УДК 517.524

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫМИ ДРОБЯМИ НИКИПОРЦА

В. И. Шмойлов[1], Г. А. Кириченко[2]

[1]Научный сотрудник, Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Shmoylov40@at.infotectt.ru

[2]Аспирант кафедры вычислительной техники, Южный федеральный университет, Таганрог, vt_gak@mail.ru

Приводятся аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно используется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей.

Ключевые слова: алгебраические уравнения, бесконечные определители Теплица, расходящиеся непрерывные дроби, r/φ-алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании современных сложных объектов необходимо уже на предварительных стадиях разработки анализировать их предполагаемые характеристики. Для моделирования используются как дифференциальные и интегральные уравнения, так и классические алгебраические уравнения — один из старейших объектов исследований в математике.

Имеются разнообразные применения алгебраических уравнений при решении научных и технических задач. Алгебраические уравнения возникают, например, при изучении равновесных состояний сложных термодинамических и механических систем. Часто алгебраические уравнения появляются в аэродинамике. Например, скорость набора высоты самолета определяется из алгебраического уравнения восьмой степени. При вычислении скоса потока за крылом по теории Прандтля используются алгебраические уравнения, степень которых зависит от принятого закона изменения коэффициента подъемной силы от угла атаки. При расчете устойчивости различных конструкций используют так называемые собственные значения матриц, определяемые из решения алгебраических уравнений, степень которых равна количеству учитываемых гармоник. Особенно часто алгебраические уравнения возникают при выполнении разнообразных геометрических расчетов: определении точек пересечения и сопряжения криволинейных контуров, при проектировании поверхностей — крыльев, фюзеляжей, обтекателей и т. п.

Разным аспектам теории и практики алгебраических уравнений посвещены недавно опубликованные монографии [1, 2]. Тем не менее, актуальной является оценка ситуации в этом разделе математики, которая была дана известным американским специалистом Р. Хеммингом в книге, вышедшей полстолетия назад: «Задача нахождения корней многочленов возникает достаточно часто для того, чтобы оправдать тщательное изучение и разработку специальных методов ее решения. Различным известным методам нахождения действительных линейных и квадратичных множителей можно посвятить целую книгу. Тот факт, что существует так много методов, показывает, что не существует ни одного вполне удовлетворительного» [3, с. 355]. В самом деле, известно более сотни алгоритмов и их модификаций, которые используются для нахождения нулей полиномов [4]. В основном это алгоритмы численного решения алгебраических уравнений. Среди аналитических алгоритмов решения алгебраических уравнений наиболее известна так называемая интегральная формула Меллина, опубликованная в 1921 г. [5]. Недавно появилась работа [6], в которой подход Меллина получил дальнейшее развитие.

Далее будут рассмотрены аналитические выражения, представляющие все корни произвольного алгебраического уравнения n-й степени через коэффициенты исходного уравнения. Эти формулы состоят из двух отношений бесконечных определителей Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты алгебраического уравнения. Для нахождения комплексных корней дополнительно применяется метод суммирования расходящихся непрерывных дробей, именуемый как r/φ-алгоритм [7], нашедший разнообразные применения в вычислительной математике [8–12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Имеется алгебраическое уравнение степени n:

$$x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n = 0. \tag{1}$$

Запишем следующую производящую функцию:

$$\frac{1}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m + \dots . \tag{2}$$

Коэффициенты α_i в (1) и (2) совпадают. Коэффициенты c_m последовательности (2) могут быть найдены из линейного рекуррентного соотношения:

$$c_m = -\bigl(\alpha_1 c_{m-1} + \alpha_2 c_{m-2} + \dots + \alpha_n c_{m-n}\bigr), \qquad c_0 = 1, \qquad c_1 = -\alpha_1.$$

Для определения корней алгебраического уравнения (1) Эйткен предложил формулы [13]:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{c_{m+1}}{c_m} = x_1, \tag{3}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} : \frac{c_{m+1}}{c_m} \right) = \frac{x_1 x_2}{x_1} = x_2, \tag{4}$$

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \\ c_{m+3} & c_{m+4} & c_{m+5} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & c_{m+3} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & c_{m+4} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} \\ c_{m+2} & c_{m+3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} \end{vmatrix}} \right) = \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2} = x_3, \tag{5}$$

Для x_i имеет место выражение

$$x_i = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{H_i^{(m+1)}}{H_i^{(m)}} : \frac{H_{i-1}^{(m+1)}}{H_{i-1}^{(m)}} \right),$$

