) = \sup_{(x,y,z) \in C \times \mathbb{R}_z} \widetilde{A}_2(x, y, z; h, k);$$

$$B_3(C;h,k) = \sup_{(x,y,z)\in C\times\mathbb{R}_z} \widetilde{A}_3(x,y,z;h,k)\left|\frac{(z+k)^p - z^p}{z^{p-1}k}\right|. \qquad (10)$$

При этом $\widetilde{A}_1(x,y,z;h,k) = o(1)$, $\widetilde{A}_2(x,y,z;h,k) = o(1)$ доминантно по x, y, т. е. равномерно на множестве $C\times\mathbb{R}_z$. Поэтому также и $B_1(C;h,k) = o(1)$, $B_2(C;h,k) = o(1)$ при $h,k\to 0$. Наконец, поскольку $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ и $\widetilde{A}_3$ ограничены локально по h, равномерно по k и доминантно по x, y, то и B_1, B_2, B_3 ограничены локально по h и равномерно по k. Из (9) и (10) находим:

$$\begin{gathered}|\Delta_{yz} f(x,y,z;h,k)| \leqslant B_1(C;h,k) + B_2(C;h,k)|z|^p + B_3(C;h,k)|z|^{p-1}|k| \leqslant \\ \leqslant B_1(C;h,k) + B_2(C;h,k)|z|^p + B_3(C;h,k)|k|(1+|z|^p) = \bigl[B_1(C;h,k)+ \\ +B_3(C;h,k)|k|\bigr] + \bigl[B_2(C;h,k) + B_3(C;h,k)|k|\bigr]|z|^p =: A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)|z|^p,\end{gathered}$$

где коэффициенты A_1, A_2 удовлетворяют условиям (7). □

Замечание 3. Утверждение предложения 2 справедливо, как нетрудно убедиться, и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} P_k(x,y,z)\, z^k \qquad (p\in\mathbb{N}),$$

где $P_k \in C_{dom}(z)$.

Установим общий факт о тождестве K-непрерывности и непрерывности для отображений в банаховых пространствах. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть E, F — банаховы пространства. Если отображение $\Phi : E \to F$ K-непрерывно в точке $y\in E$, то оно непрерывно и в обычном смысле в этой точке.*

Доказательство. Допустим противное: отображение $\Phi(y)$ разрывно в точке y. Тогда

$$\exists\ h_n \xrightarrow{E} 0,\ \ \exists\ \varepsilon_0 > 0:\ \ \|\Phi(y+h_n) - \Phi(y)\|_F \geqslant \varepsilon_0 \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

Рассмотрим а.в. компакт $C = \overline{a.co}\{h_n\}$. По теореме о промежуточных компактах [10, теорема 2.2]

$$\exists\ C' \in \mathscr{C}(E):\ \ E_C \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{C'} \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E,$$

где $\mathscr{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E. Так как $\{h_n\}\subset C$, то из ограниченности $\{h_n\}$ в E_C следует (по компактности вложения E_C в $E_{C'}$) предкомпактность $\{h_n\}$ в $E_{C'}$. Следовательно, по теореме Больцано – Вейерштрасса из $\{h_n\}$ можно выделить некоторую подпоследовательность $h_{n_k} \xrightarrow{E_{C'}} 0$. Получаем (по непрерывности Φ в $E_{C'}$):

$$\|\Phi(y+h_{n_k}) - \Phi(y)\|_F \to 0 \quad \text{при} \quad h_{n_k} \xrightarrow{E_{C'}} 0.$$

Но по допущению $\|\Phi(y+h_{n_k}) - \Phi(y)\|_F \geqslant \varepsilon_0$. Пришли к противоречию. Таким образом, отображение $\Phi(y)$ непрерывно в точке $y\in E$. □

Покажем теперь, что условие (6) для интегранта гарантирует K-непрерывность, а в силу теоремы 2 и непрерывность основного вариационного функционала в $W^{1,p}[a;b]$.

