УДК 517.547.2

О НАИМЕНЬШЕМ ТИПЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА $\rho \in (0,1)$ С НУЛЯМИ НА ЛУЧЕ

О. В. Шерстюкова

Шерстюкова Ольга Владимировна, аспирантка кафедры математического анализа, Московский педагогический государственный университет, sherov73@mail.ru

Статья посвящена теории экстремальных задач в классах целых функций с ограничениями на рост и расположение нулей и связана с проблемами полноты систем экспонент в комплексной области. Рассматривается вопрос о нахождении точной нижней грани типов при порядке $\rho \in (0,1)$ всевозможных целых функций, все нули которых лежат на одном луче и имеют заданные верхнюю ρ-плотность и ρ-шаг. Показано, что точная нижняя грань в этой задаче достигается, и приведено подробное построение экстремальной функции. Полученное в статье утверждение дает полное решение поставленной экстремальной задачи и обобщает в направлении учета шага последовательностей нулей предшествующий результат А. Ю. Попова.

Ключевые слова: тип целой функции, верхняя плотность и шаг последовательности нулей, экстремальная задача.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-4-433-441

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статья выполнена в рамках исследования экстремальных задач для целых функций с нулями на луче, начатого в работах [1, 2] и продолженного в [3–8]. В работе изучаются целые функции, все нули которых расположены на фиксированном луче и имеют заданные верхнюю плотность и шаг при показателе $\rho \in (0,1)$. Для точной формулировки задачи дадим необходимые определения.

Типом при порядке ρ (или ρ-типом) целой функции $f(z)$ называют величину

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|.$$

Верхней ρ-плотностью и ρ-шагом последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ называются соответственно характеристики

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \qquad h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \left(|\lambda_{n+1}|^\rho - |\lambda_n|^\rho\right).$$

Здесь $n_\Lambda(r) = \sum\limits_{|\lambda_n|\leqslant r} 1$ — считающая функция последовательности нулей $\Lambda = \Lambda_f$, выписанной с учетом кратностей в порядке возрастания модулей. Сразу отметим легко проверяемое соотношение $h_\rho(\Lambda) \leqslant 1/\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)$.

В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что нули целой функции $f(z)$ расположены на положительной полуоси, т. е. $\Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+$. Зафиксируем три числа ρ, β, h, удовлетворяющие условиям

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad h \in [0,\, 1/\beta],$$

и поставим следующую экстремальную задачу: найти величину

$$s(\beta,\, h;\, \rho) = \inf\left\{\sigma_\rho(f) :\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ h_\rho(\Lambda) \geqslant h\right\}. \tag{1}$$

Укажем, что при $h = 0$, т. е. в отсутствии ограничения на шаг последовательностей нулей, задача отыскания точной нижней грани

$$s(\beta,\, 0;\, \rho) =: s(\beta,\, \rho) = \inf\left\{\sigma_\rho(f) :\ \Lambda_f = \Lambda \subset \mathbb{R}_+,\ \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta\right\}$$

была ранее решена А. Ю. Поповым в работе [1]:

$$s(\beta,\,\rho) = \beta\, C(\rho) := \beta \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^{\rho}}.$$

Эта задача послужила отправной точкой для наших исследований [4, 6].

Целью статьи является доказательство следующего результата.

Теорема. *Пусть $\rho \in (0,\,1)$, $\beta > 0$, $h \in [0,\,1/\beta]$. Тогда экстремальная величина (1) вычисляется по формуле*

$$s(\beta,\,h;\,\rho) = h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{\left(1+as^{-1/\rho}\right)^{s}} + \int\limits_{a}^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right\}, \tag{2}$$

где $s = 1-\beta h$. Точная нижняя грань достигается на некоторой целой функции порядка $\rho \in (0,\,1)$ с простыми положительными нулями Λ верхней ρ-плотности $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda) = \beta$ и шага $h_{\rho}(\Lambda) = h$.