где

$$H_i^{(m)} = \begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}, \qquad H_0^{(m)} = 1.$$

Таким образом, корень x_i может быть представлен выражением

$$x_i = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i+1} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+i} & c_{m+i+1} & \dots & c_{m+2i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-2} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+2} & c_{m+3} & \dots & c_{m+i} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+i-1} & c_{m+i} & \dots & c_{m+2i-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_m & c_{m+1} & \dots & c_{m+i-1} \\ c_{m+1} & c_{m+2} & \dots & c_{m+i} \\ . & . & \dots & . \\ c_{m+i-2} & c_{m+i-1} & \dots & c_{m+2i-4} \end{vmatrix}} \right). \tag{6}$$

Очевидно, что, используя формулы Эйткена, можно непосредственно находить только действительные корни алгебраического уравнения (1). Способ нахождения старшего по модулю действительного корня алгебраического уравнения (1), описываемый формулой (3), как известно, принадлежит Д. Бернулли. Применим r/φ-алгоритм к определению комплексных корней алгебраического уравнения (1).

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НУЛЕЙ ПОЛИНОМА

Запишем формулы Эйткена (3)–(6) в развернутом виде. В результате преобразований получим конструкции из отношений определителей матриц Теплица, диагональными элементами которых являются коэффициенты исходного уравнения (1).

Формулу (3) можно представить отношением определителей:

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Последующие корни уравнения (1) запишутся следующим образом:

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots \\ 0 & -1 & -\alpha_1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}, \tag{8}$$

$$x_i = -\frac{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & -\alpha_{i+3} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & -\alpha_{i+2} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-4} & -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & -\alpha_{i+1} & \dots \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & -\alpha_i & \dots \\ -\alpha_{i-3} & -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Отношения определителей (7)–(9), выражающие корни алгебраического уравнения (1) через его коэффициенты, будем называть *функциями* $N_i^{(n)}$. Для функций $N_i^{(n)}$ введём обозначение:

$$N_i^{(n)} = N_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Здесь следует подчеркнуть, что для алгебраических уравнений степени выше четвёртой функции $N_i^{(n)}$ записываются аналогично их записи для уравнений степени 2, 3 и 4.

Если все корни уравнения n-й степени действительны, то значения этих корней со все большей точностью можно установить непосредственно, вычисляя последовательно значения определителей, входящих в формулы (7)–(9). Функции $N_i^{(n)}$, определяемые выражениями (7)–(9), будем называть также *непрерывными дробями Никипорца*. Этому есть свои объяснения.

В [14] были предложены обобщенные непрерывные дроби, задаваемые отношением определителей общего вида:

$$w = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ . & . & . & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nm} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}}. \tag{10}$$

Представление «обобщенной» непрерывной дроби отношением определителей квадратных матриц общего вида (10) имеет то основание, что все известные классы непрерывных дробей есть частные случаи непрерывной дроби (10). Например, обыкновенные непрерывные дроби, или цепные дроби, могут быть записаны отношением трёхдиагональных определителей:

$$a_{11} + \cfrac{a_{12}}{a_{22} + \cfrac{a_{23}}{a_{33} + \cfrac{a_{34}}{a_{44} + \cfrac{a_{45}}{a_{55} + \dots}}}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots \\ -1 & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & a_{44} & a_{45} & \dots \\ 0 & 0 & -1 & a_{55} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}$$

Ветвящиеся непрерывные дроби [15], или непрерывные дроби Скоробогатько, представляются отношением определителей характерной ступенчатой структуры:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots} + \cfrac{a_4}{b_4 + \dots}} + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_5}{b_5 + \dots} + \cfrac{a_6}{b_6 + \dots}} = \frac{\begin{vmatrix} b_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & a_5 & a_6 & \dots \\ -1 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b_5 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b_6 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}}.$$

Определение математических конструкций (7)–(9) как непрерывных дробей особой структуры позволяет естественно ввести такое фундаментальное понятие, как подходящая дробь, что упрощает описание способа решения алгебраических уравнений с использованием функций $N_i^{(n)}$ и r/φ-алгоритма.

