В таком случае $V_t = W_t$. По теореме 1 $V_t(N) \subset N$. Возьмем $a \in N$ и получим $V_t a \in N$ или, что одно и то же, $(I-P)V_t a = 0$. Разложим элемент a по базису $a = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varepsilon_k$. Тогда $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k (I-P)\varepsilon_k e^{ikt} = 0$, причем ряд сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}$ ввиду равномерной ограниченности группы операторов $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Следовательно, $a_k(I-P)\varepsilon_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Если бы при некотором k было $0 = (I-P)\varepsilon_k = R'S\varepsilon_k = R'x_k$, то $x_k = 0$ вопреки нашим предположениям. Значит, имеем $a_k = 0$ для всех k. Итак, приходим к равенству $N = \{0\}$. Это означает, что оператор синтеза S осуществляет изоморфизм пространств X_d и X и система $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ эквивалентна базису $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, а потому сама является базисом, что противоречит условию теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00097-а) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых (проект МД-300.2011.1).

Библиографический список

1. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов // УМН. 1968. Т. 23, вып. 4. С. 117–178.
2. *Терехин А. П.* Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1975. Вып. 2. С. 3–28.
3. *Кузнецова Т. А.* О подпространствах типа B_σ в пространствах с базисом // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика : межвуз. науч. сб. Саратов, 1976. Вып. 6, ч. 2. С. 140–151.
4. *Крейс С. А.* Альтернативные дуальные фреймы в банаховых пространствах // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов, 2009. Вып. 11. С. 36–38.
5. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства. М. : Иностр. лит., 1961. 232 с.
6. *Grochenig K.* Describing functions: atomic decompositions versus frames // Monat. Math. 1991. Vol. 112. P. 1–41.
7. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 2010. Т. 44, вып. 3. С. 50–62.

УДК 517.968.23

ТРЕХЭЛЕМЕНТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА КАРЛЕМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ

Н. Р. Перельман, К. М. Расулов

Смоленский государственный университет
E-mail: nataly@mannet.ru

Статья посвящена исследованию трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций. Получен конструктивный метод ее решения в единичном круге в случае, когда рассматриваемая задача не вырождается в двухэлементные краевые задачи без сдвига.

Ключевые слова: краевая задача, бианалитические функции, сдвиг Карлемана.

Three-Element Problem of Carleman Type for Bianalitic Functions in a Circle

N. R. Perelman, K. M. Rasulov

The article is devoted to the investigation of three-element boundary value problem of Carleman type for bianalytic functions. A constructive method for solution in a circle was found for the case when the problem was not reducible to a two-element boundary value problems without a shift.

Key words: boundary value problem, bianalytic functions, Carleman shift.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть T^+ — конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым контуром Ляпунова L. Для определенности будем полагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+. Рассматривается следующая краевая задача, впервые сформулированная в монографии [1].

Требуется найти все бианалитические функции $F(z)$ класса $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$, удовлетворяющие на L следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial F^+[\alpha(t)]}{\partial x} = G_{11}(t)\overline{\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}} + G_{12}(t)\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + g_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial F^{+}[\alpha(t)]}{\partial y} = -G_{21}(t)\overline{\frac{\partial F^{+}(t)}{\partial y}} + G_{22}(t)\frac{\partial F^{+}(t)}{\partial y} + ig_2(t), \tag{2}$$

где $G_{kj}(t), g_k(t)$ $(k=1,2,\ j=1,2)$ *— заданные на* L *функции класса* $H^{(1)}(L)$*, причем* $G_{k1}(t)\neq 0$ *на* L*;* $\alpha(t)$ *— прямой или обратный сдвиг контура* L*, удовлетворяющий условию Карлемана* $\alpha[\alpha(t)]=t$*, и такой, что* $\alpha'(t)\neq 0$*,* $\alpha(t)\in H^{(1)}(L)$*.*

Здесь множители (-1) перед $G_{21}(t)$ и i перед $g_2(t)$ в краевом условии (2) взяты для удобства в дальнейших обозначениях. Кроме того, без ограничения общности всюду в дальнейшем будем считать, что выполняется следующее «начальное условие»:

$$F(0)=0. \tag{3}$$

Следуя [1], сформулированную задачу назовем *первой основной трехэлементной задачей типа Карлемана для бианалитических функций* или, короче, *задачей* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$.

