can V., Kirsten T., Kiko J. European Network fireballs photographed in 1977. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 195–212.
7. Ceplecha Z., Ježková M., Boček J. Photographic data on the Leutkirch Fireball (EN300874) (Aug. 30, 1974). *Bull. Astron. Inst Czechosl.*, 1976, vol. 27, pp. 18–23.
8. Ceplecha Z., Boček J., Nováková M., Polnitzky G. Photographic data on the Traunstein Fireball (EN290181, Jan. 29, 1981) and suspected mete-orite fall. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, 1983, vol. 34, pp. 162–167.
9. Lukashenko V. T. Tochnie i approximazionnie metodi nahoshdenia mass meteornih tel [Exact and approximation methods for finding the masses of meteoroids]. *Sovremennie problemi teorii funktsiy i ih prilojenya: materialy 17 mezhdunar. Saratov. zimney shkoli* [Modern problems of function theory and their applications: Proc. of the Intern. 17-th Saratov Winter School], Saratov, 2014, pp. 162–163.
10. Stulov V. P., Mirsky V. N., Vislii A. I. *Aerodinamika bolidov* [Aerodynamics of bolides]. Moscow, Nauka, Fizmathlit, 1995, 236 p. (in Russian).
11. Gritsevich M. I., Guslov T. S., Kozhemyakina D. M., Novikov A. D. On change in the mass loss parameter along the trajectory of a meteor body. *Solar System Research*, 2011, vol. 45, no. 4, pp. 336–341.
12. Ceplecha Z., Borovicka J., Elford W. G., Revelle D. O., Hawkes R. L., Porubcan V., Simek M. Meteor phenomena and bodies. *Space Sci. Rev.*, 1998, vol. 84, pp. 327–471.
13. Gritsevich M. I., Popelenskaya N. V. Meteor and fireball trajectories for high values of the mass loss parameter. *Doklady Physics*, 2008, vol. 53, no. 2, pp. 88–92.
14. Popelenskaya N. V. Dependence of the height of disappearance for small meteoric bodies on their parameters. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2010, vol. 65, no. 4, pp. 90–93.

УДК 532.591

ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ВОЛНАМИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИМИСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Е. М. Сычева

Магистрант кафедры математического моделирования, Тюменский государственный университет, sychovaelena92@gmail.com

Опорными элементами ряда морских гидротехнических сооружений служат сваи в виде вертикальных круговых цилиндров. Вопросы о взаимодействии набегающих волн с такими преградами и определении волнового режима на огражденных акваториях представляют не только теоретический, но и практический интерес.
Рассматривается движение жидкости, вызванное взаимодействием набегающей гравитационной волны, распространяющейся на поверхности слоя вязкой несжимаемой жидкости, с круговым цилиндром бесконечной длины. Получено решение задачи для колебаний малой амплитуды.

Ключевые слова: вязкость, волновые движения жидкости.

В области, занятой жидкостью, выполняются уравнение неразрывности и уравнения движения:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = \mu\Delta\mathbf{v} - \nabla P + \rho\mathbf{g},$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, ρ — плотность, μ — динамический коэффициент вязкости, P — давление, $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести.

При заглублении скорость жидкости должна затухать, т. е. выполнено условие

$$\mathbf{v} \to 0, \qquad z \to -\infty.$$

На свободной поверхности задаются кинематическое условие [1]

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

и динамические условия [2]

$$e_{ij}t_i n_j = 0, \qquad P - 2\mu e_{ij}n_i n_j = P_a,$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \qquad v_1 = u, \qquad v_2 = v, \qquad v_3 = w,$$

$$x_1 = x, \qquad x_2 = y, \qquad x_3 = z,$$

где P_a — постоянное атмосферное давление.

На поверхности цилиндра S в случае вязкой жидкости должно выполняться условие прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (x, y, z) \in S.$$

Будем рассматривать колебания с амплитудой весьма малой по сравнению с длиной волны. Тогда система уравнений и граничных условий примет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \tag{1}$$

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \frac{p}{\rho} - g\xi - 2\nu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad z = 0, \tag{2}$$

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad (x, y, z) \in S, \tag{3}$$

$$\mathbf{v} \to 0, \qquad z \to -\infty, \tag{4}$$

где $p = P + \rho g z - P_a$ — динамическое давление, $\nu = \mu/\rho$ — кинематический коэффициент вязкости.