Теорема 3. *Если интегрант $f\in CB_p(z)$ $(1\leqslant p<\infty)$, то вариационный функционал непрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$.*

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot)\in W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b]\times y([a;b])$. Фиксируем также абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и выберем $h\in C_\Delta$. При этом ввиду ограниченности C_Δ по соболевской норме C_Δ ограничен и по равномерной норме, откуда $|h(x)|\leqslant \delta_h$ для любых $x\in[a;b]$, $h\in C_\Delta$, при некотором $\delta_h>0$. Проведем оценку $\Delta\Phi(y,h)$, используя представление (6):

$$\bigl|\Phi(y+h) - \Phi(y)\bigr| \leqslant \int_a^b \bigl|f(x,y+h,y'+h') - f(x,y,y')\bigr|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b A_1\,(C;h,h')\,dx + \int\limits_a^b A_2\,(C;h,h')\,|y'|^p dx, \tag{11}$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h', удовлетворяющие условиям (7) (при $k = h'$). Далее, для любого фиксированного $\delta > 0$ обозначим

$$e_\delta = \left\{x \in [a;b] \,\big|\, |h(x)| < \delta,\ |h'(x)| < \delta\right\},\ e^\delta = \left\{x \in [a;b] \,\big|\, |h(x)|^p + |h'(x)|^p \geqslant \delta^{\,p}\right\}. \tag{12}$$

Так как $\|h\|^p_{W^{1,p}} \geqslant \delta^p \cdot \mathrm{mes}\,(e^\delta)$, то

$$\left(\|h\|_{W^{1,p}} \leqslant \delta^{(p+1)/p}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\mathrm{mes}\,(e^\delta) < \delta\right). \tag{13}$$

Таким образом,

$$\big(\|h\|_{W^{1,p}} \to 0\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\mathrm{mes}\,(e^\delta) \to 0\big) \text{ при } \delta \to 0. \tag{14}$$

Будем далее предполагать, что неравенство слева в (13) выполнено. Проведем отдельно оценку каждого из интегралов справа в (11), используя условия (7).

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы

$$(|h(x)| < \delta,\ |h'(x)| < \delta) \Rightarrow (A_1(C;h,h') < \varepsilon)\,.$$

Тогда, используя (12), (13), приходим к оценке

$$\int\limits_a^b A_1(C;h,h')dx \leqslant \int\limits_{e_\delta} A_1(C;h,h')dx + \int\limits_{e^\delta} A_1(C;h,h')dx <$$
$$< \varepsilon\,\mathrm{mes}\,(e_\delta) + M_{A_1}\,\mathrm{mes}\,(e^\delta) < \varepsilon\,(b-a) + M_{A_1}\,\varepsilon = \varepsilon\,((b-a) + M_{A_1})\,,$$

где $M_{A_1} = \sup\limits_{x\in[a;b],\,h\in C_\Delta} A_1(C;h,h')$. Таким образом, в силу (14) получаем:

$$\int\limits_a^b A_1(C;h,h')\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \to 0.$$

Перейдем к оценке второго интеграла справа в (11), используя условия (7) и свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега [11]. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$ так, чтобы

$$(|h(x)| < \delta,\ |h'(x)| < \delta) \quad \Longrightarrow \quad \left(A_2(C;h,h') < \varepsilon \ \text{ и } \int\limits_{e^\delta} |y'|^p dx < \varepsilon\right).$$

Тогда, используя (12), (13), приходим к оценке

$$\int\limits_a^b A_2(C;h,h')|y'|^p dx \leqslant \int\limits_{e_\delta} A_2(C;h,h')|y'|^p dx + \int\limits_{e^\delta} A_2(C;h,h')|y'|^p dx <$$
$$< \varepsilon \int\limits_{e_\delta} |y'|^p dx + M_{A_2} \int\limits_{e^\delta} |y'|^p dx < \varepsilon \int\limits_a^b |y'|^p dx + M_{A_2}\,\varepsilon \leqslant \varepsilon\,\|y'\|^p_{Lp} + M_{A_2}\,\varepsilon \leqslant \varepsilon\left(\|y\|^p_{W^{1,p}} + M_{A_2}\right),$$