Основной целью настоящей работы является разработка конструктивного метода решения задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ в случае, когда $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ и $L=\{t:|t|=1\}$.

2. О РЕДУКЦИИ ЗАДАЧИ $K_{1,2}$ К ДВУМ ТРЕХЭЛЕМЕНТНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ТИПА КАРЛЕМАНА В КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Покажем, что в случае $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ легко *редуцируется* к двум хорошо известным *трехэлементным* краевым задачам в классах аналитических в T^{+} функций.

Действительно, так как (см., например, [1–3]) всякую бианалитическую в круге T^{+} функцию можно представить в виде

$$F(z)=\varphi_0(z)+\bar{z}\varphi_1(z), \tag{4}$$

где $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ — аналитические в T^{+} функции (называемые аналитическими компонентами функции $F(z)$), то с учетом того, что на окружности $L=\{t:\ |t|=1\}$ выполняется тождество $\overline{t}=1/t$ и в силу соотношений $\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial z}+\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}=i\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$ краевые условия (1) и (2) можно переписать так:

$$\Phi_k^{+}[\alpha(t)]=G_{k1}(t)\alpha(t)t\overline{\Phi_k^{+}(t)}+G_{k2}(t)\alpha(t)t^{-1}\Phi_k^{+}(t)+\alpha(t)g_k(t),\quad k=1,2, \tag{5}$$

где

$$\Phi_k^{+}(z)=z\frac{d\varphi_0(z)}{dz}+\frac{d\varphi_1(z)}{dz}+(-1)^{k-1}z\varphi_1(z),\quad k=1,2,\quad z\in T^{+}. \tag{6}$$

Очевидно, что каждое из равенств (5) (при фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие хорошо известной *трехэлементной задачи типа Карлемана относительно аналитической в круге* T^{+} *функции* $\Phi_k^{+}(z)$ [4, с. 295].

Предположим, что обе краевые задачи (5) разрешимы и уже найдены их общие решения, т. е. аналитические в круге T^{+} функции $\Phi_k^{+}(z)$, $k=1,2$. Поскольку функции $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $(k=1,2,$ $j=1,2)$ и $\alpha(t)$ принадлежат классу $H^{(1)}(L)$, то решения краевых задач (5) будут принадлежат классу $A(T^{+})\cap H^{(1)}(L)$ (см., например, [1, с. 82]).

Покажем теперь, как по уже найденным функциям $\Phi_k^{+}(z)$, $k=1,2$, можно получить решение исходной задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$. Так как всякое решение задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ можно искать в виде (4), то для получения любого решения $F(z)$ этой задачи достаточно найти его *аналитические компоненты*, т. е. функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$. Но в силу равенств (6) и с учетом (3) функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ можно определить по формулам:

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{2z}\left(\Phi_1^{+}(z)-\Phi_2^{+}(z)\right), \tag{7}$$

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{\varsigma}\left(\Phi_1^{+}(\varsigma)+\Phi_2^{+}(\varsigma)\right)+\frac{1}{\varsigma^3}\left(\Phi_1^{+}(\varsigma)-\Phi_2^{+}(\varsigma)\right)-\frac{1}{\varsigma^2}\left(\frac{d\Phi_1^{+}(\varsigma)}{d\varsigma}-\frac{d\Phi_2^{+}(\varsigma)}{d\varsigma}\right)\right]d\varsigma, \tag{8}$$

где Γ — произвольная гладкая кривая, принадлежащая кругу T^{+} и соединяющая точку 0 с произвольной точкой z этого круга.

Остается только установить условия, при которых функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, определяемые по формулам (7) и (8), будут принадлежать классу $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$, а значит, искомая бианалитическая функция $F(z)$ будет принадлежат классу $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ (см., например, [1, с. 26]).

Поскольку $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ являются аналитическими в круге T^+ функциями класса $A(T^+) \cap \cap H^{(1)}(L)$, то для них справедливы следующие разложения в степенные ряды:

$$\Phi_j^+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} z^k,$$

где $a_{j,k} = \dfrac{d^{(k)}\Phi_j^+(0)}{dz^k}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots$

Теперь нетрудно проверить, что функции $\varphi_0(z), \varphi_1(z)$, определяемые по формулам (7) и (8) соответственно, будут аналитическими в круге T^+ функциями класса $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} a_{1,0} - a_{2,0} = 0, \\ a_{1,0} + a_{2,0} - a_{1,2} + a_{2,2} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Итак, при выполнении условий (9) решение искомой задачи $K_{\mathbf{1,2}}$ можно получить по формуле (4), где $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ — аналитические в круге T^+ функции, определяемые по формулам (7) и (8) соответственно.

