4. Shmoylov V. I., Tuchapskii R. I. *Algebraicheskie uravneniia. Beskonechnye sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii. Bibliograficheskii ukazatel'* [Algebraic equations. An infinite system of linear algebraic equations. Bibliographic index]. L'vov, Merkator, 2003, 83 p.
5. Mellin H. J. Resolution de l' equation algebrique generale a l'aide de function gamma. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I : Math.*, 1921, vol. 172, pp. 658–661.
6. Mikhalkin E. N. On solving general algebraic equations by integrals of elementary functions. *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 2, pp. 301–306. DOI: 10.1007/s11202-006-0043-4.
7. Shmoylov V. I. *Nepreryvnye drobi. T. 2. Raskhodiashchiesia nepreryvnye drobi* [Continuous fractions. Vol. 2. Divergent continuous fractions]. National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of applied problems of mechanics and mathematics, L'vov, Merkator, 2004. 558 p. (in Russian).
8. Shmoilov V. I., Kovalenko V. B. Some applications of the summation algorithm of divergent continued fractions. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra* (Vestnik SSC RAS), 2012, vol. 8, no. 4 (149), pp. 3–13 (in Russian).
9. Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Determination of the values of divergent continuous fractions and series. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2012, no. 4(129), pp. 210–222 (in Russian).
10. Shmoylov V. I., Savchenko D. I. Some applications of the summation algorithm of continued fractions. *Proc. Voronezh. State Univ., Ser. Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 258–276 (in Russian).
11. Shmoilov V. I. *Raskhodiashchiesia sistemy lineinykh algebraicheskikh uravnenii* [Diverging systems of linear algebraic equations]. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2010, 205 p. (in Russian).
12. Guzik V. F. , Shmoylov V. I., Kirichenko G. A. Continuous fractions and their application in computational mathematics. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2014, no. 1 (150), pp. 158–174 (in Russian).
13. Aitken A. C. *On Bernulli's numerical solution of algebraic equations*. Edinburg : Proc. Roy. Soc., 1925, 1926, pp. 289–305.
14. Shmoilov V. I. *Continued fractions and the r/φ-algorithm*. Taganrog, Tekhnologicheskii Institut, Yuzhnyi Federal'nyi Universitet, 2012, 606 p. (in Russian).
15. Skorobogat'ko V. Ia. *Teoriia vetviashchikhsia tsepnykh drobei i ee primenenie v vychislitel'noi matematike* [The theory of branched continued fractions and its application in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1983, 312 p. (in Russian).
16. Rutishauser G. *Algoritm chastnykh i raznostei* [The algorithm private and differences]. Moscow, 1960, 93 p. (in Russian).

УДК 517.984

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. А. Юрко

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, YurkoVA@info.sgu.ru

Исследуется обратная спектральная задача для дискретных операторов треугольной структуры в топологических пространствах. Указана конструктивная процедура решения обратной задачи. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Ключевые слова: дискретные операторы, спектральная теория, обратная задача.

1. Исследуется обратная задача спектрального анализа для несамосопряженных дискретных операторов треугольной структуры в абстрактных топологических пространствах. Рассматриваемые структуры являются объектами весьма общего вида. Широкие классы обратных задач для дискретных, дифференциальных, интегро-дифференциальных операторов и пучков операторов сводятся к обратным задачам для рассматриваемых треугольных структур. В статье дается определение треугольных структур, рассматривается их канонический вид. Получено решение обратной задачи для треугольных структур. Дается приложение полученных результатов для наиболее важных классов дискретных операторов высших порядков. Отметим, что дискретные операторы второго порядка изучены достаточно подробно (см. [1–3] и библиографию в них). Дискретные операторы высших порядков исследовались в [4] и других работах.

2. Обозначим: ЛП — линейное пространство, ЛТП — полное сепарабельное линейное топологическое пространство, имеющее счетную базу. Если Γ_1 и Γ_2 — ЛП, то $\Gamma_1 \to \Gamma_2$ обозначает ЛП линейных операторов, отображающих Γ_1 в Γ_2. Для $A \in \Gamma_1 \to \Gamma_2$ пусть $\Delta^1(A)$ обозначает область определения, а $\Delta^2(A) = A(\Delta^1(A))$. Оператор $A \in \Gamma_1 \to \Gamma_2$ называется неособым ($A\#0$), если $\ker A = \{0\}$, т. е. уравнение $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение. Если Γ_1 и Γ_2 — ЛТП, то $[\Gamma_1 \to \Gamma_2]$ обозначает множество непрерывных операторов (возможно, нелинейных), отображающих Γ_1 в Γ_2, а $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ обозначает ЛТП векторов $x = [x_1, x_2]$, $x_j \in \Gamma_j$ с покординатной сходимостью. Если Γ — ЛТП, то Γ^∞ обозначает ЛТП последовательностей $x = [x_j]_{j\geqslant 0}$, $x_j \in \Gamma$, с покординатной сходимостью.

Пусть Γ — ЛП, $\hat{\Gamma} = \Gamma \to \Gamma$, и пусть Λ — множество многочленов вида

$$F(\lambda) = \sum_{k=-j_1}^{j_2} F_k \lambda^k, \qquad F_k \in \hat{\Gamma}$$

(с любыми натуральными j_1 и j_2). Положим $\mathscr{F}(\Gamma) = \Lambda \to \Gamma$. Элементы ЛП $\mathscr{F}(\Gamma)$, называются обобщенными функциями (ОФ). Если $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$, то $P_{k+1} = (E\lambda^k, P) \in \Gamma$ называются моментами P (здесь и далее E — единичный оператор, а $(\cdot, P)$ обозначает действие P). Ясно, что ОФ $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$ однозначно определяется своими моментами по формуле $(F(\lambda), P) = \sum_k F_k P_{k+1}$, $F(\lambda) \in \Lambda$. Удобно записывать ОФ $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$ в виде формального ряда

$$P(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{P_k}{\lambda^k}, \qquad P_k \in \Gamma. \tag{1}$$

Можно умножать $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$ на элементы Λ по формуле $(F(\lambda), G(\lambda)\, P) = (F(\lambda)\, G(\lambda),\, P)$, $F(\lambda)$, $G(\lambda) \in \Lambda$. Это означает, что ряд (1) формально умножается на $G(\lambda)$. Пусть $\mathscr{F}^+(\Gamma)$ — ЛП обобщенных функций $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$ таких, что $P_k = 0$ при $k < 0$. Если Γ — ЛТП, то $\mathscr{F}[\Gamma]$ обозначает ЛТП обобщенных функций (1) со сходимостью: $P^j \xrightarrow{\mathscr{F}[\Gamma]} P$, если $P_k^j \xrightarrow{\Gamma} P_k$ при всех k. Пусть $\mathscr{F}^+[\Gamma]$ — ЛТП функций $P \in \mathscr{F}(\Gamma)$ таких, что $P_k = 0$ при $k < 0$.