Для нахождения комплексных корней уравнения (1), определяемых также формулами (7)–(9), необходимо дополнительно использовать r/φ-алгоритм. Модуль r_i и модуль аргумента φ_i искомого комплексного числа $x_i = r_i e^{i\varphi_i}$ устанавливаются здесь формулами:

$$r_i = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\prod_{m=1}^{m} \left|\overline{x}_i^{(m)}\right|}, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

$$|\varphi_i| = \pi \lim_{m\to\infty} \frac{k_i^{(m)}}{m}, \tag{12}$$

где $\overline{x}_i^{(m)}$— m-я подходящая дробь выражения (9), $k_i^{(m)}$ — число отрицательных подходящих дробей для i-го корня из m подходящих дробей.

Например, подходящие дроби для x_2 определяются следующим образом:

$$\overline{x}_2^{(1)} = -\frac{|-\alpha_2|}{1} : \frac{|-\alpha_1|}{1},\ \overline{x}_2^{(2)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{|-\alpha_2|} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{|-\alpha_1|},$$

$$\overline{x}_2^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ -1 & -\alpha_1 \end{vmatrix}},$$

$$\dots .$$

Вычисление подходящих дробей непосредственно по формуле (9) весьма затруднительно при больших размерностях определителей, входящих в эту формулу. Однако легко заметить, что определители, имеющиеся в формуле (9), не есть определители общего вида. В эти формулы входят определители от матриц Теплица, в которых элементы, расположенные на диагоналях, параллельных главной, — одинаковые. Для вычисления формул (9) можно использовать рекуррентную схему, получившую название «алгоритм частных и разностей», или QD-алгоритм Рутисхаузера [16].

3. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ r/φ-АЛГОРИТМА

В табл. 1–5 приведены результаты вычисления корней уравнения

$$x^{12} - x^{11} - x^{10} - x^9 - x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{13}$$

при помощи непрерывных дробей (9) и r/φ-алгоритма, определяемого формулами (11) и (12).

Предел отношения определителей, входящих в формулу (14), совпадает со значением старшего по модулю корня уравнения (13):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ . & . & \dots & . & . & \dots \end{vmatrix}} = 1.99975500937\dots . \tag{14}$$

Результаты вычисления вещественного корня x_1 уравнения (13) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты вычисления вещественного корня $x_1 = 1.99975500937\ldots$

Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Номер звена дроби	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$
0	1.000000000000	0.9997555009370	22	1.999755531109	−0.000000030172
1	2.000000000000	−0.000244499063	23	1.999755501222	−0.000000000285
12	1.999511718750	−0.000243782187	25	1.999755501135	−0.000000000198
13	1.999755799756	−0.000000298819	26	1.999755501098	−0.000000000161
14	1.999755769935	−0.000268998000	27	1.999755501066	−0.000000000129
15	1.999755740107	−0.000000239170	28	1.999755501036	−0.000000000099
16	1.999755710272	−0.000000209335	29	1.999755501011	−0.000000000074
17	1.999755680430	−0.000000179493	30	1.999755500989	−0.000000000052
18	1.999755650580	−0.000000149643	31	1.999755500970	−0.000000000033
19	1.999755620723	−0.000000119786	32	1.999755500956	−0.000000000019
20	1.999755590859	−0.000000089922	33	1.999755500945	−0.000000000008
21	1.999755560988	−0.000000060051	34	1.999755500938	−0.000000000001

Данные табл. 1 показывают высокую скорость сходимости непрерывной дроби (14), которой представляется вещественный корень уравнения (13).

Запишем непрерывные дроби для корней x_2 и x_3 уравнения (13):

$$x_2 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}},$$

$$x_3 = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ -1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}}.$$

На рис. 1 показаны графики значений подходящих непрерывных дробей, которые представляют корни алгебраического уравнения (13). Из графиков на рис. 1, *а*, *м* видно, что x_1 и x_{12} — вещественные корни. Также из графиков можно заключить, что уравнение (13) имеет пять пар комплексно-сопряжённых корней. «Периодичность» в расположении подходящих комплексных корней чётко видна в правой половине графиков, представленных на рис. 1.