Дальнейшее содержание таково. В параграфе 2 для произвольной целой функции $f(z)$ с нулями, подчиненными условиям задачи (1), дается оценка

$$\sigma_{\rho}(f) \geqslant h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{\left(1+as^{-1/\rho}\right)^{s}} + \int\limits_{a}^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right\}. \tag{3}$$

При $h = 0$ оценку (3) следует понимать в предельном смысле ($h \to +0$) и в этом случае она дает точное неравенство

$$\sigma_{\rho}(f) \geqslant \beta\, C(\rho),$$

установленное в [1]. Интересен и другой крайний случай: $h = 1/\beta$. Тогда оценка (3), снова понимаемая в предельном смысле ($s \to +0$), приводит к формуле

$$\sigma_{\rho}(f) = \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho},$$

известной ранее при условии существования предела

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n_{\Lambda}(r)}{r^{\rho}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho}} = \beta. \tag{4}$$

Последовательности со свойством (4) называются измеримыми. По-видимому, только они считались экстремальными в хорошо известном для $\rho \in (0,\,1)$, $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$ неравенстве [9]:

$$\sigma_{\rho}(f) \leqslant \frac{\pi\beta}{\sin \pi\rho}.$$

В параграфе 3 завершается доказательство теоремы построением экстремальной целой функции. Детальное обоснование конструкции соответствующего примера потребовало значительных усилий и времени, тогда как оценка (3) уже была нами получена и опубликована в [4]. Подробный вывод этой оценки дается здесь для обеспечения цельности и полноты изложения. Кроме того, мы исправляем несущественную неточность, допущенную в [4].

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ОЦЕНКИ

Пусть $f(z)$ — целая функция, нули которой удовлетворяют условиям задачи (1). Докажем, что для типа $\sigma_{\rho}(f)$ выполнена оценка (3). По факторизационной теореме Адамара функция $f(z)$ с точностью до постоянного множителя раскладывается в бесконечное произведение нулевого рода

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Введем функцию $\varphi_r(t)$ с параметром $r > 0$ по правилу

$$\varphi_r(t) := \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho}, \qquad t > 0, \tag{5}$$

и воспользуемся формулой (см., например, [3])

$$r^{-\rho} \ln \max_{|z|\leqslant r} |f(z)| \;=\; \int\limits_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt. \tag{6}$$

Как отмечалось выше, при $h = 0$ неравенство (3) известно и поэтому в доказательстве не нуждается. Считаем далее, что $h \in (0,\, \beta]$. Рассмотрим вспомогательную последовательность $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^\infty$, шаг которой совпадает с ρ-шагом последовательности Λ, т. е.

$$h(\Omega) := \varliminf_{n\to\infty} \left(\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho\right) = h_\rho(\Lambda) \geqslant h.$$

Выберем произвольно числа $a > 0$ и $h_1 \in (0,\, h)$. По определению шага последовательности Ω найдем число $d > 0$ так, чтобы при всех $r \geqslant ad$ и $t \in [d/r,\, a^{-1}]$ для считающей функции $n_\Omega(r)$ выполнялось неравенство

$$n_\Omega\left((r/a)^\rho\right) - n_\Omega\left((rt)^\rho\right) \;\leqslant\; h_1^{-1}\left((r/a)^\rho - (rt)^\rho\right) + 1.$$

С учетом очевидного соотношения $n_\Lambda(t) = n_\Omega\left(t^\rho\right)$ перепишем последнее неравенство в виде

$$n_\Lambda(rt) \;\geqslant\; n_\Lambda(r/a) - r^\rho h_1^{-1}\left(a^{-\rho} - t^\rho\right) - 1. \tag{7}$$

Обозначив

$$\eta := \eta(r) = \varphi_r(1/a) = (r/a)^{-\rho}\, n_\Lambda(r/a),$$

по определению верхней плотности последовательности Λ имеем:

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \;\eta(r) \;=\; \beta.$$

Далее, согласно (5), (7) при всех $t \in [d/r,\, a^{-1}]$ можем записать оценку

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \geqslant \frac{n_\Lambda(r/a)}{(rt)^\rho} - \frac{a^{-\rho} - t^\rho}{h_1 t^\rho} - \frac{1}{(rt)^\rho} =$$

$$= \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho}(at)^{-\rho} \,+\, h_1^{-1} \,-\, h_1^{-1}(at)^{-\rho} \,-\, (rt)^{-\rho} \;=\; h_1^{-1} \,+\, (at)^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) \,-\, (rt)^{-\rho}.$$

Таким образом, для любых $a > 0$ и $h_1 \in (0,\, h)$ найдется $d > 0$ такое, что при всех значениях $r \geqslant ad$, $t \in [d/r,\, a^{-1}]$ справедливо неравенство

$$\varphi_r(t) \;\geqslant\; h_1^{-1} \,+\, (at)^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) \,-\, (rt)^{-\rho}. \tag{8}$$

Заметим еще, что при всех $t > a^{-1}$ имеет место тривиальная оценка:

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} \geqslant \frac{n_\Lambda(r/a)}{(rt)^\rho} = \frac{n_\Lambda(r/a)}{(r/a)^\rho}\,(at)^{-\rho},$$

которая дает

$$\varphi_r(t) \;\geqslant\; \eta\,(at)^{-\rho}, \qquad t > a^{-1}. \tag{9}$$

Объединяя оценки (8), (9), можем считать, что при всех $r \geqslant ad$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi_r(t) \;\geqslant\; \psi_r(t), \tag{10}$$

в котором

$$\psi_r(t) := \begin{cases} 0, & t \in (0,\, t_r)\,, \\ h_1^{-1} \,+\, (at)^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) \,-\, (rt)^{-\rho}, & t \in \big[t_r,\, a^{-1}\big]\,, \\ \eta\,(at)^{-\rho}, & t \in \big(a^{-1},\, +\infty\big)\,, \end{cases}$$

и $t_r := \big(h_1 r^{-\rho} + a^{-\rho}(1-\eta h_1)\big)^{1/\rho} \in (0,\, a^{-1})$. Из (10) заключаем, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \,\geqslant\, \int\limits_{t_r}^{+\infty} \psi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt, \qquad r \geqslant ad. \tag{11}$$

Вычислим последний интеграл. После замены переменной $t = \tau^{-1}$ получим:

$$\int\limits_{t_r}^{+\infty} \psi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \,=\, h_1^{-1} \int\limits_a^{t_r^{-1}} \frac{\tau^{-\rho} - a^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \,+\, \eta a^{-\rho} \int\limits_0^{t_r^{-1}} \frac{d\tau}{1+\tau} \,-\, r^{-\rho} \int\limits_a^{t_r^{-1}} \frac{d\tau}{1+\tau} =$$

$$= \big(a^{-\rho}(\eta - h_1^{-1}) - r^{-\rho}\big)\, \ln(1 + t_r^{-1}) \,+\, \big(a^{-\rho}h_1^{-1} + r^{-\rho}\big)\, \ln(1+a) \,+\, h_1^{-1} \int\limits_a^{t_r^{-1}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau.$$

Подставим найденное выражение в (11) и осуществим в полученном неравенстве предельный переход по последовательности $r_j \to +\infty$, на которой $\eta(r_j) \to \beta$. Учитывая, что $t_{r_j}^{-1} \to a\,(1-\beta h_1)^{-1/\rho}$ при $j \to \infty$, будем иметь

$$\varlimsup_{j\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{r_j}(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \,\geqslant\, a^{-\rho}(\beta - h_1^{-1})\, \ln\Big(1 + a(1-\beta h_1)^{-1/\rho}\Big) +$$

$$+\, a^{-\rho} h_1^{-1}\, \ln(1+a) \,+\, h_1^{-1} \int\limits_a^{a(1-\beta h_1)^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau.$$

Отсюда, воспользовавшись обозначением $s = 1 - \beta h$, а также свободой выбора чисел $a > 0$ и $h_1 \in (0,\, h)$, получим неравенство

$$\varlimsup_{j\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_{r_j}(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt \,\geqslant\, h^{-1} \sup_{a>0} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{\big(1 + as^{-1/\rho}\big)^s} \,+\, \int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right\}.$$

Из представления (6) и определения типа $\sigma_\rho(f)$ теперь легко следует нужная оценка (3).

3. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Случаи $h = 0$ и $h = 1/\beta$ обсуждены в параграфе 1. Здесь мы построим для любых $\rho \in (0,\, 1)$, $\beta > 0$, $h \in (0,\, 1/\beta)$, пример последовательности $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ с характеристиками $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $h_\rho(\Lambda) = h$, являющейся нулевым множеством целой функции:

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

с наименьшим возможным типом

$$\sigma_\rho(f) = \max_{a>0}\, \varphi(a). \tag{13}$$

Здесь через $\varphi(a) = \varphi_{\beta,\, h,\, \rho}(a)$ обозначена функция из правой части формулы (2), т. е.

$$\varphi(a) = h^{-1} \left\{ a^{-\rho} \ln \frac{1+a}{\big(1 + as^{-1/\rho}\big)^s} \,+\, \int\limits_a^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \right\}, \qquad a > 0. \tag{14}$$

Отметим, что для значений $h \in (0,\, 1/\beta)$ правомочна замена в (2) sup на max, поскольку теперь функция $\varphi(a)$ определена, положительна и непрерывна при $a > 0$, причем

$$\lim_{a\to+0} \varphi(a) = \lim_{a\to+\infty} \varphi(a) = 0. \tag{15}$$

Итак, пусть

$$\rho \in (0,\, 1), \qquad \beta > 0, \qquad h \in (0,\, 1/\beta).$$

Определяем функцию $\varphi(a)$ формулой (14), где $0 < s = 1 - \beta h < 1$. Построим последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ так, чтобы $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta,\ h_\rho(\Lambda) = h$, а ρ-тип соответствующего канонического произведения (12) вычислялся по формуле (13).