Пусть теперь Γ, Γ_0, Γ_1, Γ_2 — ЛТП. Для $r \in \Gamma_0$ рассмотрим следующие семейства ОФ: $A = A(r) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1 \to \Gamma_2)$, $S = S(r) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1 \to \Gamma)$, $f = f(r) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_2)$ с моментами A_k, S_k, f_k соответственно. Предположим, что оператор $A_0(r)$ обратим при каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$, а операторы A_0^{-1}, A_k $(k \geqslant 1)$, S_k, f_k $(k \geqslant 0)$ непрерывны по всем аргументам в совокупности, т.е. $A_0^{-1} \in [\Gamma_0 \times \Gamma_2 \to \Gamma_1]$, $A_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \to \Gamma_2]$ $(k \geqslant 1)$, $S_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \to \Gamma]$, $f_k \in [\Gamma_0 \to \Gamma_2]$, $(k \geqslant 0)$. Не нарушая общности считаем, что $\Delta^2(A_0) = \Gamma_2$, $\Delta^1(A_k) = \Gamma_1$ $(k \geqslant 1)$, $\Delta^1(S_k) = \Gamma_1$ $(k \geqslant 0)$ при каждом $r \in \Gamma_0$. Тройка $(A,\, S,\, f)$ называется обобщенным спектральным пучком (ОСП).

При $r \in \Gamma_0$ определим семейство операторов $\hat{A} = \hat{A}(r) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1) \to \mathscr{F}^+(\Gamma_2)$, $\hat{S} = \hat{S}(r) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1) \to \mathscr{F}^+(\Gamma)$:

$$\hat{A}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{\nu=0}^{k} A_\nu y_{k-\nu}, \qquad \hat{S}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{\nu=0}^{k} S_\nu y_{k-\nu}, \qquad y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} y_k \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1).$$

При каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$ оператор $\hat{A} = \hat{A}(r)$ обратим, и $\Delta^2(\hat{A}(r)) \in \mathscr{F}^+(\Gamma_2)$, $\hat{A}^{-1} \in [\Gamma_0 \times \mathscr{F}^+[\Gamma_2] \to \mathscr{F}^+[\Gamma_1]]$, $\hat{S} \in [\Gamma_0 \times \mathscr{F}^+[\Gamma_1] \to \mathscr{F}^+[\Gamma]]$, $f \in [\Gamma_0 \to \mathscr{F}^+[\Gamma_2]]$.

Определение 1. Решение

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \varphi_k \in \mathscr{F}^+[\Gamma_1]$$

уравнения $\hat{A}\varphi = f$ называется *решением Вейля для ОСП* (A, S, f). Обобщенная функция

$$\Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Pi_k \in \mathscr{F}^+[\Gamma],$$

определяемая соотношением $\Pi = \hat{S}\varphi$, называется *функцией Вейля для ОСП* (A, S, f).

Обратная задача 1: *дана функция Вейля* $\Pi \in \mathscr{F}^+[\Gamma]$, *построить* $r \in \Gamma_0$.

В этой обратной задаче оператор A характеризует математическую модель объекта, $r \in \Gamma_0$ описывает параметры объекта, f — внешнее воздействие, φ — реакция объекта на внешнее воздействие, Π — результат измерения.

Решение обратной задачи 1 эквивалентно решению уравнения $\Pi = \psi(r)$, где $\psi = \hat{S}\hat{A}^{-1} f \in [\Gamma_0 \to \mathscr{F}^+[\Gamma]]$. Оператор ψ называется *ОСП оператором*, а операторы $\psi_k = \psi_k(r) \in [\Gamma_0 \to \Gamma]$, определяемые формулой $\psi_k = \sum\limits_{\nu=0}^{k} S_\nu \varphi_{k-\nu}$, называются *моментами* ψ.

Пример 1 (линейный пучок). Пусть $\Gamma_1 = \Gamma_2$ и при $r \in \Gamma_0$ даны семейства $B = B(r) \in \Gamma_1 \to \Gamma_1$, $\sigma = \sigma(r) \in \Gamma_1 \to \Gamma$, $g = g(r) \in \Gamma_1$. Рассмотрим уравнение $(E - \lambda^{-1}B)y = g$. Обозначим

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}\varphi_k \in \mathscr{F}^+[\Gamma_1], \qquad \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}\Pi_k \in \mathscr{F}^+[\Gamma],$$

где $\varphi_k = B^k g$, $\Pi_k = \sigma B^k g$. В частности, если Γ, Γ_1 — банаховы пространства и B, σ — ограниченные операторы, то $\varphi = \left(E - \frac{1}{\lambda}B\right)^{-1} g$, $\Pi = \sigma\varphi$ регулярны при $|\lambda| > \|B\|$. Обратная задача построения r по заданному Π является частным случаем обратной задачи для GSP (A, S, f) с $A_0 = E$, $A_1 = -B$, $A_k = 0 \;\; (k \geqslant 2)$, $f_0 = g$, $S_0 = \sigma$, $S_k = f_k = 0 \;\; (k \geqslant 1)$. Тройка (B, σ, g) называется линейным ОСП (ЛОСП).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$b_\nu y_{\nu+1} + a_\nu y_\nu + b_{\nu-1} y_{\nu-1} = \lambda y_\nu, \qquad \nu \geqslant 1, \tag{2}$$