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ *и* $\alpha(t)$, $G_{kj}(t)$, $g_k(t)$ $(k = 1, 2;\ j = 1, 2)$ *принадлежат классу* $H^{(1)}(L)$. *Тогда решение задачи* $K_{\mathbf{1,2}}$ *в классе* $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ *бианалитических функций сводится к решению двух трехэлементных краевых задач вида* (5) *в классе аналитических функций* $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$. *При этом задача* $K_{\mathbf{1,2}}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы две краевые задачи вида* (5), *и для их решений выполняются условия* (9).

3. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ $K_{\mathbf{1,2}}$ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

В силу теоремы 1 для построения метода решения задачи $K_{\mathbf{1,2}}$ в классе бианалитических функций в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ достаточно решить две трехэлементные задачи типа Карлемана вида (5) относительно аналитических в круге T^+ функций $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$.

Известно (см., например, [4, с. 295]), что каждая трехэлементная задача вида (5) (при фиксированном значении параметра k) вырождается в двухэлементную краевую задачу вида

$$A_k(t)\Phi_k^+(t) = B_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + H_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{10}$$

при выполнении следующих условий:

$$A_k(t) \neq 0, \quad B_k(t) \neq 0, \quad H_k(t) \neq 0, \quad t \in L, \quad k = 1, 2, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} A_k(t) = 1 - G_{k1}[\alpha(t)]G_{k1}(t) - G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k2}(t)}, \\ B_k(t) = t^2 \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]G_{k2}(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{G_{k1}(t)} \right\}, \\ H_k(t) = t \cdot \left\{ G_{k1}[\alpha(t)]g_k(t) + G_{k2}[\alpha(t)]\overline{g_k(t)} + g_k[\alpha(t)] \right\}, \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{12}$$

Всюду в дальнейшем случай, когда для коэффициентов краевых условий (1) и (2) задачи $K_{\mathbf{1,2}}$ выполняются условия (11), мы будем называть *вырожденным*.

Далее построим алгоритм решения задачи $K_{\mathbf{1,2}}$ в вырожденном случае.

Вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в области $T^- = \overline{C} \backslash (T^+ \cup L)$ (здесь $\overline{C}$ — расширенная комплексная плоскость) функции вида (см. также [3, с. 290])

$$\Phi_k^-(z) = \overline{\Phi_k^+(1/z)}, \quad z \in T^-, \quad k = 1, 2, \tag{13}$$

из (10) будем иметь:

$$\Phi_k^+(t) = Q_k(t)\Phi_k^-(t) + q_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{14}$$

где $Q_k(t) = B_k(t)/A_k(t)$, $q_k(t) = H_k(t)/A_k(t)$.

Замечание 1. Здесь мы учли, что граничные значения функций $\Phi_k^-(z)$, $k = 1, 2$, определенных по формулам (13), на окружности $L = \{t: \ |t| = 1\}$ удовлетворяют следующим условиям «симметрии»:

$$\Phi_k^+(t) = \overline{\Phi_k^-(t)}, \quad t \in L, \quad k = 1, 2. \tag{15}$$

Равенство (14) (при фиксированном значении параметра k) представляет собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\Phi_k(z) = \{\Phi_k^+(z),\ \Phi_k^-(z)\}$ с линией скачков L.

Пусть $\chi_k = \operatorname{Ind} Q_k(t)$ — индекс задачи Римана (14). Тогда, как известно (см., например, [3, 5]), при $\chi_k \geq 0$ задача Римана (14) (при каждом фиксированном значении параметра k) безусловно разрешима, и ее общее решение задается в виде

$$\Phi_k^{\pm}(z) = X_k^{\pm}(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q_K(\tau)}{X_k^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + P_{\chi_k}(z)\right], \quad z \in T^{\pm}, \tag{16}$$

где $X_k^+(z)$ и $X_k^-(z)$ — канонические функции задачи (14), а $P_{\chi_k}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше χ_k. Если же $\chi_k < 0$, то при выполнении $-\chi_k - 1$ условий разрешимости вида

$$\int\limits_L \frac{q_k(\tau)}{X_k^+(\tau)}\tau^{s-1}d\tau = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\chi_k - 1,$$

единственное решение задачи Римана (14) также задается формулой (16), где нужно положить $P_{\chi_k}(z) \equiv 0$.