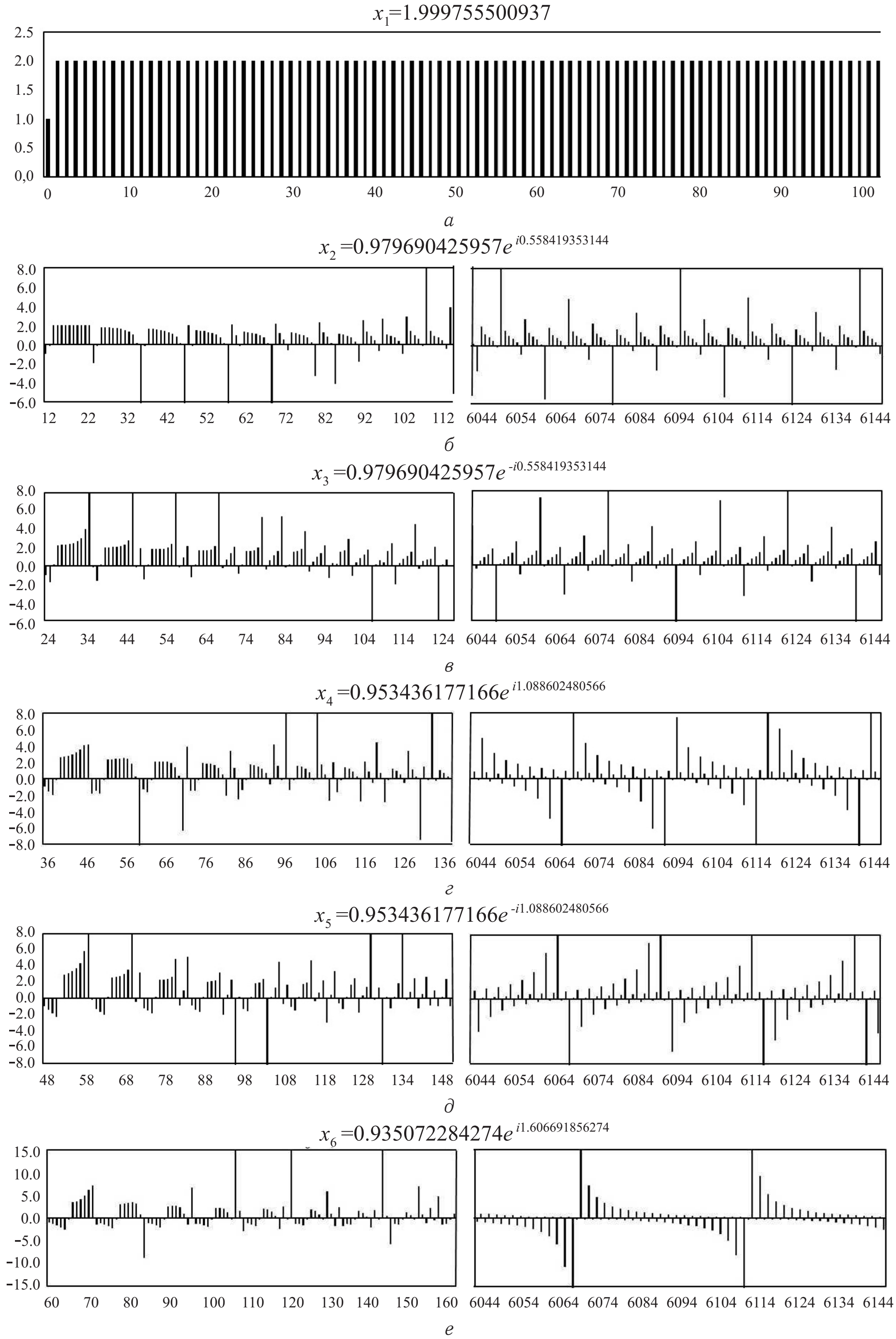

Рис. 1. Начало. Распределение подходящих дробей, представляющих корни алгебраического уравнения (13)