где a_ν — вещественные числа, а $b_\nu > 0$. Известно, что при $Im\lambda \neq 0$ существует решение Φ уравнения (2) такое, что $\Phi_\nu(\lambda) \in l_2$, $\Phi_0(\lambda) = 1$. Положим $M(\lambda) = \Phi_1(\lambda)$. Имеют место асимптотические формулы

$$\Phi_\nu(\lambda) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k}\Phi_{k\nu}, \qquad M(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} M_k, \qquad \lambda \to \infty,$$

причем M_k — моменты спектральной функции. Коэффициенты $\{a_\nu, b_\nu\}$ однозначно определяются по $\{M_k\}_{k\geqslant 1}$. Рассмотрим ЛОСП (B, σ, g), где $\Gamma_1 = \Gamma_2 = E_1^\infty$, $\Gamma = E_1$, $\Gamma_0 = E_2^\infty$, $y = [y_k]_{k\geqslant 0}$, $g = [\delta_{k0}]_{k\geqslant 0}$, $\sigma y = y_1$,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее δ_{kj} — символ Кронекера, а E_p — евклидово пространство размерности p. Тогда $\varphi_k = [\Phi_{k\nu}]_{\nu\geqslant 0} \in \Gamma_1$, $\Pi_k = M_k \in \Gamma$ — моменты решения Вейля и функции Вейля соответственно. Таким образом, в этом случае обратная задача для ЛОСП соответствует задаче построения $\{a_\nu,\, b_\nu\}$ по заданным моментам $\{M_k\}_{k\geqslant 1}$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальный оператор S вида

$$\mathscr{L}_0 y \equiv -y'' + q(x)y, \qquad q(x) \in C[0,\pi],$$
$$U(y) \equiv y'(0) - hy(0) = 0; \qquad V(y) \equiv y'(\pi) + Hy(\pi) = 0.$$

Пусть $\Phi(x,\mu)$ — решение уравнения $\mathscr{L}_0\Phi = \mu\Phi$, $x \in (0,\pi)$ при условиях $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$, и пусть $M(\mu) = \Phi(0,\mu)$. Тогда $M(\mu)$ является функцией Вейля для S. Если нуль не является собственным значением, то $\Phi(x,\mu)$ удовлетворяет уравнению $y - \mu G y = G(x,0)$, где $G(x,t)$ — ядро интегрального оператора $G = S^{-1}$. Другими словами, $\Pi = M(\mu)$ и $\varphi = \Phi(x,\mu)$ являются функцией Вейля и решением Вейля для ЛОСП (B,σ,g) соответственно, где $\lambda = 1/\mu$, $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \Gamma_2 = C[0,\pi]$, $\Gamma = E_1$, $B = G$, $g = G(x,0)$, $\sigma y(x) = y(0)$, $r = q(x)$. Обратная задача для ОСП соответствует задаче восстановления оператора Штурма – Лиувилля по функции Вейля $M(\mu)$.

3. R-структуры. Пусть γ_0, γ_1, γ_2, Γ– ЛТП, и пусть $\Gamma_\nu = \gamma_\nu^\infty$ $(\nu = 0,1,2)$, $r = [r_k]_{k\geqslant 0}$, $r_k \in \gamma_0$. Положим $x_p = [r_k]_{k=\overline{0,p}}$, $x'_p = [r_k]_{k>p}$. При $r \in \Gamma_0$ рассмотрим семейства $\alpha_{\nu j}^k = \alpha_{\nu j}^k\,(x_{\nu+k}) \in \gamma_1 \to \gamma_2$, $S_{kj} = S_{kj}(x_k) \in \gamma_1 \to \Gamma$, $f_{k\nu} = f_{k\nu}(x_{k+\nu}) \in \gamma_2$, $k, \nu, j \geqslant 0$, где $\alpha_{\nu j}^k = 0$ $(j > \nu + k)$, $S_{kj} = 0$ $(j > k)$, и при каждом $r \in \Gamma_0$ операторы α_{jj}^0 обратимы. Предположим, что $(\alpha_{jj}^0)^{-1} \in [\gamma_0^{j+1} \times \gamma_2 \to \gamma_1]$, $\alpha_{\nu j}^k \in [\gamma_0^{\nu+k+1} \times \gamma_1 \to \gamma_2]$ $(k + |\nu - j| > 0)$, $f_{k\nu} \in [\gamma_0^{\nu+k+1} \to \gamma_2]$, $S_{kj} \in [\gamma_0^{k+1} \times \gamma_1 \to \Gamma]$. Без ограничения общности считаем, что $f_{00} \neq 0$, $\Delta^2(\alpha_{jj}^0) = \gamma_2$, $\Delta^1(\alpha_{\nu j}^k) = \gamma_1$, $(k + |\nu - j| > 0)$, $\Delta^1(S_{kj}) = \gamma_1$ при каждом $r \in \Gamma_0$.

При $r \in \Gamma_0$ рассмотрим $f_k = [f_{k\nu}]_{\nu \geqslant 0} \in \Gamma_2$, $A_k \in \Gamma_1 \to \Gamma_2$, $S_k \in \Gamma_1 \to \Gamma$, где

$$A_k y = \left[\sum_{j=0}^{k+\nu} \alpha_{\nu j}^k y_j \right]_{\nu \geqslant 0}, \qquad S_k y = \sum_{j=0}^{k} S_{kj} y_j, \qquad y = [y_j]_{j \geqslant 0} \in \Gamma_1. \tag{3}$$

При каждом фиксированном $r \in \Gamma_0$ оператор A_0 обратим и $\Delta^2(A_0) = \Gamma_2$, $A_0^{-1} \in [\Gamma_0 \times \Gamma_2 \to \Gamma_1]$, $A_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \to \Gamma_2]$ $(k \geqslant 1)$, $S_k \in [\Gamma_0 \times \Gamma_1 \to \Gamma]$, $f_k \in [\Gamma_0 \to \Gamma_2]$ $(k \geqslant 0)$.