где $M_{A_2} = \sup\limits_{x\in[a;b],\,h\in C_\Delta} A_2(C;h,h')$. Таким образом, в силу (14) получаем

$$\int\limits_a^b A_2(C;h,h')|y'|^p dx \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{W^{1,p}} \to 0.$$

Тогда $\big|\Phi(y+h) - \Phi(y)\big| \to 0$ при $\|h\|_{W^{1,p}} \to 0$ и $h \in \mathrm{span}\,(C_\Delta)$. Тем более, это верно при $h \in \mathrm{span}\,(C_\Delta)$ и $\|h\|_{C_\Delta} \to 0$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$. Следовательно, вариационный функционал $\Phi(y)$ K-непрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$, откуда по теореме 2 он непрерывен всюду в $W^{1,p}[a;b]$. □

Дадим теперь общее определение C^n-доминантной оценки роста при любом $n \in \mathbb{N}$.

4. C^n-ДОМИНАНТНАЯ ОЦЕНКА РОСТА ИНТЕГРАНТА И n-КРАТНАЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В $W^{1,p}[a;b]$

Определение 7. Будем говорить, что n раз непрерывно дифференцируемая функция $f \in C^{n-1}B_p(z)$ $(n \in \mathbb{N},\ 0 < p < \infty)$ удовлетворяет *C^n-доминантной оценке порядка p роста по z* (обозначение: $f \in C^n B_p(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ и для любых приращений h, k соответственно переменных y, z при $(x,y) \in C$ и $z \in \mathbb{R}_z$ остаточный член формулы Тейлора первого порядка для $\nabla_{yz}^{n-1} f$ допускает оценку

$$\begin{gathered}\left|\left(\Delta_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1}f\right) - \nabla_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1}f\right)\right)(x,y,z)(h,k)\right| = \\ = \left|\left[\nabla_{yz}^{n-1}f(x,y+h,z+k) - \nabla_{yz}^{n-1}f(x,y,z)\right] - \nabla_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1}f(x,y,z)\right)\cdot(h,k)\right| \leqslant \\ \leqslant A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)|z|^p,\end{gathered} \tag{15}$$

где коэффициенты A_i $(i = 1,2)$ — неотрицательные борелевские функции от h, k, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned}&(i)\ A_i \text{ локально по } h \text{ ограничены равномерно по } k;\\ &(ii)\ A_i(C;h,k) = o(|h|+|k|) \text{ при } h,k \to 0.\end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что из определения следует n-кратная равномерно непрерывная дифференцируемость f на $C \times \mathbb{R}_z$ для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$.

Лемма 1. *Справедливо включение*

$$C^n B_{p-k}(z) \subset C^n B_p(z) \qquad (0 < k < p < \infty).$$

Доказательство. Пусть функция $f \in C^n B_{p-k}(z)$. Тогда по определению 7 имеем:

$$\begin{gathered}\left|\left(\Delta_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1}f\right) - \nabla_{yz}\left(\nabla_{yz}^{n-1}f\right)\right)(x,y,z)(h,k)\right| \leqslant \\ \leqslant A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)|z|^{p-k} \leqslant A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)\left(1+|z|^p\right) \leqslant \\ \leqslant \left[A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)\right] + A_2(C;h,k)|z|^p =: \widetilde{A}_1(C;h,k) + \widetilde{A}_2(C;h,k)|z|^p,\end{gathered}$$

где коэффициенты $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2$ удовлетворяют условиям (16). Таким образом, функция $f \in CB_p(z)$. □

Напомним определение доминантно C^n-гладкой функции [9].

Определение 8. Будем говорить, что n раз непрерывно дифференцируемая функция $P : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *доминантно (по переменным x, y) C^n-гладкой по z* (обозначение: $P \in C^n_{dom}(z)$), если для любого компакта $C \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$ отображения P, $\nabla_{yz}P, \ldots, \nabla_{yz}^n P$ равномерно непрерывны и ограничены на множестве $C \times \mathbb{R}_z$. Другими словами, $P \in C_{dom}(z)$, $\nabla_{yz}P \in C_{dom}(z), \ldots$, $\nabla_{yz}^n P \in C_{dom}(z)$.