Зададим вначале вспомогательную последовательность $m_n = 2^{4^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что $m_{n+1} = m_n^4$, $n \in \mathbb{N}$, и для любого $p > 0$ выполнены соотношения

$$\sum_{k=1}^{n-1} m_k^p = o(m_n^p), \qquad \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{m_k^p} = o(m_{n+1}^{-p}), \qquad n \to \infty. \tag{16}$$

Экстремальная последовательность положительных чисел Λ строится так: точки λ_j помещаются только на отрезки вида $[s^{1/\rho} m_n,\, m_n]$, $n \in \mathbb{N}$, с условием, что для λ_j, находящихся на каждом из указанных отрезков, λ_j^ρ образуют арифметическую прогрессию с разностью h. Вводя последовательность $\Omega = (\lambda_n^\rho)_{n=1}^{\infty} = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$, можем для каждого $n \in \mathbb{N}$ с учетом равенства $h^{-1}(1-s) = \beta$ записать

$$\Omega \cap [s m_n^\rho,\, m_n^\rho] = \left\{ s m_n^\rho + jh : \ j \in \mathbb{N},\ j \leqslant \beta m_n^\rho \right\}.$$

По построению имеем:

$$h_\rho(\Lambda) = \varliminf_{n\to\infty} \left(\lambda_{n+1}^\rho - \lambda_n^\rho\right) = \varliminf_{n\to\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) = h.$$

Запишем выражения для считающей функции $n_\Omega(r)$ на различных промежутках изменения переменной r. Вначале заметим, что

$$n_\Omega(s m_n^\rho) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta m_k^\rho + O(n) = o(m_n^\rho), \qquad n \to \infty,$$

согласно (16). Далее, если $r \in [s m_n^\rho,\, m_n^\rho]$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(s m_n^\rho) + h^{-1}(r - s m_n^\rho) + O(1) = h^{-1}(r - s m_n^\rho) + o(m_n^\rho), \qquad n \to \infty.$$

Если же $r \in (m_n^\rho,\, s m_{n+1}^\rho)$, то

$$n_\Omega(r) = n_\Omega(m_n^\rho) = h^{-1}(1-s) m_n^\rho + o(m_n^\rho) = \beta m_n^\rho + o(m_n^\rho), \qquad n \to \infty.$$

Отсюда с учетом связи $n_\Lambda(t) = n_\Omega(t^\rho)$ получаем, что

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Omega(r)}{r} = \beta.$$

Составим по предъявленной последовательности Λ каноническое произведение (12) и покажем, что его тип вычисляется по формуле (13). Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi_r(t) = \frac{n_\Lambda(rt)}{(rt)^\rho} = \frac{n_\Omega\left((rt)^\rho\right)}{(rt)^\rho}$$

и воспользуемся формулой

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_r(t)\, \frac{t^{\rho-1}}{1+t}\, dt.$$

На основании предыдущих выкладок запишем представление

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} h^{-1}\left(1 - s\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho}\right) + o\left(\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho}\right), & t \in \left[\dfrac{s^{1/\rho}m_n}{r},\, \dfrac{m_n}{r}\right], \\ \beta\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho} + o\left(\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho}\right), & t \in \left(\dfrac{m_n}{r},\, \dfrac{s^{1/\rho}m_{n+1}}{r}\right), \end{cases}$$

справедливое при каждом $n \in \mathbb{N}$. Далее, зададим при $t \geqslant 0$ семейство функций $\Phi_r(t)$ так, что

$$\Phi_r(t) = 0, \qquad t \in [0,\, s^{1/\rho}m_1/r],$$

а сужения $\Phi_r(t)$ на отрезки $[s^{1/\rho}m_n/r,\, s^{1/\rho}m_{n+1}/r]$, $n \in \mathbb{N}$, имеют вид

$$\Phi_r(t) = \begin{cases} h^{-1}\left(1 - s\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho}\right), & t \in \left[\dfrac{s^{1/\rho}m_n}{r},\, \dfrac{m_n}{r}\right], \\ \beta\left(\dfrac{m_n}{rt}\right)^{\rho}, & t \in \left(\dfrac{m_n}{r},\, \dfrac{s^{1/\rho}m_{n+1}}{r}\right). \end{cases}$$