R-структурой называется ОСП (A, S, f), где

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda^k} \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1 \to \Gamma_2), \qquad S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{\lambda^k} \in \mathscr{F}^+(\Gamma_1 \to \Gamma), \qquad f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda^k} \in \mathscr{F}^+(\Gamma_2),$$

и A_k, S_k определяются формулами (3). Пусть

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\lambda^k} \in \mathscr{F}^+[\Gamma_1], \qquad \varphi_k = [\varphi_{k\nu}]_{\nu \geqslant 0} \in \Gamma_1, \qquad \Pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Pi_k}{\lambda^k} \in \mathscr{F}^+[\Gamma]$$

— решение Вейля и функция Вейля для R-структуры (A, S, f) соответственно. Тогда их моменты удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{s+\nu} \alpha_{\nu j}^s \varphi_{k-s,j} = f_{k\nu}, \qquad \sum_{s=0}^{k} \sum_{j=0}^{s} S_{sj} \varphi_{k-s,j} = \Pi_k, \qquad k, \nu \geqslant 0. \tag{4}$$

При $r \in \gamma_0$ рассмотрим семейства $\tilde{\varphi}^l = [\varphi_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}} \in \gamma_1^{l+1}$, $\tilde{f}^l = [f_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}} \in \gamma_2^{l+1}$, $\tilde{S}^{l\mu} \in \gamma_1^{\mu+1} \to \Gamma$, $\tilde{A}^{l\mu} \in \gamma_1^{\mu+1} \to \gamma_2^{l+1}$, $\mu = \overline{0,l}$, где

$$\tilde{S}^{l\mu} \tilde{y}^\mu = \sum_{j=0}^{\mu} S_{l-\mu+j,j} y_j, \qquad \tilde{A}^{l\mu} \tilde{y}^\mu = \left[\sum_{j=0}^{\mu} \alpha_{\nu j}^{l-\mu+j-\nu} y_j \right]_{\nu=\overline{0,l}},$$

$\tilde{y}^\mu = [y_j]_{j=\overline{0,\mu}} \in \gamma_1^{\mu+1}$, $\alpha_{\nu j}^k = 0$ при $k \leqslant 0$. При каждом $r \in \Gamma_0$ операторы $\tilde{A}^{ll}$ обратимы и $\Delta^2(\tilde{A}^{ll}) = \gamma_1^{l+1}$. Операторы $\tilde{f}^l$, $\tilde{S}^{l\mu}$, $\tilde{A}^{l\mu}$ не зависят от x_l', и

$$\tilde{f}^l = \tilde{f}^l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \to \gamma_2^{l+1}], \qquad \tilde{S}^{l\mu} = \tilde{S}^{l\mu}(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_1^{\mu+1} \to \Gamma],$$
$$(\tilde{A}^{ll})^{-1} = (\tilde{A}^{ll}(x_l))^{-1} \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_2^{l+1} \to \gamma_1^{l+1}], \qquad \tilde{A}^{l\mu} = \tilde{A}^{l\mu}(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \times \gamma_1^{\mu+1} \to \gamma_2^{l+1}] \qquad (\mu < l).$$

Преобразуем (4) к виду

$$\sum_{\mu=0}^{l} \tilde{A}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu = \tilde{f}^l, \qquad \sum_{\mu=0}^{l} \tilde{S}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu = \Pi_l, \qquad l \geqslant 0. \tag{5}$$

Так как $\tilde{A}^{ll}$ обратимы, то

$$\tilde{\varphi}^l = (\tilde{A}^{ll})^{-1} \left(\tilde{f}^l - \sum_{\mu=0}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu \right), \qquad l \geqslant 0. \tag{6}$$

Определим операторы ψ_l:

$$\psi_l = \sum_{\mu=0}^{l} \tilde{S}^{l\mu} \tilde{\varphi}^\mu, \qquad l \geqslant 0. \tag{7}$$

Используя (6) и (7), заключаем, что $\tilde{\varphi}^l$ и ψ_l не зависят от x_l', и $\tilde{\varphi}^l = \tilde{\varphi}^l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \to \gamma_1^{l+1}]$, $\psi_l = \psi_l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \to \Gamma]$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\psi = \psi(r)$ — ОСП оператор для R-структуры (A, S, f) с моментами $\psi_l(r), l \geqslant 0$. Тогда*

1. Операторы $\psi_l = \psi_l(x_l)$ не зависят от x_l', они строятся по формулам (6), (7) *и $\psi_l(x_l) \in \in [\gamma_0^{l+1} \to \Gamma]$. Уравнение обратной задачи $\Pi = \psi(r)$ имеет вид*

$$\Pi_l = \psi_l(r_0, r_1, \dots, r_l), \qquad l \geqslant 0. \tag{8}$$

2. Для того чтобы ОФ $\Pi \in \mathscr{F}^+[\Gamma]$ была функцией Вейля для R-структуры (A, S, f), необходимо и достаточно, чтобы $\Pi \in \Delta^2(\psi)$.

3. Если оператор $\psi(r)$ обратим, то решение обратной задачи единственно. В частности, если при любых $r_0, r_1, \dots, r_{l-1}$, $l \geqslant 0$ операторы $\psi(x_{l-1}, r_l)$ обратимы относительно r_l, то решение обратной задачи единственно.

Отметим, что ОСП оператор для R-структуры имеет треугольный вид: $\psi_l = \psi_l(r_0, r_1, \dots, r_l)$, т. е. моменты ψ_l не зависят от x_l' (назовем это свойство V-свойством). Построение $r = [r_k]_{k\geqslant 0}$ реализуется решением (8) относительно r_l последовательно для $l = 0, 1, 2, \dots$. Отметим также, что R-структура является каноническим видом дискретных ОСП с V-свойством.