Решение задачи необходимо искать в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей. Исходя из этого представим скорость в виде [3]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 = \nabla \varphi, \qquad \mathbf{v}_2 = rot \mathbf{\Psi},$$

где φ — потенциал, $\mathbf{\Psi}$ — векторная функция тока.

Тогда, применяя к уравнениям (1) операции div и rot, их можно свести к системе уравнений

$$\Delta \varphi = 0, \qquad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{\Psi} = 0.$$

Применяя операции дифференцирования к уравнениям для функции φ и компонент векторной функции $\mathbf{\Psi}$, получим уравнения для вертикальной составляющей скорости $w = w_1 + w_2$ $\left(w_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}, \right.$ $\left. w_2 = \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)$:

$$\Delta w_1 = 0, \qquad \frac{\partial w_2}{\partial t} - \nu \Delta w_2 = 0. \tag{5}$$

Граничные условия (2) с помощью операций дифференцирования и уравнений (1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial z} - \nu \left(3\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \qquad z = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad z = 0. \tag{7}$$

Из условий (2) и (3) получим:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \qquad (x, y, z) \in S, \tag{8}$$

а из условия затухания волнового движения при заглублении (4):

$$w \to 0, \qquad z \to -\infty. \tag{9}$$

Таким образом, исходная волновая задача сведена к задаче для вертикальной составляющей скорости (5)–(9).

Волновое движение жидкости для свободной волны, не искаженной препятствием, описывается следующими функциями [4]:

$$u = \cos\alpha (ikAe^{kz} - lCe^{lz}) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \omega t},$$

$$v = \sin\alpha (ikAe^{kz} - lCe^{lz}) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \omega t},$$

$$w = (kAe^{kz} + ikCe^{lz}) e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \omega t},$$

$$p = -\rho\omega A e^{kz} e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \omega t}, \qquad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega} e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \omega t},$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны, $l^2 = k^2 + \dfrac{\omega}{\nu}$, $C = \dfrac{2i\nu k^2 A}{\omega + 2\nu k^2}$, α — направление распространения волны, отсчитываемое от оси x в горизонтальной плоскости, а ω — комплексная частота, для которой получено дисперсионное уравнение:

$$\left(\omega + 2\nu k^2\right)^2 + gk = 4\nu^2 k^4 \sqrt{\frac{\omega}{\nu k^2} + 1}.$$

Далее будем рассматривать дифракцию набегающей волны круговым цилиндром с вертикальными образующими. Функции w_1 и w_2 будем искать в виде

$$w_1 = kAe^{kz+\omega t}\tilde{F}(x,y), \qquad w_2 = ikCe^{lz+\omega t}\tilde{F}(x,y).$$

Выражения для функций u, v, p и ξ через $\tilde{F}$ примут следующий вид:

$$u = -k\cos^2\alpha\left(kAe^{kz} + ilCe^{lz}\right)e^{\omega t}\int \tilde{F}(x,y)dx,$$
$$v = -k\sin^2\alpha\left(kAe^{kz} + ilCe^{lz}\right)e^{\omega t}\int \tilde{F}(x,y)\,dy,$$
$$p = -\rho\omega Ae^{kz}e^{\omega t}\tilde{F}(x,y), \qquad \xi = \frac{ikA - lC}{\omega}e^{\omega t}\tilde{F}(x,y).$$

Из уравнений (5) вытекает следующее уравнение Гельмгольца для функции $\tilde{F}$:

$$\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial y^2} + k^2\tilde{F} = 0.$$

Условия (6), (7) и (9) при таком представлении для w_1 и w_2 выполняются, а из условия (8) следует условие для $\tilde{F}$:

$$\frac{\partial\tilde{F}}{\partial r} = 0, \qquad (x,y) \in L,$$

где L — контур сечения препятствия горизонтальной плоскостью.

Функцию $\tilde{F}$ можно представить в виде

$$\tilde{F} = F_\infty + F,$$

где первое слагаемое $F_\infty = e^{ik(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}$ соответствует набегающей волне, а второе характеризует возмущенное движение жидкости.

