УДК 523.68, 519.65

РАСЧЁТ МАСС МЕТЕОРНЫХ ТЕЛ ПУТЁМ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ

В. Т. Лукашенко

Аспирант кафедры аэромеханики и газовой динамики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова; младший научный сотрудник отдела вычислительной физики, Вычислительный центр РАН имени А. А. Дородницына, Москва, lukashenko-vt@yandex.ru

При обработке метеорных наблюдений повсеместно используются устаревшие и недостаточно надёжные методы. В частности, определение внеатмосферных масс метеороидов происходит на основе светимости без предоставления каких-либо оценок точности расчётов. Вместе с тем, за последние годы разработан ряд новых динамических методов, достаточно точно описывающих движение метеорных тел в атмосфере, а также изменение их параметров. В представленной статье данные методы были применены автором для получения внеатмосферных масс метеороидов по данным Европейской болидной сети. Показано, что фотометрические оценки европейских наблюдателей оказываются значительно больше, чем реально возможные внеатмосферные массы метеорных тел. Помимо этого, предложена аппроксимация траекторий элементарными функциями, позволяющая упростить и ускорить расчёты.

Ключевые слова: метеор, расчёт, масса, траектория, аппроксимация, болид, Европейская сеть, элементарные функции.

Вплоть до нашего времени остро стоит проблема обработки метеорных наблюдений. При этом необходимо отметить, что для нахождения входной массы метеорного тела, а также её изменения, наблюдатели повсеместно используют достаточно старые подходы, основанные на наблюдаемой светимости метеоров [1–3]. В качестве альтернативы этому в работах [4, 5] был предложен ряд динамических подходов, приближающих траектории метеороидов точным аналитическим решением уравнений метеорной физики. Для начала приведём краткий обзор как старого, так и новых методов, а после этого рассмотрим результаты расчётов, полученные по имеющимся в открытом доступе наблюдениям Европейской болидной сети [6–8], а также возможность их упрощения [9].

ФОТОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Основы по обработке метеорных наблюдений исходя из светимости были заложены в первой половине XX века Эпиком и Уипплом [1–3]. С тех пор в литературу прочно вошло понятие фотометрической формулы для оценки массы. Выводится она из предположения, что в светимость метеора I переходит некоторая доля потерь кинетической энергии:

$$I = -\tau \frac{d\left(mv^2/2\right)}{dt} = -\tau \left(\frac{v^2}{2}\frac{dm}{dt} + mv\frac{dv}{dt}\right),$$

здесь τ — коэффициент эффективности излучения; m, v — это соответственно масса и скорость метеорного тела. Отсюда, пренебрегая торможением, можно получить внеатмосферную массу метеороида как

$$m_{ph} = m_E + 2\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{I}{\tau v^2} dt, \tag{1}$$

где $[t_0, t_1]$ — временной участок светимости; m_E — остаточная масса. Остаточной массой при этом либо пренебрегают, либо вычисляют динамически через аппроксимацию ускорения:

$$m_E = \frac{1}{\rho_m^2}\left(\frac{1.2\rho_a v^2}{|dv/dt|}\right)^3,$$

ρ_m — плотность метеорного тела; ρ_a — плотность атмосферы.

Благодаря внешней простоте фометрическая формула (1) получила широкое распространение. Однако с появлением обширной наблюдательной базы и развитием газовой динамики высокоскоростного полёта было показано, что во многих случаях её использование не является корректным [4, 10]. В частности, для крупных метеорных тел торможение оказывает существенное влияние на светимость.

ТОЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В последние годы разработан целый ряд динамических методов [4, 5], которые достаточно просто и одновременно качественно правильно моделируют полёт метеорного тела в атмосфере [11]. При этом они дают возможность вычислять основные газодинамические характеристики тела по данным наблюдений.

Рассмотрим уравнения метеорной физики, описывающие движение тела, входящего в атмосферу с большой скоростью:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}c_d\rho_a v^2 S + mg\sin\gamma,$$
$$mv\frac{d\gamma}{dt} = mg\cos\gamma - \frac{mv^2}{R_p}\cos\gamma - \frac{1}{2}c_L\rho_a v^2 S,$$
$$\frac{dh}{dt} = -v\sin\gamma,$$
$$H^*\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2}c_h\rho_a v^3 S,$$

здесь c_d, c_L, c_h — соответственно коэффициенты сопротивления, подъёмной силы и теплообмена; ρ_a — плотность атмосферы; S — площадь миделева сечения метеорного тела; g — ускорение свободного падения; γ — местный угол траектории с горизонтом; R_p — радиус планеты; h — высота над поверхностью планеты; H^* — теплота сублимации.