Рассмотрим теперь важный частный случай R-структур: линейные в главном R_1-структуры. При $r = [r_k]_{k\geqslant 0} \in \Gamma_0$ рассмотрим семейства $\beta_\nu^k = \beta_\nu^k(x_{\nu+k}) \in \gamma_1 \to \gamma_2$, $z_{k\nu} = z_{k\nu}(x_{\nu+k}) \in \gamma_2\,(k+\nu > 0)$, $c_k = c_k(x_k) \in \gamma_1 \to \Gamma\,(k \geqslant 0)$, и предположим, что при фиксированном $x_{\nu+k-1} \in \gamma_0^{\nu+k}$ операторы $\beta_\nu^k \in \gamma_0 \to (\gamma_1 \to \gamma_2)$, $z_{k\nu} \in \gamma_0 \to \gamma_2$ являются линейными по $r_{\nu+k}$ и при фиксированном $x_{k-1} \in \gamma_0^k$ операторы $c_k \in \gamma_0 \to (\gamma_1 \to \Gamma)$ являются линейными по r_k. Предположим также, что $\beta_\nu^k \in [\gamma_0^{k+\nu+1} \times \gamma_1 \to \gamma_2]$, $c_k \in [\gamma_0^{k+1} \times \gamma_1 \to \Gamma]$, $z_{k\nu} \in [\gamma_0^{k+\nu+1} \to \gamma_2]$. Пусть $\alpha_{\nu 0}^k = \beta_\nu^k + \alpha_{\nu 0}^{*,k}$, $f_{k\nu} = z_{k\nu} + f_{k\nu}^*$ $(k+\nu > 0)$, $S_{k0} = c_k + S_{k0}^*$ $(k \geqslant 0)$, и пусть $\alpha_{\nu 0}^{*,k}$, $f_{k\nu}^*$, $\alpha_{\nu j}^k$ $(j \geqslant 1)$ не зависят от $r_{\nu+k}$, а S_{k0}^*, $S_{kj} (j \geqslant 1)$ не зависят от r_k. R-структура с этими свойствами называется R_1-структурой.

При фиксированном $x_{l-1} \in \gamma_0^l$ определим операторы

$$c_l^* r_l = c_l(\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00}, \qquad \tilde{\Theta}^l r_l = [\beta_\nu^{l-\nu}(\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00} - z_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}}.$$

Операторы c_l^*, $\tilde{\Theta}^l$ являются линейными по r_l. Для R_1-структуры преобразуем (5) к виду

$$c_1^* r_l + \tilde{S}^{ll}\tilde{\varphi}^l = \Pi_l - \tilde{S}_*^{l0}\tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{S}^{l\mu}\tilde{\varphi}^\mu, \qquad l \geqslant 1,$$

$$\tilde{\Theta}^l r_l + \tilde{A}^{ll}\tilde{\varphi}^l = \tilde{f}_*^l - \tilde{A}_*^{l0}\tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu}\tilde{\varphi}^\mu, \qquad l \geqslant 1,$$

где $\tilde{A}_*^{l0}$, $\tilde{S}_*^{l0}$, $\tilde{f}_*^l$ строятся по $\alpha_{\nu 0}^{*,k}$, S_{k0}^*, $f_{k\nu}^*$, так же как $\tilde{A}^{l0}$, $\tilde{S}^{l0}$, $\tilde{f}^l$ строятся по $\alpha_{\nu 0}^k$, S_{k0}, $f_{k\nu}$. Используя (6), (7), получим для R_1-структур

$$\psi_l = d_l r_l + \psi_l^*, \qquad l \geqslant 1, \tag{9}$$

$$d_l = c_l^* - \tilde{S}^{ll}(\tilde{A}^{ll})^{-1}\tilde{\Theta}^l, \tag{10}$$

$$\psi_l^* = \tilde{S}^{ll}\tilde{h}^l + \tilde{S}_*^{l0}\tilde{\varphi}^0 + \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{S}^{l\mu}(\tilde{h}^\mu - (\tilde{A}^{\mu\mu})^{-1}\tilde{\Theta}^\mu r_\mu), \tag{11}$$

$$\tilde{h}^l = (\tilde{A}^{ll})^{-1}\{\tilde{f}_*^l - \tilde{A}_*^{l0}\tilde{\varphi}^0 - \sum_{\mu=1}^{l-1} \tilde{A}^{l\mu}(\tilde{h}^\mu - (\tilde{A}^{\mu\mu})^{-1}\tilde{\Theta}^\mu r_\mu)\}. \tag{12}$$

Обозначим

$$D_l = \begin{bmatrix} c_i^* & \tilde{S}^{ll} \\ \tilde{\Theta}^l & \tilde{A}^{ll} \end{bmatrix}.$$

При каждом $x_{l-1} \in \gamma_0^l$ операторы $d_l = d_l(x_{l-1}) \in \gamma_0 \to \Gamma$ и $D_l = D_l(x_{l-1}) \in \gamma_0 \times \gamma_1^{l+1} \to \Gamma \times \gamma_1^{l+1}$ являются линейными по r_l и $[r_l, \tilde{\varphi}^l]$ соответственно. Кроме того, $d_l(x_{l-1}) r_l \in [\gamma_0^{l+1} \to \Gamma]$, $\psi_l^* = \psi_l^*(x_{l-1}) \in [\gamma_0^l \to \Gamma]$. Следующие системы эквивалентны

$$\left.\begin{aligned} &c_l^* y_1 + \tilde{S}^{ll} y_2 = w_1, \qquad y_1 \in \gamma_0, \qquad y_2 \in \gamma_1^{l+1}, \\ &\tilde{\Theta}^l y_1 + \tilde{A}^{ll} y_2 = w_2, \qquad w_1 \in \Gamma_1, \qquad w_2 \in \gamma_2^{l+1}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &y_2 + (\tilde{A}^{ll})^{-1}\tilde{\Theta}^l y_1 = (\tilde{A}^{ll})^{-1} w_2, \\ &d_l y_1 = w_1 - \tilde{S}^{ll}(\tilde{A}^{ll})^{-1} w_2, \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно, при фиксированных $l \geqslant 1, x_{l-1} \in \gamma_0^l$, линейный оператор $d_l \in \gamma_0 \to \Gamma$ является обратимым (неособым) тогда и только тогда, когда линейный оператор $D_l \in \gamma_0 \times \gamma_1^{l+1} \to \Gamma \times \gamma_1^{l+1}$ является обратимым (неособым). Для простоты считаем, что r_0 известно (это почти всегда так в приложениях), т.е. (8) рассматриваем при $l \geqslant 1$. Следующая теорема дает решение обратной задачи для R_1-структур. Пусть $\psi = \psi(r)$ — ОСП оператор для R_1-структуры (A, S, f) с моментами ψ_l.