Приведем важный класс примеров функций $f \in C^n B_p(z)$.

Предложение 3. *Если n раз непрерывно дифференцируемая функция f представима в виде*

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z)\, z^p \qquad (p \in \mathbb{N}, \quad n+1 \leqslant p < \infty),$$

где $P \in C^n_{dom}(z)$ и $Q \in C^n_{dom}(z)$, то $f \in C^n B_p(z)$.

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условию предложения. Покажем вначале справедливость предложения для $n = 1$. Аналогично доказательству предложения 2 с учетом доминантной гладкости соответствующих выражений получим оценку

$$|\Delta_{yz} f(x,y,z;h,k) - \nabla_{yz} f(x,y,z)\cdot(h,k)| \leqslant A_1(C;h,k) + A_2(C;h,k)|z|^p,$$

где коэффициенты A_1, A_2 удовлетворяют условиям (16) определения 7 при $n = 1$. Следовательно, $f \in C^1 B_p(z)$.

Заметим, что функции P и Q в предложении могут быть векторнозначными.

Далее для градиента 1-го порядка от функции f имеем:

$$\nabla_{yz} f(x,y,z) = \left(\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\, z^p \right)(x,y,z); \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z}\, z^p + Q\, p\, z^{p-1} \right)(x,y,z) \right) =$$
$$= \left[\nabla_{yz} P(x,y,z) + \nabla_{yz} Q(x,y,z)\, z^p \right] + \left(O; Q(x,y,z)\, p \right) z^{p-1} =: f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z),$$

где $f_1 \in C^1 B_p(z)$ и $f_2 \in C^1 B_{p-1}(z)$ по условию предложения, верного, как мы показали выше, для $n = 1$. Так как по лемме 1 $f_2 \in C^1 B_p(z)$, то в силу линейности пространства $C^1 B_p(z)$ функция $\nabla_{yz} f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) \in C^1 B_p(z)$. Следовательно, по определению 7 для $n = 2$ $f \in C^2 B_p(z)$.

Продолжая аналогично для градиента $(n-1)$-го порядка функции f, имеем:

$$\nabla^{n-1}_{yz} f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) + \ldots + f_n(x,y,z),$$

где $f_i := P_i + Q_i\, z^{p-i+1}$, $P_i, Q_i \in C_{dom}(z)$ $(i = \overline{1,n})$. При этом по условию предложения $(n = 1)$

$$f_1 \in C^1 B_p(z), \quad f_2 \in C^1 B_{p-1}(z), \quad \ldots, \quad f_n \in C^1 B_{p-n+1}(z).$$

Так как по лемме 1 $f_2, \ldots, f_n \in C^1 B_p(z)$, то в силу линейности пространства $C^1 B_p(z)$ функция $\nabla^{n-1}_{yz} f(x,y,z) = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z) + \ldots + f_n(x,y,z)$ принадлежит $C^1 B_p(z)$. Следовательно, по определению 7 $f \in C^n B_p(z)$. □

Замечание 4. Утверждение предложения 3 также справедливо и для псевдополиномов более общего вида:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} P_k(x,y,z)\, z^k \qquad (p \in \mathbb{N}, \quad n+1 \leqslant p < \infty)\,,$$

где $P_k \in C^n_{dom}(z)$.

Далее установим по индукции общий факт о тождестве n-кратной H-дифференцируемости и n-кратной дифференцируемости для отображений в банаховых пространствах. Напомним, что H-дифференцируемость (или дифференцируемость по Адамару) означает сильную дифференцируемость на всех подпространствах, порожденных компактами относительно *исходной нормы*. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть E, F — банаховы пространства. Если отображение $\Phi : E \to F$ n раз H-дифференцируемо в точке $y \in E$, то оно n раз дифференцируемо в этой точке.*

Доказательство. Покажем, что теорема верна при $n = 1$. Аналогично доказательству теоремы 2 методом от противного доказывается, что отображение $\Phi(y)$ дифференцируемо в точке y.

Предположим, что теорема верна при $n = m$ и докажем справедливость теоремы для $(m+1)$-го случая. Также аналогично доказательству теоремы 2 методом от противного доказывается, что отображение $\Phi(y)$ $m+1$ раз дифференцируемо в точке y.