Так как коэффициент подъёмной силы c_L сильно зависит от формы тела, которая неизвестна, то уравнение изменения угла γ обычно не рассматривается. Скорость вхождения метеорных тел достаточно высока (от 6 до 72 км/с), поэтому весом в уравнении движении на касательной к траектории пренебрегают.

Заметим теперь, что время явно не входит в коэффициенты оставшихся уравнений, а потому удобно перейти к новой независимой переменной — высоте h. Таким образом, после обезразмеривания получим:

$$m\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}c_d\frac{\rho_0 h_0 S_e}{m_e}\frac{\rho v s}{\sin\gamma},$$
$$\frac{dm}{dy} = \frac{1}{2}c_h\frac{\rho_0 h_0 S_e}{m_e}\frac{v_e^2}{H^*}\frac{\rho v^2 s}{\sin\gamma},$$

где m, v, y, s, ρ, — безразмерные масса, скорость, высота, миделево сечение метеороида и плотность атмосферы; ρ_0 — плотность атмосферы у поверхности Земли; символы с индексом e соответствуют размерным значениям величин в момент входа в атмосферу; h_0 — высота однородной атмосферы.

Для получения отсюда аналитического решения берётся модель изотермической атмосферы для приближения плотности ($\rho = \exp(-y)$), полагается связь миделева сечения метеорного тела с массой ($s = m^\mu$, где $\mu = \mathrm{const}$ характеризует унос массы — при $\mu = 0$ испарение происходит только с передней кромки тела, при $\mu = 2/3$ вращение максимально и испарение происходит равномерно со всей поверхности), после этого в предположении постоянства коэффициентов

$$\frac{c_h}{c_d H^*} = \mathrm{const}, \qquad \frac{c_d}{\sin\gamma} = \mathrm{const}$$

система интегрируется с начальным условием $y = \infty$, $v = 1$, $m = 1$.

Получаем точное аналитическое решение в виде

$$m = \exp\left(-\beta\frac{1-v^2}{1-\mu}\right), \qquad y = \ln\alpha + \beta - \ln\frac{\Delta}{2}, \tag{2}$$

$$\Delta = \overline{\mathrm{Ei}}(\beta) - \overline{\mathrm{Ei}}(\beta v^2), \qquad \overline{\mathrm{Ei}}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{x}\right)\frac{e^t dt}{t},$$

при этом $v \in [0,1]$; $\mu = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \mu \leqslant 2/3$; баллистический коэффициент $\alpha = \dfrac{c_d\rho_0 h_0 S_e}{2m_e\sin\gamma} > 0$ и параметр уноса массы $\beta = \dfrac{(1-\mu)\,c_h v_e^2}{2c_d H*} > 0$ являются постоянными.

Так как внеатмосферная масса m_e входит в коэффициент α, задача её оценивания сводится к поиску для каждого отдельного метеороида наиболее подходящей пары коэффициентов α, β по точкам наблюдений (v_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Обычно для этого строят функционал ошибки, который затем минимизируется.

Пожалуй, среди всего имеющегося семейства точных динамических методов наиболее оптимальным для крупных метеорных тел оказывается метод с функционалом ошибки следующего вида [5]:

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\exp(-y_i) - \exp(-y(\alpha, \beta, v_i))\right]^2 \longrightarrow \min_{\alpha, \beta}, \qquad (3)$$

где y_i — высота i-й точки наблюдений, а $y(\alpha, \beta, v_i)$ — высота, вычисленная по скорости i-й точки при отдельно взятой паре α, β. При этом, как показывает практика [5], для функции Q находится строго одна точка локального минимума при допустимых значениях параметров.

РАСЧЁТЫ ПО ДАННЫМ ЕВРОПЕЙСКОЙ БОЛИДНОЙ СЕТИ

Отметим, что авторами [3, 4] проводились расчёты по данным болидных сетей Канады, США и Таджикистана. В результате для крупных метеороидов не было обнаружено какой-либо корреляции между точными динамическими оценками внеатмосферных масс и оценками по светимости. В связи с этим было бы интересно обработать соответствующие данные европейских наблюдателей.

В табл. 1 представлены итоговые результаты расчётов. Точные динамические массы m_e находились из коэффициентов α по формуле

$$m_e = \left(\frac{1}{2} c_d \frac{\rho_0 h_0}{\alpha \sin\gamma} \frac{A_e}{\rho_m^{2/3}}\right)^3.$$

Отметим, что коэффициент начальной формы тела A_e и коэффициент сопротивления c_d, вообще говоря, нам не известны. Однако при расчётах форма тела условно полагалась сферической ($A_e \approx 1.21$, $c_d = 1$) — несмотря на вносимые погрешности, это должно сохранять правильный порядок величин масс. Плотности же метеороидов ρ_m брались из статьи [12] в связи с их принадлежностью к наблюдаемым классам метеорных тел.