Теорема 2. *1. Операторы $\psi_l, l \geqslant 1$ строятся по* (9)–(12), *они не зависят от x_l', и $\psi_l(x_l) \in [\gamma_0^{l+1} \to \Gamma]$.*

2. Пусть $D_l \# 0$, $l \geqslant 1$ при каждом $x_{l-1} \in \gamma_0^l$. Тогда для любого $\Pi \in \Delta^2(\psi)$ обратная задача имеет единственное решение, которое может быть найдено по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. *Для $l = 1, 2, \ldots$:*

а) строим $\tilde{h}^l, \psi_l^*, d_l$ по (10)–(12);

б) находим r_l из соотношения $d_l r_l + \psi_l^* = \Pi_l$. В частности, если D_l обратимы, то $r_l = d_l^{-1}\Pi_l - d_l^{-1}\psi_l^*$.

3. Кроме того, если операторы d_l^{-1} непрерывны по всем аргументам в совокупности, то $\psi^{-1} \in [\mathscr{F}^+[\Gamma] \to \Gamma_0]$ (устойчивость решения обратной задачи).

Рассмотрим теперь частный случай R_1-структуры, когда γ_0, γ_1, γ_2, Γ — конечномерные пространства. Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = E_m$, $\gamma_0 = \Gamma = E_N$,

$$\alpha_{\nu j}^k = [\alpha_{k\nu j}^{wz}]_{w,z=\overline{1,n}}, \qquad f_{k\nu} = [f_{k\nu}^z]_{z=\overline{1,m}}, \qquad S_{kj} = [S_{kj}^{\Delta z}]_{\Delta=\overline{1,N};\, z=\overline{1,m}},$$

$$r_l = [r_{lj}]_{j=\overline{1,N}}, \qquad \Pi_k = [\Pi_{k\Delta}]_{\Delta=\overline{1,N}}, \qquad \beta_{\nu j}^k = [\beta_{k\nu j}^{wz}]_{w,z=\overline{1,m}},$$

$$c_{kj} = [c_{kj}^{\Delta z}]_{\Delta=\overline{1,N};\, z=\overline{1,m}}, \qquad z_{k\nu} = [z_{k\nu}^j]_{j=\overline{1,N}} = [z_{k\nu}^{wj}]_{w=\overline{1,m};\, j=\overline{1,N}},$$

$$\alpha_{\nu 0}^k = \sum_{j=1}^N \beta_{\nu j}^k r_{\nu+k,j} + \alpha_{\nu 0}^{*,k}, \qquad f_{k\nu} = \sum_{j=1}^N z_{k\nu}^j r_{\nu+k,j} + f_{k\nu}^*, \qquad S_{k0} = \sum_{j=1}^N c_{kj} r_{kj} + S_{k0}^*,$$

$$\beta_{\nu j}^{*,k} = \beta_{\nu j}^k (\alpha_{00}^0)^{-1} f_{00}, \qquad c_{lj}^* = c_{lj}\varphi_{00}, \qquad \beta_\nu^{*,k} = [\beta_{\nu j}^{*,k}]_{j=\overline{1,N}} = [\beta_{\nu wj}^{*,k}]_{w=\overline{1,m};\, j=\overline{1,N}},$$

$$c_l^* = [c_{lj}^*]_{j=\overline{1,N}} = [c_{l\Delta j}^*]_{\Delta=\overline{1,N};\, j=\overline{1,N}}, \qquad \tilde{\Theta}^l = [\beta_\nu^{*,l-\nu} - z_{l-\nu,\nu}]_{\nu=\overline{0,l}}.$$

Тогда матрица D_l имеет вид $D_l = [D_{l\nu k}]_{\nu,k=\overline{-1,l}}$, где $D_{l\nu k} = \alpha_{\nu k}^{k-\nu} (k, \nu \geqslant 0)$, $D_{l,-1,k} = S_{kk}$, $D_{l,\nu,-1} = \beta_\nu^{*,l-\nu} - z_{l-\nu,\nu}$, $D_{l,-1,-1} = c_l^*$. Матрицы d_l и D_l являются квадратными матрицами порядков N и $N + m(l+1)$ соответственно. Условие $D_l \# 0$, $l \geqslant 1$ теоремы 2 имеет вид $\det D_l \neq 0$, $l \geqslant 1$.

4. В этом параграфе мы рассмотрим важный частный случай треугольных структур — дискретные операторы высших порядков. Пусть p, $q \geqslant 1$. Рассмотрим уравнение

$$(Ly)_\nu \equiv \sum_{j=-q}^p a_{\nu j} y_{\nu+j} = \lambda y_\nu, \qquad \nu \geqslant q, \qquad a_{\nu,-q} = 1, \tag{13}$$

где $y = [y_\nu]_{\nu \geqslant 0}$ и $a_{\nu j} \in \mathbf{C}$ — комплексные числа. Оператор L называется невырожденным, если $a_{\nu p} \neq 0$, $\nu \geqslant q$. Пусть $\mathscr{F}^+ = \mathscr{F}^+(\mathbf{C})$ — множество ОФ

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda^k} P_k, \qquad P_k \in \mathbf{C},$$

а $\mathscr{F}_0^+$ — множество ОФ $P(\lambda) \in \mathscr{F}^+$, для которых $P_0 = 0$.