Наконец, выбрав среди полученных решений задачи Римана (14) лишь те, граничные значения которых удовлетворяют условиям «симметрии» (15), определим функции $\Phi_k^+(z)$, являющиеся решениями краевой задачи (10). Отсюда с учетом теоремы 1 по формулам (4), (7) и (8) получим решение исходной задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ [6, 7].

Таким образом, при выполнении условий (11), получаем следующий алгоритм решения задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$:

1. Сначала краевые условия (1) и (2) задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ приводим к виду (10) и переходим к следующему пункту.

2. Вводя в рассмотрение вспомогательные функции вида (13), переписываем равенства (10) в виде краевых условий двух скалярных задач Римана (14) и переходим к следующему пункту.

3. Решаем задачи Римана (14). Если хотя бы одна из задач Римана (14) неразрешима, то неразрешима и исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$. Если же обе задачи Римана (14) разрешимы, то находим решения этих задач и переходим к следующему пункту.

4. Для полученных решений задач Римана (14) проверяем выполнение условий «симметрии» (15). Если хотя бы при одном значении параметра k не выполняется равенство вида (15), то исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ неразрешима. Если же выполняются оба равенства (15), то используя функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$, найденные по формулам (16) и удовлетворяющие условиям (15), находим решения исходной задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ по формулам (4), (7) и (8).

Из сказанного выше следует, что в *вырожденном* случае для задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ *и выполняются условия* (11). *Тогда решение задачи* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *в классе* $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ *бианалитических функций сводится к решению двух скалярных задач Римана* (14) *в классе* $A(T^{\pm}) \cap H^{(1)}(L)$, *ограниченных на бесконечности кусочно-аналитических функций* $\Phi_k(z) = \{\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)\}$ *с линией скачков* L. *При этом задача* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи Римана* (14), *а также для их решений выполняются условия «симметрии»* (15) *и условия* (9).

Замечание 2. Как видно из равенств (10), для более полного исследования задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$, кроме вырожденного случая, целесообразно рассмотреть еще следующие три важных случая:

1) либо выполняются условия (невырожденный случай)

$$A_k(t) \equiv 0, \quad B_k(t) \equiv 0, \quad H_k(t) \equiv 0, \quad t \in L, \quad k = 1, 2; \tag{17}$$

2) либо выполняются условия (первый полувырожденный случай)

$$\begin{cases} A_1(t) \equiv 0, \quad B_1(t) \equiv 0, \quad H_1(t) \equiv 0, \quad t \in L, \\ A_2(t) \neq 0, \quad B_2(t) \neq 0, \quad H_2(t) \neq 0, \quad t \in L; \end{cases}$$

3) либо выполняются условия (второй полувырожденный случай)

$$\begin{cases} A_1(t) \neq 0, \quad B_1(t) \neq 0, \quad H_1(t) \neq 0, \quad t \in L, \\ A_2(t) \equiv 0, \quad B_2(t) \equiv 0, \quad H_2(t) \equiv 0, \quad t \in L. \end{cases}$$

Как было установлено в работе [8], методы решения трехэлементной задачи вида (5) в классах аналитических функций в *невырожденном случае* существенно зависят от характера функции сдвига $\alpha(t)$. Поэтому в *невырожденном случае* нужно отдельно построить алгоритмы решения задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ в зависимости от того, является ли сдвиг $\alpha(t)$ прямым или обратным. В настоящей работе ограничимся построением алгоритма решения задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ в случае, когда $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ В НЕВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ И ОБРАТНОМ СДВИГЕ КОНТУРА

Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L, и выполняются условия (17). Ясно, что при выполнении условий (17) трехэлементные краевые задачи вида (5), вообще говоря, не приводятся к двухэлементным краевым (т. е. трехэлементные краевые задачи вида (5) не «вырождаются» в двухэлементные краевые задачи). Поэтому в силу теоремы 1 здесь возникает необходимость построения алгоритмов решения для двух невырожденных трехэлементных краевых задач вида (5) (при каждом фиксированном значении параметра k) в классах аналитических в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функций.

Далее, для решения трехэлементных краевых задач вида (5) в невырожденном случае воспользуемся методами, разработанными в статье К. М. Расулова [8].