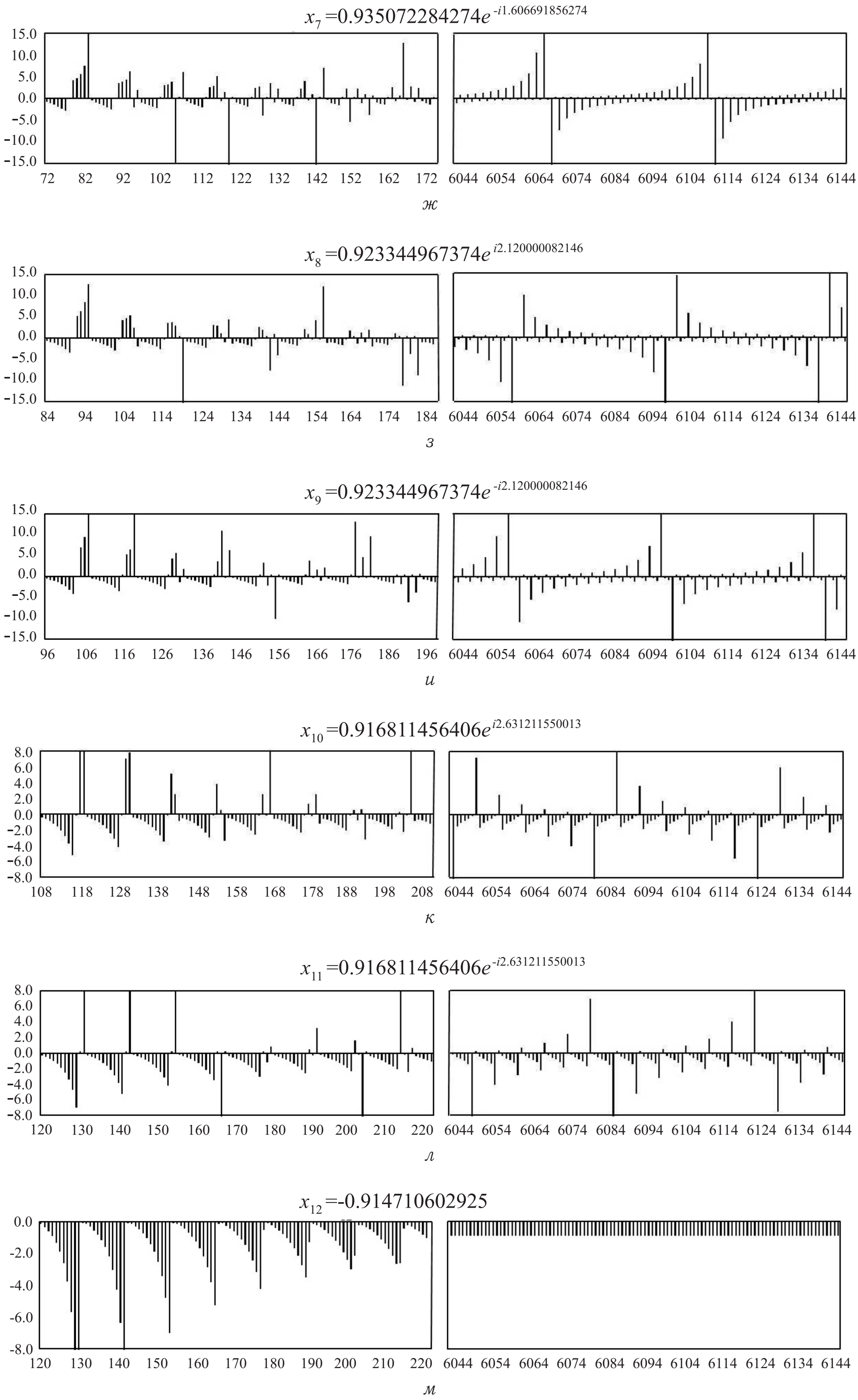

Рис. 1. Окончание

В табл. 2 и 3 приведены результаты вычисления первой пары комплексно-сопряженных корней уравнения (13) при помощи r/φ-алгоритма, то есть формул (11) и (12).

Таблица 2

Результаты вычисления комплексного корня $x_2 = 0.979690425957e^{i0.558419353144}$

Номер дроби	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	1.501296168008	0.864581149632	0.115109276325	0.598398600684	−0.039979247540
64	1.206754380797	0.929375999911	0.050314426046	0.592753330866	−0.034333977722
128	0.790280743715	0.958447588838	0.021242837119	0.563875604490	−0.005456251346
256	1.182647495564	0.970361670301	0.009328755656	0.564204394930	−0.005785041786
512	0.040108503235	0.967761878002	0.011928547955	0.558087317704	0.000332035440
1024	−0.006146637028	0.971932508313	0.007757917644	0.561330967719	−0.002911614575
2048	−0.111326789935	0.977170978893	0.002519447064	0.559841989815	−0.001422636671
4096	−0.395348926941	0.978685754271	0.001004671686	0.559103515094	−0.000684161950

Таблица 3

Результаты вычисления комплексного корня $x_3 = 0.979690425957e^{-i0.558419353144}$

Номер дроби	Значение подходящих дробей	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
32	2.664690114532	0.602084440858	0.377605985099	−0.698131700798	0.139712347654
64	1.691424133396	0.871677635662	0.108012790295	−0.612993688505	0.054574335361
128	1.376117926277	0.953841250747	0.025849175210	−0.568478670650	0.010059317506
256	0.814122533036	0.966453199595	0.013237226362	−0.566295671463	0.007876318319
512	23.92984168573	0.980954443190	−0.001264017233	−0.558933662295	0.000514309151
1024	-156.1493425219	0.982185980387	−0.002495554430	−0.561783301691	0.003363948547
2048	-8.621404886212	0.979563790294	0.000126635663	−0.560056764418	0.001637411274
4096	-2.427711991375	0.979374005615	0.000316420342	−0.559208120268	0.000788767124

В табл. 4 приведены результаты вычисления комплексных корней уравнения (13) по формулам (11) и (12) с использованием 4096 подходящих дробей.