Пусть $\Phi_\nu(\lambda) = [\Phi_\nu^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T$, $\nu \geqslant 0$ — решение уравнения (13) при условиях

$$\Phi_\nu^i(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{k\nu}^i \in \mathscr{F}^+, \qquad \Phi_\nu^i(\lambda) = \delta_{i,\nu-1} \qquad (\nu = \overline{0, q-1}).$$

Решение $\{\Phi_\nu(\lambda)\}_{\nu \geqslant 0}$ называется решением Вейля, а матрица $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p};\, i=\overline{1,q}}$, $M_j^i(\lambda) = \Phi_{j+q-1}^i(\lambda)$ — матрицей Вейля для L.

Обратная задача 2. *Построить L по заданной матрице $M(\lambda)$.*

Положим $\lambda = \rho^q$,

$$H_\nu(\rho) = \sum_{i=1}^{q} \rho^{1-i}\Phi_\nu^i(\lambda), \qquad \nu \geqslant 0; \qquad \Pi_j(\rho) = H_{j+q-1}(\rho), \qquad j = \overline{1,p}; \qquad \Pi(\rho) = [\Pi_j(\rho)]_{j=\overline{1,p}}.$$

Тогда

$$H_\nu(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} H_{k\nu}, \qquad H_{qk+i-1,\nu} = \Phi_{k\nu}^i,$$

$$\Pi_j(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} \Pi_{kj}, \qquad \Pi_j(\rho) = \sum_{i=1}^{q} \rho^{1-i} M_j^i(\lambda).$$

Подставляя $H_\nu(\rho)$ в (13), получаем:

$$H_{k\nu} = \sum_{j=-q}^{p} a_{\nu j} H_{k-q,\nu+j} \qquad (k > \nu \geqslant q), \tag{14}$$

$$H_{\xi\nu} = \delta_{\xi\nu}\,(\xi \leqslant \nu), \qquad H_{\xi\nu} = 0 \qquad (\nu = \overline{0, q-1},\ \xi > \nu). \tag{15}$$

Отсюда находим $H_{k\nu}$ и, следовательно, $\Phi_{k\nu}^i$). Итак, для L существует единственное решение Вейля, которое может быть найдено при помощи (14), (15).

Через M^* обозначим множество матриц $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p},\, i=\overline{1,q}}$, $M_j^i(\lambda) \in \mathscr{F}^+$, таких, что $\Pi_{kj} = \delta_{k,j+q-1}$ $(j = \overline{1,p},\ k = \overline{1, j+q-1})$. Ясно, что если $M(\lambda)$ — матрица Вейля для L, то $M(\lambda) \in M^*$.

Обратная задача 2 является частным случаем обратной задачи для R-структуры. Применим метод из параграфа 2 для решения задачи 2. Положим

$$\chi_{ki} = \left[\frac{k-q-i}{p+q}\right], \qquad \mu_{ki} = p\chi_{ki} + q + i - 1, \qquad \gamma_{ki} = k - 2q - i + 1(\operatorname{mod}(p+q)), \qquad r_{ki} = a_{\mu_{ki},\gamma_{ki}},$$

$$\pi_{ji} = a_{jp+q+i-1,p}, \qquad W_s^{k,i} = H_{k-sq,sp+q+i-1} \qquad (s = \overline{0,\chi_{ki}}), \qquad W_{\chi_{ki}+1}^{k,i} = r_{ki},$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Группируя соотношения (14) и используя равенство $H_{k,i+q-1} = \Pi_{ki}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &H_{k,i+q-1} = \Pi_{ki}, \\ &H_{k-qs,sp+q+i-1} = \sum_{j=-q}^{p} a_{sp+q+i-1,j} H_{k-q(s-1),sp+q+i+j-1}, \qquad s = \overline{o,\chi_{k_i}}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При $k \geqslant q+1$ рассмотрим линейную систему $X_k = (X_{ki})$, $i = \overline{1, \min(p, k-q)}$ вида (15), (16) относительно $W_s^{k,i}, s = \overline{0, \chi_{ki}+1}$. Определитель системы X_{ki} равен

$$\prod_{j=0}^{\chi_{ki}-1} \pi_{ji}.$$

Решая X_k последовательно при $k = q+1,\ q+2,\ \ldots$, находим коэффициенты $H_{k\nu}$, $a_{\nu j}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для некоторого оператора L вида* (13)*, необходимо и достаточно, чтобы системы X_k, $k \geqslant q+1$, были разрешимы. Для невырожденных операторов решение обратной задачи единственно.*

Для невырожденных операторов L можно получить более удобные и легко проверяемые необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. В дальнейшем считаем, что L невырожденный оператор. Положим

$$R_k(\lambda) = [R_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}^T, \qquad R_{pk+i-1}^j(\lambda) = \delta_{ij}\lambda^k, \qquad i = \overline{1,p},$$

$$R_k^*(\lambda) = [R_k^{*,j}(\lambda)]_{j=\overline{1,q}}, \qquad R_{qk+i-1}^{*,j}(\lambda) = \delta_{ij}\lambda^k, \qquad i = \overline{1,q}.$$

Пусть $P_k(\lambda) = [P_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}^T$, $Q_k(\lambda) = [Q_k^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T$, $k \geqslant 0$, — решения уравнения (13) при условиях $P_k(\lambda) = 0$ $(k = \overline{0, q-1})$, $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$ $(k = \overline{0,p-1})$; $Q_k^i(\lambda) = \delta_{k+1,i}$ $(k = \overline{0,q-1})$, $Q_{k+q}(\lambda) = 0$ $(k = \overline{0,p-1})$. Тогда

$$P_{k+q}(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} c_{ik} R_i(\lambda), \qquad k \geqslant 0, \qquad c_{kk} \neq 0. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (13) и сравнивая соответствующие коэффициенты, вычисляем

$$\sum_{j=-q}^{p} a_{kj} c_{i,k+j-q} = c_{i-p,k-q}, \qquad i = \overline{0, k+p-q}.$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для нахождения $a_{k\nu}$ по c_{ik}:

$$a_{k\nu} = (c_{k+\nu-q,k+\nu-q})^{-1}(c_{k+\nu-q-p,k-q} - \sum_{j=\nu+1}^{p} a_{kj} c_{k+\nu-q,k+j-q}), \qquad \nu = \overline{p, -q+1}. \tag{18}$$

Здесь $k \geqslant q$ при $\nu \geqslant 0$ и $k \geqslant q - \nu$ при $\nu < 0$. Кроме того, $c_{ik} = 0$ при $i < 0$. В частности, $a_{kp} = (c_{k+p-q,k+p-q})^{-1} c_{k-q,k-q}$.