Сначала, вводя обозначения

$$a_k(t) = G_{k2}(t)\alpha(t)t^{-1}, \quad b_k(t) = G_{k1}(t)\alpha(t)t, \quad h_k(t) = \alpha(t)g_k(t),$$

перепишем краевые условия (5) в более компактном виде

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + b_k(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + h_k(t), \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

Известно (см., например, [5, с. 296]), что из условий (17) с учетом (12) следует, что всюду на контуре L выполняется одно из следующих условий:

$$|a_k(t)| > |b_k(t)|, \quad |a_k(t)| < |b_k(t)|, \quad k = 1, 2. \tag{19}$$

В силу неравенств (19) (т. е. при выполнении условий (17)) трехэлементную задачу вида (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) нужно исследовать отдельно в следующих двух случаях: $a_k(t) \neq 0$ на L и $b_k(t) \neq 0$ на L.

Для определенности всюду в дальнейшем рассмотрим случай, когда $a_k(t) \neq 0$ на L (случай $b_k(t) \neq 0$ на L исследуется совершенно аналогично).

Итак, требуется решить трехэлементную задачу вида (18) (для каждого фиксированного значения параметра k) при следующих предположениях:

1) $\alpha(t)$ — обратный сдвиг контура L;

2) на контуре L выполняются условия (17);

3) во всех точках L выполняется условие

$$a_k(t) \neq 0. \tag{20}$$

Как показано в работе [8], при выполнении условия (20) для полного исследования трехэлементной задачи (18) нужно отдельно рассматривать следующие три подслучая (см. также [5, с. 142]):

а) $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0$;

б) $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0, t \in L$;

в) когда выражение $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$ обращается в нуль в отдельных точках контура L (как, например, в случае $\alpha(t) = 1/t$, $a_k(t) = t^2 - 2$, $b_k(t) = \sqrt{2}\,(t - 1/t)$ и $h_k(t) \equiv 0$).

Сразу отметим, что при выполнении условий (17) из тождества $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0$ вытекает $b_k(t) \equiv 0$. Следовательно, в подслучае а) трехэлементная краевая задача (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) равносильна известной (см., например, [5, § 13]) *двухэлементной* краевой задаче Карлемана вида

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = a_k(t)\Phi_k^+(t) + h_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{21}$$

т. е. в данном подслучае *трехэлементная* задача (18) снова вырождается в хорошо известную *двухэлементную* краевую задачу (21).

Таким образом, в случае выполнения условий $a_k[\alpha(t)]\cdot a_k(t)-1 \equiv 0$, $k = 1, 2$, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ *и выполняются условия* (17) *и* $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \equiv 0$, $k = 1, 2$. *Тогда решение задачи* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *в классе* $A_2(T^+) \cap H^{(2)}(L)$ *бианалитических функций сводится к решению двух скалярных задач Карлемана* (21) *в классе* $A(T^+) \cap H^{(1)}(L)$ *аналитических в круге* T^+ *функций. При этом задача* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *разрешима тогда и только тогда, когда одновременно разрешимы обе краевые задачи Карлемана* (21), а *также для их решений выполняются условия* (9).

Рассмотрим далее подслучай б), т. е. пусть $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0, t \in L$. Тогда (в силу (17)) будем иметь: $b_k(t) \neq 0$ всюду на L. Поэтому краевое условие (18) (при каждом фиксированном значении параметра k) в данном случае можно переписать в виде

$$\Phi_k^+(t) = W_{k1}(t)\overline{\Phi_k^+(t)} + W_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)] + f_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{22}$$

где

$$W_{k1}(t) = -\frac{b_k(t)}{a_k(t)}, \quad W_{k2}(t) = \frac{1}{a_k(t)}, \quad f_k(t) = -\frac{q_k(t)}{a_k(t)}.$$

Далее для решения трехэлементной задачи (22) (при каждом фиксированном k) применим алгоритм, разработанный в статье [8]. А именно, вводя в рассмотрение вспомогательные аналитические в области T^- функции вида (13), перепишем равенства (22) так:

$$\Phi_k^+(t) = W_{k1}(t)\Phi_k^-(t) + \rho_k(t), \quad k = 1, 2, \tag{23}$$

где

$$\rho_k(t) = W_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)] + f_k(t). \tag{24}$$

Если временно считать $\rho_k(t)$ известной функцией, то равенство (23) (при каждом фиксированном значении параметра k) будет представлять собой краевое условие скалярной задачи Римана относительно ограниченной на бесконечности кусочно-аналитической функции $\varphi_k(z) = \{\Phi_k^+(z),\ \Phi_k^-(z)\}$ с линией скачков L.