Таблица 1

Расчёты по данным Европейской болидной сети (болиды [6], Лойткирх (EN300874) [7], Траунштайн (EN290181) [8])

Наименование болида	ρ_m, г/см^3	α	β	m_e, кг	m_{ph}, кг
EN010677	2.0	40.88	0.82	17.95	5200
EN140977A	2.0	100.24	1.79	1.57	1500
EN120677	3.7	9.69	1.70	51.14	850
EN200477B	0.75	13.12	4.75	247.00	390
EN300874	3.7	31.91	0.40	6.75	311
EN311077	2.0	41.46	1.72	1.23	280
EN071277	2.0	44.34	0.13	11.73	236
EN180177	2.0	75.29	1.73	0.19	55
EN290181	2.0	28.24	1.55	7.47	21

Заметим, что явно выделяется факт — фотометрические оценки наблюдателей дают намного завышенные результаты. Лишь для болидов EN200477B и EN290181 отличие полученных внеатмосферных масс может быть объяснено погрешностью динамического метода.

АППРОКСИМАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Отметим, что особенностью решения (2) является наличие интегральной экспоненты $\overline{\mathrm{Ei}}$. Это создаёт определённые трудности для численных расчётов и исследования сходимости различных алгоритмов. Вместе с тем, как отмечается в монографии [10], при $\beta < 2$ решение (2) можно надёжно заменить на

$$y = \ln\alpha - \ln(-\ln v) + 0.83\beta(1 - v), \qquad (4)$$

а для $\beta > 10$ существует функция приближения

$$y = \ln\left(2\alpha\beta / \left(1 - e^{\beta\left(v^2-1\right)}\right)\right), \tag{5}$$

используемая для вычисления высоты погасания метеорного тела [13, 14].

На основе формул (4), (5) была разработана замена точного решения уравнений метеорной физики на склейки из элементарных функций по параметру β вида [9]:

$$y_j^{п} = \begin{cases} y_0, & \text{если } \beta \leqslant \beta_i, \\ y_j, & \text{если } \beta > \beta_i, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \tag{6}$$

$$\beta_1 = 2.89, \qquad \beta_2 = 2.1,$$

где $y_0 = \ln\alpha - \ln(-\ln v) + 0.83\beta(1 - v)$, $y_j = \ln\dfrac{2\alpha\,(\beta - A_j)}{1 - e^{(\beta - A_j)(v^2-1)}}$, $j = 1, 2$, $A_1 = 1.1$, $A_2 = 1.0 + (1.0 - v)2.5/\beta$.

Фактически данная замена получается путём искусственного уменьшения параметра уноса массы β в формуле (5) до получения удовлетворительной склейки с функцией (4); индекс j при этом соответствует степени точности замены. Среднее отличие получаемых коэффициентов α, β для приближения $y_1^{п}$ может составлять 10–20%, а для приближения $y_2^{п}$ — около 2%.

В табл. 2 представлены расчёты коэффициентов α_j, β_j и аппроксимационных масс $m_i^{п}$ путём минимизации функционала ошибки (3) с использованием вместо точного решения (2) соответствующих склеек элементарных функций $y_j^{п}$, $j = 1, 2$. Как видно, отличие полученных масс $m_i^{п}$ от оригинальных масс m_e (см. табл. 1) не существенно по сравнению с возможной погрешностью динамического метода.

Таблица 2

Расчёты с использованием аппроксимации (болиды [6], Лойткирх (EN300874) [7], Траунштайн (EN290181) [8])

Наименование болида	α_1	β_1	α_2	β_2	$m_1^{п}$, кг	$m_2^{п}$, кг
EN010677	41.91	0.81	41.91	0.81	16.66	16.66
EN140977A	104.42	1.73	104.42	1.73	1.39	1.39
EN120677	9.95	1.70	9.95	1.70	47.23	47.23
EN200477B	13.38	4.48	13.16	4.70	232.88	244.75
EN300874	32.27	0.41	32.27	0.41	6.09	6.09
EN311077	43.50	1.62	43.50	1.62	1.06	1.06
EN071277	44.37	0.15	44.37	0.15	11.71	11.71
EN180177	77.67	1.72	77.67	1.72	0.17	0.17
EN290181	29.04	1.55	29.04	1.55	6.87	6.87

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе к опубликованным данным Европейской болидной сети [6–8] были применены новейшие точные и аппроксимационные динамические методы обработки наблюдений [5, 9]. Результаты показывают, что для крупных метеорных тел фотометрические оценки европейских наблюдателей оказываются тотально завышенными по сравнению с теоретически возможными внеатмосферными массами метеороидов. Использование формулы (1) приводит к систематическим ошибкам в рассчётах.