Таким образом, на основании метода математической индукции доказана n-кратная дифференцируемость отображения Φ в точке. □

Также по индукции покажем теперь, что условие определения 7 для интегранта гарантирует n-кратную H-дифференцируемость, а в силу теоремы 4 и n-кратную дифференцируемость основного вариационного функционала во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$, т. е. справедлива

Теорема 5. *Если интегрант $f \in C^n B_p(z)$ $(n \leqslant p < \infty)$, то вариационный функционал n раз дифференцируем во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$. При этом справедливо равенство*

$$\Phi^{(n)}(y)(h)^n = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial}{\partial y} h + \frac{\partial}{\partial z} h' \right)^n f(x,y,y')dx. \tag{17}$$

Доказательство. Покажем справедливость теоремы при $n = 1$. Вначале докажем K-непрерывность, а в силу теоремы 2 и непрерывность формального дифференциала Адамара $d_H\Phi(y,h)$ в $W^{1,p}[a;b]$. Фиксируем $y(\cdot) \in C^1[a;b] \subset W^{1,p}[a;b]$ и положим $C = [a;b] \times y([a;b])$). Фиксируем а.в. компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$ и выберем $h \in C_\Delta$. При этом множество $\bigl\{|h(x)| \bigm| h \in C_\Delta,\ x \in [a;b]\bigr\}$ ограничено. Оценим этот дифференциал

$$\bigl|d_H\Phi(y,h)\bigr| \leqslant \int\limits_a^b \left(\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right| |h| + \left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right| |h'|\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant max\left(\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|, \sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right|\right) \int\limits_a^b (|h| + |h'|)\,dx \leqslant M\,N_{1p}\,\|h\|_{W^{1,p}},$$

где N_{1p} — соответствующая соболевская константа (см. определение 4, неравенство (4)). Тогда $\|d_H\Phi(y,\cdot)\|_{W^{1,p}} \leqslant M\,N_{1p}$ для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$, откуда формальный дифференциал Адамара $d_H\Phi(y,h)$ K-непрерывен в $W^{1,p}[a;b]$. Следовательно, по теореме 2 он непрерывен в $W^{1,p}[a;b]$.

Проведем оценку $\Delta\Phi(y,h) - d_H\Phi(y,h)$, используя условие (15) ($n = 1$):

$$\bigl|\Delta\Phi(y,h) - d_H\Phi(y,h)\bigr| \leqslant \int\limits_a^b \bigl|\left(\Delta_{yz}f - \nabla_{yz}f\right)(x,y,y')(h,h')\bigr| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b A_1(C;h,h')dx + \int\limits_a^b A_2(C;h,h')|y'|^p dx, \tag{18}$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h', удовлетворяющие условиям (16) (при $k = h'$). Аналогично доказательству теоремы 3 оценивается отдельно каждый из интегралов справа в (18) при условии, что $y \in C^1[a;b]$. Из (18) получаем в итоге

$$\bigl|\Delta\Phi(y,h) - d_H\Phi(y,h)\bigr| \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \to 0$$

для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$, что и означает H-дифференцируемость вариационного функционала $\Phi(y)$ во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$, а также справедливость равенства (17) ($n = 1$).

Следовательно, по условию теоремы 4 для $n = 1$ он дифференцируем во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$.

Предположим, что теорема верна при $n = m$ и докажем справедливость теоремы для $(m+1)$-го случая. Вначале аналогично случаю $n = 1$ оценим формальный дифференциал Адамара $d_H^{m+1}\Phi(y,h)$:

$$\bigl|d_H^{m+1}\Phi(y,h)\bigr| \leqslant \int\limits_a^b \left|\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \frac{\partial^{m+1} f(x,y,z)}{\partial^k y\,\partial^{m+1-k} z} h^k (h')^{m+1-k}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \left|\frac{\partial^{m+1} f(x,y,z)}{\partial^k y\,\partial^{m+1-k} z}\right| |h|^k |h'|^{m+1-k}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_k \left(\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{\partial^{m+1} f(x,y,z)}{\partial^k y\,\partial^{m+1-k} z}\right|\right) \int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k |h|^k |h'|^{m+1-k}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \left(\int\limits_a^b |h|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \left(\int\limits_a^b |h'|^{\frac{p(m+1-k)}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \leqslant M_1 M_2 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \|h\|_{L_p}^k \|h'\|_{L_p}^{p-k} =$$