Пусть $\chi_k = \operatorname{Ind} W_{k1}(t) \geq 0$. Тогда задача Римана (23) безусловно разрешима и ее общее решение можно задавать формулами (см., например, [2, с. 112]):

$$\Phi_k^+(z) = \frac{X_k^+(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\rho_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_k^+(z)P_{\chi_k}(z), \quad z \in T^+, \tag{25}$$

$$\Phi_k^-(z) = \frac{X_k^-(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\rho_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X_k^-(z) P_{\chi_k}(z), \quad z \in T^-, \tag{26}$$

где $X_k^{\pm}(z)$ — *канонические функции* задачи Римана (23), а $P_{\chi_k}(z)$ — произвольный многочлен степени не выше χ_k.

Если же $\chi_k = \operatorname{Ind} W_{k1}(t) < 0$, то при выполнении следующих $-\chi_k - 1$ условий разрешимости

$$\int\limits_L \frac{W_{k2}(t)\Phi_k^+[\alpha(t)]}{X_k^+(t)} t^{k-1} dt = -\int\limits_L \frac{\rho_k(t)}{X_k^+(t)} t^{k-1} dt, \quad k = 1, 2, \ldots, -\chi_k - 1, \tag{27}$$

единственное решение задачи Римана (23) также задается формулами (25), (26), где нужно положить $P_{\chi_k}(z) \equiv 0$.

Далее, из формул (25) и (26) с учетом обозначений (24), формул Сохоцкого (см., например, [2, с. 38]) и равенства (см., например, [2, с. 40])

$$\frac{1}{2}\Phi_k^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\Phi_k^+(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

находим предельные значения $\Phi_k^+(z), \Phi_k^-(z)$ при $z \to t \in L$:

$$\Phi_k^+(t) = \int\limits_L K_k^+(t,\tau)\Phi_k^+[\alpha(\tau)] d\tau + q_k^+(t), \quad t \in L, \tag{28}$$

$$\Phi_k^-(t) = \frac{1}{b_k(t)}\Phi_k^+[\alpha(t)] + \int\limits_L K_k^-(t,\tau)\Phi_k^+[\alpha(\tau)] d\tau + q_k^-(t), \quad t \in L, \tag{29}$$

где

$$K_k^+(t,\tau) = \frac{X_k^+(t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{a_k(\tau) X_k^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{a_k(t) X_k^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right),$$

$$K_k^-(t,\tau) = \frac{X_k^-(t)}{2\pi i} \left(\frac{1}{a_k(\tau) X_k^+(\tau)} \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{a_k(t) X_k^+(t)} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} \right),$$

$$q_k^+(t) = \frac{1}{2} f_k(t) + \frac{X_k^+(t)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X_k^+(t) P_{\chi_k}(t),$$

$$q_k^-(t) = -\frac{a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t)}{2\overline{a_k(t)} \cdot b_k[\alpha(t)]} f_k(t) + \frac{X_k^-(t)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f_k(\tau)}{X_k^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + X_k^-(t) P_{\chi_k}(t).$$

Нетрудно проверить (см. [8]), что при сделанных выше предположениях относительно функции сдвига $\alpha(t)$ и коэффициентов $G_{kj}(t), g_k(t)$ $(k = 1, 2; j = 1, 2)$ краевых условий (1)–(2) будем иметь: $K_k^+(t,\tau)$, $K_k^-(t,\tau) \in H_*^{(1)}(L \times L)$, а функции $q_k^+(t)$, $q_k^-(t) \in H^{(1)}(L)$.

Потребуем теперь от функций, задаваемых формулами (25), (26) (т. е. от решений задачи Римана (23)), чтобы их граничные значения удовлетворяли условию «симметрии» вида (15). В силу формул (28) и (29) условие (15) равносильно следующему интегральному уравнению типа Фредгольма:

$$(N_k \nu_k)(t) \equiv \nu_k(t) + \int\limits_L n_{k1}(t,\tau)\nu_k(\tau) d\tau - \overline{\int\limits_L n_{k2}(t,\tau)\nu_k(\tau) d\tau} = r_k(t), \tag{30}$$

где $r_k(t) = b_k(t)[\overline{q_k^+(t)} - q_k^-(t)]$, $n_{k1}(t,\tau) = b_k(t) K_k^-(t,\tau)$, $n_{k2}(t,\tau) = \overline{b_k(t)} K_k^+(t,\tau)$, $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$.