Уравнение Гельмгольца для определения функции F и условие на контуре L в полярных координатах принимают вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + k^2 F = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + F(r,\theta)\right) = 0, \qquad r = R, \tag{11}$$

где R — радиус цилиндра.

Функция F как решение уравнения Гельмгольца должна также удовлетворять условию излучения в форме [5]

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}(F_r - ikF) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} F = 0.$$

Решение уравнения (10) будем искать с помощью метода разделения переменных, представив неизвестную функцию в виде

$$F(r,\theta) = X(r)Y(\theta).$$

Подставив последнее выражение в уравнение и проведя разделение переменных, получим уравнения

$$r^2X_{rr} + rX_r + (k^2r^2 - m)X = 0, \qquad Y_{\theta\theta} + \lambda Y = 0,$$

где m — константа разделения.

Решение второго уравнения, удовлетворяющее условию периодичности по θ и условию симметрии относительно α имеет вид $Y = \cos n(\theta - \alpha)$, где $n = \sqrt{m}$ — целое число.

Условию излучения удовлетворяет функция Ханкеля первого рода $X = H_n^{(1)}(kr)$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$. Тогда функция F примет вид

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(kr) \cos n(\theta - \alpha).$$

Коэффициенты C_n определим из условия (11). Для этого используем разложение [6]

$$e^{ikR\cos(\theta-\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n i^n J_n(kR) \cos n(\theta - \alpha),$$

где $J_n(kr)$ — функция Бесселя первого рода, $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geqslant 0. \end{cases}$

Тогда получим:

$$C_n = -\varepsilon_n i^n \frac{J_{n-1}(kR) - J_{n+1}(kR)}{H_{n-1}^{(1)}(kR) - H_{n+1}^{(1)}(kR)}.$$

В случае малого значения числа kR (длина волны много больше радиуса цилиндра) условие на контуре L можно записать в виде $F_r = -ik\cos(\theta - \alpha)$, $r = R$. Тогда функция $\tilde{F}$, определяющая суммарное волновое поле, равна $\tilde{F} = e^{ikr\cos(\theta-\alpha)} + \dfrac{ikR^2}{r}\cos(\theta - \alpha)$.

Библиографический список

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика : в 2 ч. Ч. 2. М. : Физматгиз, 1963. 728 с.
2. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М. : Мир, 1973. 792 с.
3. *Баринов В. А., Басинский К. Ю.* Моделирование волновых движений вязкой жидкости // Вестн. Тюмен. ун-та. 2009. № 6. С. 144–151.
4. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М. : Физматгиз, 1959. 700 с.
5. *Кочин Н. Е.* Собрание сочинений : в 2 т. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. 305 с.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

Flow a Round Cylinder by Waves Extending on the Viscous Liquid Surface

E. M. Sycheva

Tyumen State University, 10, Semakova str., 625003, Tyumen, Russia, sychovaelena92@gmail.com

Some marine hydro technical constructions have such support elements as piles in the form of vertical round cylinders. Questions about the incident wave's interaction with such barriers and identification of wave regime on the fenced water areas has as the theoretical as the practical concern.We shall consider the motion of liquid, caused by the interaction of incoming gravitational wave, spreading on the surface of the viscous incompressible liquid coat with an infinitely long round cylinder. The problem was solved for the case of small oscillations.

Key words: viscosity, wave motion of liquid.

References

1. Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaia gidromekhanika* [Theorethical hydromechanics]. Pt. 2, Moscow, Fizmatgiz, 1963, 728 p.
2. Betchelor J. K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [Introduction to the fluid dynamics]. Moscow, Mir, 1973, 792 p.
3. Barinov V. A., Basinsky K. Yu. Modelling of the wave motions of the viscous liquids. *Vestnik Tyumen State Univ.*, 2009, iss. 6, pp. 144–151.
4. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaia gidrodinamika* [Physicochemical hydrodynamics]. Moscow, Fizmatgiz, 1959, 700 p.
5. Kochin N. E. *Sobranie sochinenii* [Collected works]. Vol. 2. Moscow, Publ. Academy of Sciences USSR, 1949, 305 p. (in Russian).
6. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, riadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products], Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 p. (in Russian).