В связи с тем, что обработка наблюдений при помощи точного решения уравнений метеорной физики из-за особенности в виде интегральной экспоненты является проблематичной, найдены приближения этого решения склейкой элементарных функций (6). Использование этих приближений позволяет без относительной потери точности и намного быстрее вычислять базовые коэффициенты α, β, позволяющие моделировать траекторию полёта метеорного тела в атмосфере, а также даёт возможность аналитически исследовать возможные проблемы со сходимостью программных методов.

Вместе с тем, за рамками статьи остался вопрос о возможности построения более оптимального функционала ошибки, чем (3), с учётом аппроксимации (6). Особенно интересно в этом плане было бы рассмотреть возможность использования оригинального метода Гаусса наименьших квадратов.

Библиографический список

1. *Opik E.* Atomic collisions and radiation of meteors // Acta et Commentat. Univ. Tartuen. 1933. Vol. A26, № 2. P. 1–39.
2. *Whipple F. L.* Photographic meteor studies. I // Proc. Armer. Phil. Soc. 1938. Vol. 79, № 4. P. 499–548.
3. *Whipple F. L.* Photographic meteor studies. II. Nuonlinear trails // Proc. Armer. Phil. Soc. 1940. Vol. 82, № 3. P. 275–290.
4. *Грицевич М. И.* О применимости фотометрической формулы при оценке массы болидообразующих тел // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 5. С. 624–630.
5. *Грицевич М. И.* Приближение наблюдаемого движения болидов аналитическим решением уравнений метеорной физики // Астрономический вестн. 2007. Т. 41, № 6. С. 548–554.
6. *Ceplecha Z., Boček J., Nováková-Ježková M., Porubcan V., Kirsten T., Kiko J.* European Network fireballs photographed in 1977 // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1983. Vol. 34. P. 195–212.
7. *Ceplecha Z., Ježková M., Boček J.* Photographic data on the Leutkirch Fireball (EN300874) (Aug. 30, 1974) // Bull. Astron. Inst Czechosl. 1976. Vol. 27. P. 18–23.
8. *Ceplecha Z., Boček J., Nováková M., Polnitzky G.* Photographic data on the Traunstein Fireball (EN290181, Jan. 29, 1981) and suspected mete-orite fall // Bull. Astron. Inst. Czechosl. 1983. Vol. 34. P. 162–167.
9. *Лукашенко В. Т.* Точные и аппроксимационные методы нахождения масс метеорных тел // Современные проблемы теории функций и их приложения : материалы 17-й междунар. Сарат. зимн. шк. Саратов : ООО Изд-во «Научная книга», 2014. С. 162–163.
10. *Стулов В. П., Мирский В. Н., Вислый А. И.* Аэродинамика болидов. М. : Наука ; Физматлит, 1995. 236 с.
11. *Грицевич М. И., Гуслов Т. С., Кожемякина Д. М., Новиков А. Д.* Об изменении параметра уноса массы вдоль траектории метеорного тела // Астрономический вестн. 2011. Т. 45, № 4. С. 347–352.
12. *Ceplecha Z., Borovicka J., Elford W. G., Revelle D. O., Hawkes R. L., Porubcan V., Simek M.* Meteor phenomena and bodies // Space Sci. Rev. 1998. Vol. 84. P. 327–471.
13. *Грицевич М. И., Попеленская Н. В.* Траектории метеоров и болидов при больших значениях параметра уноса массы // Докл. АН. 2008. Т. 418, № 4. С. 477–481.
14. *Попеленская Н. В.* Зависимость высоты погасания малых метеорных тел от их параметров // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2010. № 4. С. 65–68.

Calculation of Meteoroids Masses by Approximating the Trajectories

V. T. Lukashenko

Moscow State University, Department of Mechanics and Mathematics, Leninskie Gori, GSP-1, Moscow, 119991, Russia, lukashenko-vt@yandex.ru

At processing meteor observations the outdated and insufficiently reliable methods are commonly used. In particular, the finding outward-atmospheric meteoroid masses comes from the luminosity without providing any estimates of accuracy for calculations. However, in recent years a variety of new dynamics methods has been developed that quite good describe a motion of meteoroids in atmosphere, as well as changing their parameters. In this article, these methods were used by the author to obtain outward-atmospheric masses of meteoroids from the data of European Fireball Network. It is shown that photometric estimates of European observers are much high than actually possible outward-atmospheric meteroids masses. In addition, the author proposes an approximation of trajectories by elementary functions that allows to simplify and speed up calculations.