Таблица 4

Результаты вычисления комплексных корней уравнения (13)

Номер корня	Значение модуля, r_i	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Значение аргумента, φ_i	Погрешность аргумента, $\varphi_0 - \varphi_i$
x_2	0.978685754271	0.001004671686	0.559103515094	−0.000684161950
x_3	0.979374005615	0.000316420342	−0.559208120268	0.000788767124
x_4	0.952951183889	0.000484993278	1.089229858718	−0.000627378152
x_5	0.952945508991	0.000490668176	−1.089354429647	0.000751949081
x_6	0.933794454170	0.001277830104	1.606982618197	−0.000290761923
x_7	0.935996065142	−0.000923780868	−1.607090502793	0.000398646519
x_8	0.923441518037	−0.000096550663	2.120751183298	−0.000751101152
x_9	0.923354809862	−0.000009842488	−2.120830231779	0.000830149633
x_{10}	0.916414755115	0.000396701291	2.631251204724	−0.000039654711
x_{11}	0.917193803082	−0.000382346676	−2.631291206716	0.000079656703

На рис. 2 показаны значения корней уравнения (13) на комплексной плоскости.

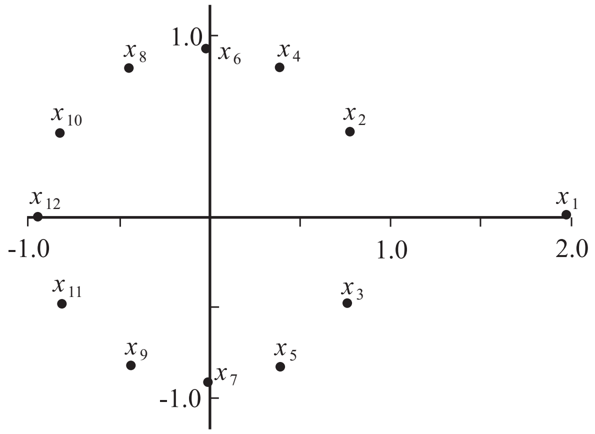

Рис. 2. Расположение корней уравнения (13) на комплексной плоскости

В табл. 5 приведены результаты вычисления второго действительного корня уравнения (13).

Таблица 5

Результаты вычисления вещественного корня $x_{12} = -0.914710602925\ldots$

Номер дроби, i	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$	Номер дроби, i	Значение подходящей дроби	Погрешность модуля, $r_0 - r_i$
120	−0.166666666667	−0.748043936258	794	−0.915108995829	0.000398392904
121	−0.369230769231	−0.545479833694	1151	−0.915064419461	0.000353816536
122	−0.619047619048	−0.295662983877	1428	−0.914696626243	−0.000013976682
123	−0.933333333333	0.018622730408	2339	−0.914714604778	0.000004001853
246	−0.900000540829	−0.014710062096	2973	−0.914712028919	0.000001425994
283	−0.911768355829	−0.002942247096	3250	−0.914711862234	0.000001259309
517	−0.917558586942	0.002847984017	3607	−0.914709718575	−0.000000884350
677	−0.912638347559	−0.002072255366	3884	−0.914710601151	−0.000000001774

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы отметили, что формулы (9), (11) и (12) представляют корни полинома n-й степени через его коэффициенты. Используя эти формулы, можно устанавливать различные критерии, связанные с корнями полиномов общего вида. Численные методы, разумеется, не способны к решению подобных задач. То обстоятельство, что в формулу (9) входят определители бесконечного порядка, не должно вызывать дополнительных вопросов, ибо нахождение даже корня квадратного уравнения также связано с бесконечной вычислительной процедурой, эквивалентной вычислению отношения значений трехдиагональных определителей размерностей $(n+1)$ и n при $n \to \infty$. Формулу (9), включающую отношения определителей Теплица бесконечного порядка, можно рассматривать как мнемоническую запись алгоритма нахождения корней произвольного алгебраического уравнения n-го порядка, которая разворачивается в последовательность арифметических операций. Точно так же мнемоническими записями являются формулы для нахождения корней квадратных или кубических уравнений. Формула (9) была названа функцией $N_i^{(n)}$. Произвольное алгебраическое уравнение степени не разрешимо в радикалах, но оно оказалось разрешимо с использованием r/φ-алгоритма в функциях $N_i^{(n)}$, записываемых отношениями определителей Теплица бесконечного порядка (9).