$$= M_1 M_2 \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k \|h\|_{L_p}^k \|h'\|_{L_p}^{m+1-k} \|h'\|_{L_p}^{p-m-1} = M_1 M_2 \left(\|h\|_{L_p} + \|h'\|_{L_p}\right)^{m+1} \|h'\|_{L_p}^{p-m-1} \leqslant$$

$$\leqslant M_1M_2M_3\|h\|^{m+1}_{W^{1,p}}\|h\|^{p-m-1}_{W^{1,p}} = M_1M_2M_3\|h\|^p_{W^{1,p}}.$$

Тогда $\left\|d^{m+1}_H\Phi(y,\cdot)\right\|_{W^{1,p}} \leqslant M_1M_2M_3M_4$ для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$, откуда формальный дифференциал Адамара $d^{m+1}_H\Phi(y,h)$ $(m+1)$ раз K-непрерывен в $W^{1,p}[a;b]$. Следовательно, по теореме 2 он $(m+1)$ раз непрерывен в $W^{1,p}[a;b]$.

Проведем оценку $\Delta^m\Phi(y,h) - d^{m+1}_H\Phi(y)(h)^{m+1}$, используя условие (15) для $\nabla^m_{yz}f$:

$$\left|\Delta^m\Phi(y,h) - d^{m+1}_H\Phi(y)(h)^{m+1}\right| \leqslant \int\limits_a^b \left|\left(\Delta_{yz}\left(\nabla^m_{yz}f\right) - \nabla\left(\nabla^m_{yz}f\right)\right)(x,y,y')(h,h)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b A_1(C;h,h')dx + \int\limits_a^b A_2(C;h,h')|y'|^p dx, \tag{19}$$

где коэффициенты A_1, A_2 — неотрицательные борелевские функции от h и h', удовлетворяющие условиям (16) (при $k = h'$). Аналогично случаю $n = 1$ из (19) получаем в итоге

$$\left|\Delta^m\Phi(y,h) - d^{m+1}_H\Phi(y)(h)^{m+1}\right| \to 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \to 0 \tag{20}$$

для любого а.в. компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}[a;b]$.

Так как по предположению вариационный функционал m раз H-дифференцируем и справедливо условие (20), то формальный дифференциал Адамара порядка $m+1$ есть дифференциал Адамара порядка $m+1$. Это и означает $(m+1)$-кратную H-дифференцируемость функционала $\Phi(y)$ во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$, а также справедливость равенства (17). Следовательно, по теореме 4 он $(m+1)$ раз дифференцируем во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$.

Таким образом, на основании метода математической индукции доказана n-кратная дифференцируемость функционала $\Phi(y)$ во всех C^1-гладких точках из $W^{1,p}[a;b]$. □

Результаты И. В. Орлова получены при финансовой поддержке регионального гранта РФФИ (проект № 15-41-01005).

Библиографический список

1. *Tonelli L.* Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. Bologna : Zanichelli, 1921–1923.
2. *Dacorogna B.* Direct methods in the calculus of variations. N. Y. : Springer-Verlag, 1989.
3. *Jost J., Li-Jost X.* Calculus of variations. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998.
4. *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Осмоловский Н. П., Протасов В. Ю., Тихомиров В. М., Фурсиков А. В.* Оптимальное управление. М. : МЦНМО, 2008.
5. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в простанстве Соболева H^1: учеб. пособие. Симферополь : ДИАЙПИ, 2010.
6. *Кузьменко Е. М.* Компактные экстремумы и компактно аналитические свойства вариационных функционалов в шкале пространств Соболева $W^{1,p}$ над многомерной областью. : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Симферополь, 2014. 142 с.
7. *Orlov I. V.* Compact-analitical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ // Eurasian Math. J. 2012. Vol. 3, № 2. P. 94–119.
8. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев : Наук. думка, 1973.
9. *Schmeisser H.-J.* Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness // Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications : Proc. of the Spring School held in Prague. May 30–June 6, 2006. Praha : Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007. Vol. 8. P. 145–204.
10. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона – Никодима справедлива в любом пространстве Фреше // Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 37. С. 55–69.
11. *Богачев В. И.* Основы теории меры : в 2 т. Т. 1. М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