Key words: meteor, calculation, mass, trajectory, approximation, bolide, European Fireball Network, elementary functions.

References

1. Opik E. Atomic collisions and radiation of meteors. *Acta et Commentat. Univ. Tartuen.*, 1933, vol. A26, no. 2, pp. 1–39.

2. Whipple F. L. Photographic meteor studies. I, *Proc. Armer. Phil. Soc.*, 1938, vol. 79, no. 4, pp. 499–548.

3. Whipple F. L. Photographic meteor studies. II. Nuonlinear trails. *Proc. Armer. Phil. Soc.*, 1940, vol. 82, no. 3, pp. 275–290.

4. Gritsevich M. I. O primenimosti fotometricheskoi formuli pri ozhenke massi bolidoobrazuiuchih tel [About applicability of photometrci formula for estimating the masses of bolide-created bodies]. *Doklady Akademii Nauk*, 2008, vol. 418, no. 5, pp. 624–630 (in Russian).

5. Gritsevich M. I. Approximation of the observed motion of bolides by the analytical solution of the equations of meteor physics. *Solar System Research*, 2007, vol. 41, no. 6, pp. 509–514.

6. Ceplecha Z., Boček J., Nováková-Ježková M., Porub-

can V., Kirsten T., Kiko J. European Network fireballs photographed in 1977. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 195–212.

7. Ceplecha Z., Ježková M., Boček J. Photographic data on the Leutkirch Fireball (EN300874) (Aug. 30, 1974). *Bull. Astron. Inst Czechosl.*, 1976, vol. 27, pp. 18–23.

8. Ceplecha Z., Boček J., Nováková M., Polnitzky G. Photographic data on the Traunstein Fireball (EN290181, Jan. 29, 1981) and suspected mete-orite fall. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 162–167.

9. Lukashenko V. T. Tochnie i approximazionnie metodi nahoshdenia mass meteornih tel [Exact and approximation methods for finding the masses of meteoroids]. *Sovremennie problemi teorii funktsiy i ih prilojenya: materialy 17 mezhdunar. Saratov. zimney shkoli* [Modern problems of function theory and their applications: Proc. of the Intern. 17-th Saratov Winter School], Saratov, 2014, pp. 162–163.

10. Stulov V. P., Mirsky V. N., Vislii A. I. *Aerodinamika bolidov* [Aerodynamics of bolides]. Moscow, Nauka, Fizmathlit, 1995, 236 p. (in Russian).

11. Gritsevich M. I., Guslov T. S., Kozhemyakina D. M., Novikov A. D. On change in the mass loss parameter along the trajectory of a meteor body. *Solar System Research*, 2011, vol. 45, no. 4, pp. 336–341.

12. Ceplecha Z., Borovicka J., Elford W. G., Revelle D. O., Hawkes R. L., Porubcan V., Simek M. Meteor phenomena and bodies. *Space Sci. Rev.*, 1998, vol. 84, pp. 327–471.

13. Gritsevich M. I., Popelenskaya N. V. Meteor and fireball trajectories for high values of the mass loss parameter. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, no. 2, pp. 88–92.

14. Popelenskaya N. V. Dependence of the height of disappearance for small meteoric bodies on their parameters. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 90–93.

УДК 532.591

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. М. Сычева

Магистрант кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет,
sychovaelena92@gmail.com

Опорными элементами ряда морских гидротехнических сооружений служат сваи в виде вертикальных круговых цилиндров. Вопросы о взаимодействии набегающих волн с такими преградами и определении волнового режима на огражденных акваториях представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Рассматривается движение жидкости, вызванное взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром бесконечной длины. Получено решение задачи для колебаний малой амплитуды.

Ключевые слова: вязкость, волновые движения жидкости.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = \mu\Delta\mathbf{v} - \nabla P + \rho\mathbf{g},$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, μ — динамический коэффициент вязкости, P — давление, $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести.

При заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполнено условие

$$\mathbf{v} \to 0, \qquad z \to -\infty.$$

На свободной поверхности задаются кинематическое условие [1]

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

и динамические условия [2]

$$e_{ij}t_i n_j = 0, \qquad P - 2\mu e_{ij} n_i n_j = P_a,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad v_1 = u, \qquad v_2 = v, \qquad v_3 = w,$$

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z,$$

где P_a — постоянное атмосферное давление.