Применение r/φ-алгоритма к функциям $N_i^{(n)}$, то есть к конструкции (9), содержащей только действительные коэффициенты алгебраического уравнения n-й степени, позволяет «извлечь» из этих конструкций комплексные корни этого уравнения, если они, конечно, имеются. Это парадоксальный результат, не вписывающийся в классический подход к представлению комплексных чисел в «явном виде» — через выражения, содержащие $\sqrt{-1}$. Использование r/φ-алгоритма позволяет установить комплексность из «поведения» подходящих дробей. Комплексные корни находятся из «расширяющихся» непрерывных дробей (9) с использованием r/φ-алгоритма. По своей природе r/φ-алгоритм требует большого объема вычислений, так как комплексность извлекается, если она имеется, из анализа поведения длинной серии подходящих непрерывных дробей той или иной структуры, причем элементы этих непрерывных дробей вещественны.

Библиографический список

1. *Кутищев Г. П.* Решение алгебраических уравнений произвольной степени : теория, методы, алгоритмы. М. : Изд-во ЛКИ, 2010. 232 с.
2. *Корчагин И. Ф.* Алгебраические уравнения. М. : Физматкнига, 2006. 160 с.
3. *Хемминг Р. В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М. : Наука, 1972. 400 с.
4. *Шмойлов В. И., Тучапский Р. И.* Алгебраические уравнения. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Библиографический указатель. Львов : Меркатор, 2003. 83 с.
5. *Mellin H. J.* Resolution de l' equation algebrique generale a l'aide de function gamma // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I : Math. 1921. Vol. 172. P. 658–661.
6. *Михалкин Е. Н.* О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, № 2, С. 365–371.
7. *Шмойлов В. И.* Непрерывные дроби : в 3 т. Т. 2. Расходящиеся непрерывные дроби / НАН Украины, Ин-т прикл. проблем механики и математики. Львов : Меркатор, 2004. 558 с.
8. *Шмойлов В. И., Коваленко В. Б.* Некоторое применения алгоритма суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестн. Южного науч. центра РАН. 2012. № 4 (149). С. 3–13.
9. *Шмойлов В. И., Кириченко Г. А.* Определение значений расходящихся непрерывных дробей и рядов // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2012. № 4(129). С. 210–222.
10. *Шмойлов В. И., Савченко Д. И.* Об алгоритме суммирования расходящихся непрерывных дробей // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2013. № 2. С. 258–276.
11. *Шмойлов В. И.* Расходящиеся системы линейных алгебраических уравнений. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. 205 с.
12. *Гузик В. Ф., Шмойлов В. И., Кириченко Г. А.* Непрерывные дроби и их применение в вычислительной математике // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2014. № 1 (150). С. 158–174.
13. *Aitken A. C.* On Bernulli's numerical solution of algebraic equations. Edinburg : Proc. Roy. Soc., 1925, 1926. P. 289–305.
14. *Шмойлов В. И.* Непрерывные дроби и r/φ-алгоритм. Таганрог : Изд-во ТТИ ЮФУ, 2012. 608 с.
15. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и её применение в вычислительной математике. М. : Наука, 1983. 312 с.
16. *Рутисхаузер Г.* Алгоритм частных и разностей. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 93 с.

Solution of Algebraic Equations by Continuous Fractions of Nikiportsa

V. I. Shmoylov[1], G. A. Kirichenko[2]

[1]Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (SSC RAS), 41, Chehova str., Rostov-on-Don, 344006, Russia, Shmoylov40@at.infotectt.ru

2Southern Federal University, 44, Nekrasovsky, Taganrog, 347928, Russia, vt_GAK@mail.ru

Provides analytical expressions representing all the roots of a random algebraic equation of n-th degree through the coefficients of the initial equation. These formulas consist of two relations infinite Toeplitz determinants, the diagonal elements of which are the coefficients of algebraic equations. For finding complex roots additionally used the method of summation of divergent continued fractions.

Key words: algebraic equations, infinite Toeplitz determinants, r/φ-algorithm, divergent continuous fractions.