Введем в рассмотрение однородное интегральное уравнение, союзное с уравнением (30) (см. также [5, с. 365]):

$$(N_k' \mu_k)(t) \equiv \mu_k(t) + \int\limits_L n_{k1}(\tau,t)\mu_k(\tau) d\tau - \int\limits_L n_{k2}(\tau,t) \overline{\mu_k(\tau) d\tau} = 0. \tag{31}$$

Известно (см., например, [5, с. 370]), что для разрешимости неоднородного интегрального уравнения (30) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\mathrm{Re}\int\limits_L r_k(t)\mu_{kj}(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{32}$$

где $\mu_{k1}(t), \mu_{k2}(t), \dots, \mu_{km}(t)$ — полная система линейно независимых (над полем $\mathbf{R}$) решений однородного уравнения (31).

Замечание 3. Здесь важно отметить, что если $\chi_k = \mathrm{Ind}\, W_{k1}(t) \geq 0$, то некоторые из условий разрешимости (32) можно удовлетворить за счет определенного выбора значений произвольных постоянных, входящих в выражение $r_k(t)$.

Предположим, что интегральное уравнение (30) разрешимо (т. е. выполняются условия (32)) и $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$ — его общее решение. Тогда, подставив функцию $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$ в правые части формул (25) и (26), мы получим решения задачи Римана (23), удовлетворяющие условию «симметрии» (15).

Наконец, чтобы выделить среди решений $\Phi_k^+(z)$ задачи Римана (23), удовлетворяющих условию (15), функции, являющиеся решениями исходной трехэлементной задачи (18), нужно еще потребовать, чтобы для граничных значений $\Phi_k^+(t)$ этих решений выполнялось следующее равенство:

$$\Phi_k^+[\alpha(t)] = \nu_k(t), \quad t \in L, \tag{33}$$

где $\nu_k(t)$ — решения интегрального уравнения (30). Но в силу (28) равенство (33) равносильно тому, что функции $\Phi_k^+(t) = \nu_k[\alpha(t)]$ являются решениями интегрального уравнения

$$\nu_k[\alpha(t)] = \int\limits_L K_k^+(t,\tau)\nu_k(\tau)d\tau + q_k^+(t), \quad t \in L. \tag{34}$$

Другими словами, условие (33) равносильно тому, что некоторые решения $\tilde{\nu}_k(t)$ интегрального уравнения (30) являются также решениями и уравнения (34).

Таким образом, для решения задачи $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ в рассматриваемом случае можно использовать следующий алгоритм:

1. Решая интегральное уравнение (30) (при каждом фиксированном значении параметра k), в случае его разрешимости определяем функции $\nu_k(t) = \Phi_k^+[\alpha(t)]$, $k = 1, 2$, и переходим к пункту 2. Если же хотя бы при одном значении параметра k интегральное уравнение (30) неразрешимо, то исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ также неразрешима.

2. Среди решений интегрального уравнения (30) (при каждом фиксированном значении параметра k) выбираем только те функции $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$, которые являются и решениями интегрального уравнения (34) и переходим к пункту 3. Если же ни одно решение уравнения (30) не удовлетворяет уравнению (34), то исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ неразрешима.

3. Если $\chi_k = \mathrm{Ind}\, W_{k1}(t) \geq 0$, то, поставив найденные в пункте 2 функции вида $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$ в выражения для плотности $\rho_k(t) = W_{k2}(t)\tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)] + f_k(t)$ интегралов типа Коши в формулах (25) и (26), находим решения трехэлементной задачи (18). Если же $\chi_k = \mathrm{Ind}\, W_{k1}(t) < 0$, то сначала отбираем среди функций $\tilde{\nu}_k(t) = \tilde{\Phi}_k^+[\alpha(t)]$, найденных в пункте 2, только те, которые удовлетворяют еще условиям (27), а затем, подставив эти функции в правую часть формул (25) и (26), находим все решения трехэлементной задачи (18).