Лемма. *Справедливы соотношения*

$$(1, P_{k+q}(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)) = \Theta_{k\nu}, \qquad 0 \leqslant k < \nu \leqslant q-1, \qquad \Theta_{k\nu} = a_{q+k,\nu-q-k}, \tag{19}$$

$$(1, P_{k+q}(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)) = \delta_{\nu k}, \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant k. \tag{20}$$

Обозначим

$$\mu_{i\nu} = (1, R_i(\lambda) M(\lambda) R_\nu^*(\lambda)), \qquad i, \nu \geqslant 0; \qquad \Delta_k = det[\mu_{i\nu}]_{i,\nu=\overline{0,k}}, \qquad k \geqslant 0.$$

Подставляя (17) в (20), вычисляем

$$\sum_{i=0}^{k} c_{ik} \mu_{i\nu} = \delta_{\nu k}, \qquad 0 \leqslant \nu \leqslant k. \tag{21}$$

При каждом $k \geqslant 0$ (21) является линейной алгебраической системой относительно c_{ik}. Определитель системы (21) равен $\Delta_k \neq 0$ при всех $k \geqslant 0$. Решая (21), находим

$$c_{ik} = (-1)^{k-i} \Delta_k^{-1} det[\mu_{j\nu}]_{j=\overline{0,k}\setminus i;\, \nu=\overline{0,k-1}} \qquad (i = \overline{0,k}), \qquad c_{kk} = \Delta_{k-1}\Delta_k^{-1}. \tag{22}$$

Так как $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$, $k = \overline{0,p-1}$, то в силу (20) получаем $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$, $0 \leqslant \nu \leqslant i \leqslant p-1$. Отметим, что множество M^* можно определить иначе: M^* — множество матриц $M(\lambda) = [M_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}$; $i = \overline{1,q}$, $M_j^i(\lambda) \in \mathscr{F}_0^+$ таких, что $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$ при $0 \leqslant \nu \leqslant i \leqslant p-1$.

Теорема 4. *Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для невырожденного оператора L, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k \neq 0$ при всех $k \geqslant 0$. Оператор L может быть построен по следующему алгоритму.*

Алгоритм 2. *1. Строим $c_{ik} (0 \leqslant i \leqslant k)$ и $P_{k+q}(\lambda)$ при $k \geqslant 0$ по* (22), (17)*; положим $P_k(\lambda) \equiv 0$ при $k = \overline{0,q-1}$.*

2. Вычисляем $a_{k\nu}$ по (18).

Следствие. *Для того чтобы матрица $M(\lambda) \in M^*$ была матрицей Вейля для невырожденного оператора L с вещественными коэффициентами $a_{\nu j}, a_{\nu p} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu_{i\nu}$ были вещественными и $\Delta_k > 0$ при всех $k \geqslant 0$.*

Замечание. Рассмотрим случай $p = q = 1$. Тогда

$$M(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} M_k \in \mathscr{F}^+, \qquad M_1 = 1, \qquad \mu_{i\nu} = M_{i+\nu+1}, \qquad \Delta_k = \det[M_{i+\nu+1}]_{i,\nu=\overline{0,k}}.$$

Функция Вейля $M(\lambda)$ совпадает с обобщенной спектральной функцией [3]. Если $a_{\nu 1} > 0$, а $a_{\nu 0}$ — вещественные числа, то существует, по крайней мере, одна спектральная функция $\sigma(\lambda)$ такая, что

$$M_{k+1} = (\lambda^k, M(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda), \qquad k \geqslant 0.$$

Числа $\{M_k\}_{k \geqslant 1}$ являются моментами $\sigma(\lambda)$. Поэтому следствие 1 при $p = q = 1$ совпадает с теоремой о разрешимости классической проблемы моментов.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (*проект №* 1.1436.2014K).

Библиографический список

1. *Atkinson F.* Discrete and Continuous Boundary Problems. N. Y. : Academic Press, 1964.
2. *Nikishin E. M.* The discrete Sturm – Liouville operator and some problems of the theory of functions // J. Soviet Math. 1986. Vol. 35. P. 2679–2744.
3. *Гусейнов Г. Ш.* Определение бесконечной несамосопряженной матрицы Якоби по ее обобщенной спектральной функции // Матем. заметки. 1978. Т. 23, вып. 2. С. 237–248.
4. *Yurko V. A.* On higher-order difference operators // J. Differ. Equ. Appl. 1995. Vol. 1. P. 347–352.

Inverse Spectral Problem for Discrete Operators in Topological Spaces

V. A. Yurko

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, YurkoVA@info.sgu.ru

An inverse spectral problem for discrete operators of a triangular structure in topological spaces is studied. A constructive procedure for the solution of the inverse problem is provided. Necessary and sufficient conditions for its solvability are obtained.

Key words: discrete operators, spectral theory, inverse problems.

The results obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of education and science of the Russian Federation (*project no.* 1.1436.2014K).

References

1. Atkinson F. *Discrete and Continuous Boundary Problems*. New York, Academic Press, 1964.
2. Nikishin E. M. The discrete Sturm – Liouville operator and some problems of the theory of functions. *J. Soviet Math.*, 1986, vol. 35, pp. 2679–2744.
3. Guseinov G. S. The determination of the infinite nonselfadjoint Jacobi matrix from its generalized spectral function. *Math. Notes*, 1978, vol. 23, iss. 2, pp. 130–136. DOI: 10.1007/BF01153153.
4. Yurko V. A. On higher-order difference operators. *J. Differ. Equ. Appl.*, 1995, vol. 1, pp. 347–352.