References

1. Kutishchev G. P. *Reshenie algebraicheskikh uravnenii proizvol'noi stepeni : teoriia, metody, algoritmy* [The solution of the algebraic equations of arbitrary degree : theory, methods, algorithms]. Moscow, Izd-vo LKI, 2010, 232 p. (in Russian).
2. Korchagin I. F. *Algebraicheskie uravneniia* [Algebraic equations]. Moscow, Fizmatkniga, 2006, 160 p. (in Russian).
3. Khemming R. V. *Chislennye metody dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Numerical methods for scientists and engineers]. Moscow, Nauka, 1972, 400 p. (in Russian).

4. Shmoylov V. I., Tuchapskii R. I. *Algebraicheskie uravneniia. Beskonechnye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii. Bibliograficheskii ukazatel'* [Algebraic equations. An infinite system of linear algebraic equations. Bibliographic index]. L'vov, Merkator, 2003, 83 p.
5. Mellin H. J. Resolution de l' equation algebrique generale a l'aide de function gamma. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I : Math.*, 1921, vol. 172, pp. 658–661.
6. Mikhalkin E. N. On solving general algebraic equations by integrals of elementary functions. *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 2, pp. 301–306. DOI: 10.1007/s11202-006-0043-4.
7. Shmoylov V. I. *Nepreryvnye drobi. T. 2. Raskhodiashchiesia nepreryvnye drobi* [Continuous fractions. Vol. 2. Divergent continuous fractions]. National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics, L'vov, Merkator, 2004. 558 p. (in Russian).
8. Shmoilov V. I., Kovalenko V. B. Some applications of the summation algorithm of divergent continued fractions. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra* (Vestnik SSC RAS), 2012, vol. 8, no. 4 (149), pp. 3–13 (in Russian).
9. Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Determination of the values of divergent continuous fractions and series. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, no. 4(129), pp. 210–222 (in Russian).
10. Shmoylov V. I., Savchenko D. I. Some applications of the summation algorithm of continued fractions. *Proc. Voronezh. State Univ., Ser. Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 258–276 (in Russian).
11. Shmoilov V. I. *Raskhodiashchiesia sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii* [Diverging systems of linear algebraic equations]. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2010, 205 p. (in Russian).
12. Guzik V. F. , Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Continuous fractions and their application in computational mathematics. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, no. 1 (150), pp. 158–174 (in Russian).
13. Aitken A. C. *On Bernulli's numerical solution of algebraic equations*. Edinburg : Proc. Roy. Soc., 1925, 1926, pp. 289–305.
14. Shmoilov V. I. *Continued fractions and the r/φ-algorithm*. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2012, 606 p. (in Russian).
15. Skorobogat'ko V. Ia. *Teoriia vetviashchikhsia tsepnykh drobei i ee primenenie v vychislitel'noi matematike* [The theory of branched continued fractions and its application in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1983, 312 p. (in Russian).
16. Rutishauser G. *Algoritm chastnykh i raznostei* [The algorithm private and differences]. Moscow, 1960, 93 p. (in Russian).

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дискретных операторов треугольной структуры в топологических пространствах. Указана конструктивная процедура решения обратной задачи. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: дискретные операторы, спектральная теория, обратная задача.

1. Исследуется обратная задача спектрального анализа для несамосопряженных дискретных операторов треугольной структуры в абстрактных топологических пространствах. Рассматриваемые структуры являются объектами весьма общего вида. Широкие классы обратных задач для дискретных, дифференциальных, интегро-дифференциальных операторов и пучков операторов сводятся к обратным задачам для рассматриваемых треугольных структур. В статье дается определение треугольных структур, рассматривается их канонический вид. Получено решение обратной задачи для треугольных структур. Дается приложение полученных результатов для наиболее важных классов дискретных операторов высших порядков. Отметим, что дискретные операторы второго порядка изучены достаточно подробно (см. [1–3] и библиографию в них). Дискретные операторы высших порядков исследовались в [4] и других работах.

2. Обозначим: ЛП — линейное пространство, ЛТП — полное сепарабельное линейное топологическое пространство, имеющее счетную базу. Если Γ_1 и Γ_2 — ЛП, то $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ обозначает ЛП линейных операторов, отображающих Γ_1 в Γ_2. Для $A \in \Gamma_1 \to \Gamma_2$ пусть $\Delta^1(A)$ обозначает область определения, а $\Delta^2(A) = A(\Delta^1(A))$. Оператор $A \in \Gamma_1 \to \Gamma_2$ называется неособым ($A\#0$), если $\ker A = \{0\}$,