Итак, в данном случае с учетом теоремы 1 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha(t)$ *— обратный сдвиг контура* L *и всюду на этом контуре выполняются условия* (17) *и* $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1 \neq 0$, $k = 1, 2$, $t \in L$. *Тогда решение задачи* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *сводится к последовательному решению двух интегральных уравнений вида* (30) *и двух интегральных уравнений вида* (34), *а также двух скалярных задач Римана вида* (23). *При этом для разрешимости задачи* $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$ *необходимо и достаточно, чтобы были одновременно разрешимы все четыре интегральные уравнения* (30) *и* (34), *а также две скалярные задачи Римана* (23) *и, кроме того, для решений задач Римана* (23) *выполнялись условия* (9).

В заключение отметим, что в случае, когда выражение $a_k[\alpha(t)] \cdot a_k(t) - 1$ ($k = 1, 2$) обращается в нуль в отдельных точках контура L, трехэлементные задачи вида (18) (а значит, и исходная задача $K_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$) пока остаются не исследованными.

Библиографический список

1. *Расулов К. М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос пед. ун-та, 1998. 345 с.
2. *Балк М. Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Сер. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. 1991. Т. 85. С. 187–246.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.
4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М. : Наука, 1977. 448 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968. 511 с.
6. *Перельман Н. Р.* Трехэлементная задача типа Карлемана для трианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : СмолГУ, 2007. Вып. 8. С. 171–180.
7. *Расулов К. М., Титов О. А.* О решении одной трехэлементной краевой задачи типа Карлемана для бианалитических функций в круге // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. Смоленск : Изд-во Смоленск. гос пед. ун-та, 2004. Вып. 5. С. 153–159.
8. *Расулов К. М.* Трехэлементная односторонняя краевая задача со сдвигом Карлемана в классах аналитических функций в круге // Изв. Смоленск. гос. ун-та. 2008. № 2. С. 94–104.

УДК 512.554+512.643

ОБ ИДЕМПОТЕНТАХ АЛГЕБРЫ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В. Б. Поплавский

Саратовский государственный университет
E-mail: poplavskivb@mail.ru

Изучается строение идемпотентных матриц с элементами из произвольной булевой алгебры в частичных полугруппах матриц произвольных размеров с конъюнктным и дизъюнктным частичным произведением. Показана связь разрешимости простейших матричных уравнений с некоторыми видами идемпотентных матриц, названных в статье вторичными идемпотентами. Также указывается связь произвольных идемпотентов со вторичными и изучаются их свойства.

Ключевые слова: булевы матрицы, матричные уравнения, идемпотенты.

On Idempotents of Algebra of Boolean Matrices

V. B. Poplavski

The structure of idempotent matrices in partial semigroups of matrices of arbitrary sizes with elements from arbitrary Boolean algebra with conjunctive and disjunctive partial multiplications is investigated. The connection of solvability of the simplest matrix equations with some kind of idempotent matrices which are called «secondary idempotents» is shown. Also we show the connection of arbitrary idempotent matrices with secondary idempotents and investigate their properties.

Keywords: Boolean matrices, matrix equations, idempotents.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\langle \mathbf{B}_{m\times n}, \cup, \cap, ', O, I\rangle$ есть булева алгебра $m \times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$. Операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, дополнения $'$ и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Матрицы O и I, образованные целиком из нулей (0) и единиц (1) соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры.

Определение 1. Матрицу $C = A \sqcap B \in \mathbf{B}_{m\times k}$ с элементами $C^i_j = \bigcup_{t=1}^n (A^i_t \cap B^t_j)$ назовём *конъюнктным произведением* матриц согласованных размеров $A = (A^i_j) \in \mathbf{B}_{m\times n}$ и $B = (B^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times k}$. *Дизъюнктное произведение* $A \sqcup B$ определяется дуальным образом: $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ или $(A \sqcup B)' = A' \sqcap B'$.

Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 1. *Если булевы матрицы A, B, C таких размеров, что операции умножения этих матриц определены, то имеют место следующие формулы:*

1. $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$; 2. $A \sqcap E = A, \quad E \sqcap A = A$;
3. $A \sqcap O = O, \quad O \sqcap A = O$; 4. $(A \sqcap B)^T = B^T \sqcap A^T$;
5. $A \sqcap (B \cup C) = (A \sqcap B) \cup (A \sqcap C), \qquad (A \cup B) \sqcap C = (A \sqcap C) \cup (B \sqcap C)$;