Dominant Integrands Growth Estimates and Smoothness of Variational Functionals in Sobolev Spaces

I. V. Orlov, I. A. Romanenko

Orlov Igor Vladimirovich, Romanenko Igor Alekseevich, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, 4, Vernadskogo ave., 295007, Simferopol, Republic of Crimea, Russia, igor_v_orlov@mail.ru, rom.igor.alex@gmail.com

For variational functionals in Sobolev spaces $\{W^{1,p}\}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ we introduce a sequence of so-called dominant "growth estimates" for the gradient of appropriate order of the integrand, each of which guarantees the appropriate level of smoothness of variational functional in the C^1-smooth points of the Sobolev space. Earlier studied K-pseudopolynomial representations of the integrand are particular cases of dominant growth estimates. However, unlike the pseudopolynomial case $(p \in \mathbb{N})$, our approach enables us to consider variational problems on the complete Sobolev scale $(1 \leqslant p < \infty)$.

Key words: variational functional, Sobolev spaces, integrant, dominant growth estimates, dominating mixed smoothness, variational problems.

The results of the first author were obtained by the financial support of Regional Grant of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-41-01005).

References

1. Tonelli L. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Bologna, Zanichelli, 1921–1923.
2. Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations*. New York, Springer-Verlag, 1989.
3. Jost J., Li-Jost X. *Calculus of variations*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1998.
4. Galeev Je. M., Zelikin M. I., Konjagin S. V., Magaril-Il'jaev G. G., Osmolovsky N. P., Protasov V. Yu., Tikhomirov V. M., Fursikov A. V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal control]. Moscow, MCNMO, 2008(in Russian).
5. Orlov I. V., Bozhonok E. V. *Dopolnitel'nye glavy sovremennogo estestvoznanija. Variacionnoe ischislenie v prostanstve Soboleva H^1: uchebnoe posobie* [Additional chapters of modern science. The calculus of variations in Sobolev space H^1: tutorial]. Simferopol', DIAJPI, 2010 (in Russian).
6. Kuz'menko E. M. *Kompaktnye jekstremumy i kompaktno analiticheskie svojstva variacionnyh funkcionalov v shkale prostranstv Soboleva $W^{1,p}$ nad mnogomernoj oblast'ju*. Diss. kand. fiz.-mat. nauk [Compact extrema and compact-analytical properties of variational functionals in the scale of Sobolev spaces $W^{1,p}$ over multidimensional domain : Dr. phys. and math. sci. diss.]. Simferopol', 2014, 142 p. (in Russian).
7. Orlov I. V. Compact-analitical properties of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$. *Eurasian Math. J.*, 2012, vol. 3, no 2, pp. 94–119.
8. Skrypnik I. V. *Nelinejnye jellipticheskie uravnenija vysshego porjadka* [Nonlinear elliptic equations of a higher order]. Kiev, Naukova dumka, 1973 (in Russian).
9. Schmeisser H.-J. Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness. *Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30-June 6, 2006*. Praha, Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, 2007, vol. 8, pp. 145–204.
10. Orlov I. V., Stonjakin F. S. Predel'naja forma svojstva Radona – Nikodima spravedliva v ljubom prostranstve Freshe [Limit shape of property of the Radon – Nikodim is valid in any Frechet space]. *Sovremennaja matematika. Fundamental'nye napravlenija* [Modern mathematics. Fundamental directions], 2010, vol. 37, pp. 55—69 (in Russian).
11. Bogachev V. I. *Osnovy teorii mery. Tom 1* [Foundations of the theory of measure. Vol. 1]. Moscow, Izhevsk, NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2003 (in Russian).