Тогда значение $\sigma_\rho(f)$ можно находить по формуле

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt, \tag{17}$$

поскольку остаточные члены в представлении $\varphi_r(t)$ не влияют на величину типа. Прямым подсчетом проверяется, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) + \frac{\beta}{r^\rho}\sum_{k=1}^{\infty} m_k^\rho \ln\left(1 + \frac{r}{s^{1/\rho}m_{k+1}}\right). \tag{18}$$

Поскольку справедлива оценка

$$\frac{\beta}{r^\rho}\sum_{k=1}^{\infty} m_k^\rho \ln\left(1 + \frac{r}{s^{1/\rho}m_{k+1}}\right) \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{s}\,r^{\rho/2}}\max_{a>0}\frac{\ln(1+a)}{a^{\rho/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{m_k}{\sqrt{m_{k+1}}}\right)^{\rho} = \frac{\beta\, C\,(\rho/2)}{\sqrt{s}\,r^{\rho/2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{m_k^\rho},$$

то из (18) получаем:

$$\lim_{r\to+\infty}\left\{\int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt - \sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{r}{m_k}\right)\right\} = 0. \tag{19}$$

С учетом оценки (3) обоснование равенства (13) сводится теперь к проверке неравенства

$$\sigma_\rho(f) \leqslant \varphi(a_0),$$

где через $a_0 = a_0(\beta,\, h,\, \rho)$ обозначена точка максимума на луче $a > 0$ функции (14). Последнее неравенство будет следовать из оценки

$$\varlimsup_{r\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) - \varphi(a_0)\right\} \leqslant 0, \tag{20}$$

так как в силу (17), (19) имеем:

$$\sigma_\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} \Phi_r(t)\,\frac{t^{\rho-1}}{1+t}\,dt = \varlimsup_{r\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) =$$

$$= \varphi(a_0) + \varlimsup_{r\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) - \varphi(a_0)\right\}.$$

Осталось доказать неравенство (20). Оценим сумму в (20) для $r \in [m_n, m_{n+1}]$ при фиксированном $n \in \mathbb{N}$, разбивая ее на три части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) - \varphi(a_0) = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) + \sum_{k=n+2}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) +$$

$$+ \left(\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0)\right).$$

Заметим, что интеграл в определении (14) допускает оценку

$$\int\limits_{a}^{as^{-1/\rho}} \frac{\tau^{-\rho}}{1+\tau}\, d\tau \leqslant a^{-\rho} \ln \frac{1+as^{-1/\rho}}{1+a}, \qquad a > 0.$$

Но тогда, применяя соотношения (16) и неравенство

$$\varphi(a) \leqslant \beta\, \frac{\ln(1+as^{-1/\rho})}{a^{\rho}}, \qquad a > 0,$$

видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{r\in[m_n,\, m_{n+1}]} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{r\in[m_n,\, m_{n+1}]} \sum_{k=n+2}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) = 0. \tag{21}$$

Действительно, первое равенство в (21) следует из оценки

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{r}{m_k}\right) \leqslant \beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln\left(1+s^{-1/\rho}(r/m_k)\right)}{(r/m_k)^{\rho}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta\, C(\rho/2)}{\sqrt{s}\, r^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{n-1} m_k^{\rho/2} \leqslant \frac{\beta\, C(\rho/2)}{\sqrt{s}\, m_n^{\rho/2}} \sum_{k=1}^{n-1} m_k^{\rho/2}, \qquad r \geqslant m_n.$$

Второе получается аналогично.

Оценим, наконец, выражение

$$\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0), \qquad r \in [m_n,\, m_{n+1}],$$

опирась на определение точки a_0 и свойство (15) функции $\varphi(a)$. Рассмотрим два возможных случая: $r \in \left[m_n,\, \sqrt{m_n m_{n+1}}\right]$ и $r \in \left[\sqrt{m_n m_{n+1}},\, m_{n+1}\right]$. В первом случае имеем:

$$\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) - \varphi(a_0) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right), \qquad \frac{r}{m_{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{m_n}{m_{n+1}}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Во втором случае получим:

$$\varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0) + \varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{r}{m_n}\right), \qquad \frac{r}{m_n} \geqslant \sqrt{\frac{m_{n+1}}{m_n}} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{r\in[m_n,\, m_{n+1}]} \left(\varphi\left(\frac{r}{m_n}\right) + \varphi\left(\frac{r}{m_{n+1}}\right) - \varphi(a_0)\right) \leqslant 0. \tag{22}$$

Сочетание соотношений (21), (22) приводит к нужной оценке (20). Построение экстремального примера завершено. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Попов А. Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ-плотности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2005. № 1. С. 31–36.
2. *Попов А. Ю.* О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ-плотности, лежащими на одном луче // Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 2. С. 246–260.
3. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75, № 1. С. 3–28.
4. *Шерстюкова О. В.* О влиянии шага последовательности нулей целой функции порядка меньше единицы на величину ее типа // Наука в вузах : математика, информатика, физика, образование. М. : МПГУ, 2010. С. 192–195.
5. *Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В.* Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями фиксированных ρ-плотностей // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 199–215.
6. *Шерстюкова О. В.* Об экстремальном типе целой функции порядка меньше единицы с нулями фиксированных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн. 2012. Т. 4, № 1. С. 161–165.
7. *Брайчев Г. Г.* Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 7. С. 31–56.
8. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* О росте целых функций с дискретно измеримыми нулями // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 674–690.
9. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance reguliere // Annales de la faculte des sciences de Toulouse. Ser. 3. 1913. T. 5. P. 117–257.

On the Least Type of Entire Functions of Order $\rho \in (0, 1)$ with Positive Zeros

O. V. Sherstyukova

Sherstyukova Olga Vladimirovna, Moscow Pedagogical State University, 1, M. Pirogovskaya st., 199296, Moscow, Russia, sherov73@mail.ru

The paper is devoted to the theory of extremal problems in classes of entire functions with constraints on the growth and distribution of zeros and is associated with problems of completeness of exponential systems in the complex domain. The question of finding the exact lower bound for types of all entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ whose zeros lie on the ray and have prescribed upper ρ-density and ρ-step is discussed. It is shown that the infimum is attained in this problem, and a detailed construction of the extremal function is given. This result gives a complete solution of the extremal problem and generalizes preceding result of A. Yu. Popov.

Key words: type of an entire function, upper density and step of sequence of zeros, extremal problem.

References

1. Popov A. Yu. The least possible type under the order $\rho < 1$ of canonical products with positive zeros of a given upper ρ-density. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2005, vol. 60, iss. 1, pp. 32–36.
2. Popov A. Yu. On the least type of an entire function of order c with roots of a given upper ρ-density lying on one ray. *Math. Notes*, 2009, vol. 85, iss. 1–2, pp. 226–239. DOI: 10.4213/mzm4645.
3. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. On the least possible type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with positive zeros. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, iss. 1, pp. 1–27. DOI: 10.4213/im4104.
4. Sherstyukova O. V. O vlijanii shaga posledovatel'nosti nulej tseloj funktsii porjadka men'she edinitsy na velichinu ejo tipa [On the influence of the step sequence of zeros of entire functions of order less than one on the value of its type]. *Nauka v vuzakh : matematika, informatika, phizika, obrazovanie* [Science in high schools : mathematics, computer science, physics, education]. Moscow, Moscow Pedagogical State University, 2010, pp. 192–195 (in Russian).
5. Braichev G. G., Sherstyukova O. V. The greatest possible lower type of entire functions of order $\rho \in (0, 1)$ with zeros of fixed ρ-densities. *Math. Notes*, 2011, vol. 90, iss. 1–2, pp. 189–203. DOI: 10.4213/mzm8766.
6. Sherstyukova O. V. On extremal type of an entire function of order less than unity with zeros of prescribed densities and step. *Ufa Mathema-*

tical Journal, 2012, vol. 4, iss. 1, pp. 151–155.

7. Braichev G. G. The least type of an entire function of order $\rho \in (0, 1)$ having positive zeros with prescribed averaged densities. *Sbornik: Mathematics*, 2012, vol. 203, iss. 7, pp. 950–975. DOI: 10.4213/sm7879.
8. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. On the growth of entire functions with discretely measurable zeros. *Math. Notes*, 2012, vol. 91, iss. 5-6, pp. 630–644. DOI: 10.4213/mzm9357.
9. Valiron G., Sur les fonctions entieres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance reguliere. *Annales de la faculte des sciences de Toulouse Ser. 3*, 1913, vol. 5 , pp. 117—257. DOI: 10.5802/afst.287.