Библиографический список

1. *Ульянова Е.Л.* Спектральный анализ нормальных операторов, возмущенных относительно конечномерным: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 1998.
2. *Хромов А.П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Математ. сб. 1981. Вып. 114(156), № 3. С.375-405.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

УДК 512.56

ОБЕРТОНЫ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В.Б. Поплавский

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
poplavskivb@mail.ru

Рассматриваются закономерности функционирования систем с конечным числом элементов, на которых заданы булевы бинарные отношения различных типов. Проводится построение квадратных матриц над произвольной булевой алгеброй, определяющих некоторое булево бинарное отношение, порождающее циклическую полугруппу с максимальным индексом и периодом. Циклирование системы с конечным числом элементов, называемой осциллятором, сопровождается появлением серии подпоследовательностей (обертонов) в последовательности булевых элементов, стоящих на главной диагонали степеней соответствующей булевой матрицы. В работе указаны примеры таких обертонов для булевых матриц небольших размеров.

Overtones of Oscillatory Boolean Matrices

V. B. Poplavski

We consider a functioning property of a system with a finite set of elements and with different kinds of Boolean binary relations on it. We also construct the square matrices over arbitrary Boolean algebra which determine some Boolean binary relation and generate a cyclic semigroup with the maximum index and period. The looping of the system with a finite set of elements called an oscillator, is accompanied by appearing of subsequences (overtones) in a sequence of elements on the main diagonal of powers of a relevant Boolean matrix. Examples of such overtones of Boolean matrices of small sizes are shown in the paper.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $A = A(M, g, v)$ есть произвольная булева алгебра с нулевым и единичным (универсальным) элементами Ø и I соответственно. Всякое отображение $\varphi : M \times M \to B$ упорядоченных пар элементов некоторого множества M в B называется *булевым бинарным* отношением на множестве M. Ясно, что булево бинарное отношение является обобщением известного понятия «бинарное отношение», которое сводится к выбору двухэлементной булевой алгебры $B_2 = \{Ø, I\}$.

В случае конечности множества M его элементы можно пронумеровать натуральными числами от 1 до n. Тогда элементы B, которые ставятся в соответствие паре элементов из M с номерами i и j ($i, j = 1,\dots,n$), образуют квадратную булеву матрицу. Совершенно ясно, что смена нумерации элементов в базовом множестве M приводит к одновременной перестановке строк и столбцов матрицы A. Таким образом, данное булево бинарное отношение определяет некоторую булеву матрицу A с точностью до таких перестановок.

То, что элементы некоторой булевой алгебры составляют некую матрицу A, будем записывать $A = (A_j^i)$. Верхний индекс элемента матрицы обозначает номер строки, а нижний – номер столбца.

Очевидно, что такие матрицы одного и того же размера вновь образуют булеву алгебру $\langle \mathrm{B}_{n\times n}, \cup, \cap, ', O, J \rangle$, операции которой определяются для матриц поэлементно, поэтому отношение включения $\subset$ (частичного порядка) также для матриц определяются поэлементно. Нулем и универсальным элементом такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J, образованные только из нулей Ø и единиц I соответственно, то есть $O_j^i = Ø$, $J_j^i = \mathrm{I}$ для всех i и j.

Произведение (конъюнктное) матриц A и B определяется как матрица $C = A \prod B$ того же размера, элементы которой вычисляются по формуле $C_j^i = \bigcup_{t=1}^{n} (A_t^i \cap B_j^t)$. Можно дуальным образом определить дизъюнктное произведение матриц $C = A \coprod B = (A' \prod B')'$, но так как далее будут рассматриваться только конъюнктные степени $A^k = \prod_{i=1}^{k} A = \overbrace{A\prod \ldots \prod A}^{k\ \text{раз}}$, то именно конъюнктное произведение и конъюнктную степень будем иметь в виду под терминами «произведение» и «степень» булевых матриц. Будем считать также, что $A^0 = E$.

Множество квадратных булевых матриц $B_{n\times n}$ относительно произведения образует структурно упорядоченную полугруппу с единицей $E = (\delta^i_j)$, где δ^i_j принимает значение I, если $i=j$, и значение $\varnothing$, если $i \neq j$. Чтобы не перечислять свойства этой полугрупповой операции с булевыми матрицами, сошлемся на работы [1,2].

Переставляя столбцы (или строки) в единичной матрице E некоторым образом получаем матрицу P, которую естественно назвать перестановкой. Так как матрица $P\prod A$ получается из матрицы A соответствующей перестановкой строк, а $A\prod P^T$ (T обозначает транспонирование матрицы) получается из матрицы A такой же перестановкой столбцов, то, как было замечено, булево бинарное отношение на конечном множестве определяет множество булевых матриц $P\prod A\prod P^T$, где матрицы P пробегают всю группу n-перестановок. В силу равенства $P\prod P^T = E$, отношение $(A \approx B) \leftrightarrow (\exists P)(P\prod A\prod P^T = B)$ является эквивалентностью булевых матриц из $B_{n\times n}$, каждый класс которой можно считать булевым отношением на M, определяемым некоторой булевой матрицей A.

Далее будут обсуждаться вопросы, связанные со степенями булевых матриц, которые, заметим, удовлетворяют $(P\prod A\prod P^T)^k = P\prod A^k\prod P^T$, что делает возможным разговор о степени булевой матрицы как о степени отношения, определяемого булевой матрицей A.

Назовем конечное множество M с заданным на нем булевым отношением, представляемым булевой матрицей A, *конечной системой элементов с отношением A*.

Степень A^k булевой матрицы A порядка k представляет отношение, появляющееся в результате «наложения» или влияния отношения A на себя, после его применения в этой системе k раз. Это, по-видимому, можно назвать результатом функционирования данной системы на k-м шаге. В данной работе рассматриваются закономерности функционирования произвольных конечных систем и возникновение волн в таких системах. Оказывается, что функционирование конечных систем начинается с некоторого этапа вхождения в цикл (хаоса!) с последующим возникновением волн в таких системах или стационарного состояния как частного случая волнового. Более того, такое вхождение и дальнейшее циклирование системы, называемой *осциллятором* [3,4], сопровождается появлением обертонов на главной диагонали степеней A^k. Здесь же указаны максимальные возможные значения показателя степени вхождения системы в цикл (циклическая глубина или индекс) и возможные значения длин этих циклов (периодов) для различных квадратных булевых матриц над произвольной булевой алгеброй. Рассматриваются закономерности функционирования конечных систем с рефлексивными, обратимыми, нильпотентными и другими отношениями. Проводится построение булевых отношений с максимальным индексом и периодом.

Важность этой темы обусловливается широким применением теории циклических полугрупп степеней булевых матриц (теории асимптотических форм булевых матриц) в методологии тестирования, кластеринге (разбиении совокупности на группы), диффузии информации, в исследовании коммуникационных сетей, контактных схем, конечных автоматов, теории чисел, математической статистики и пр. Это нашло место в социологии, биологии, медицине, физике и компьютерных науках. Перечень таких примеров применения и соответствующей литературы можно найти в [3]. Этим объясняется и большое количество работ математиков по теории асимптотических форм, на некоторые и важнейшие, на наш взгляд, мы ссылаемся в данной статье. Хороший обзор этой проблемы для булевых матриц над алгеброй B_2 и неотрицательных матриц можно найти в [5], [3].

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВОЙ МАТРИЦЫ

В теории полугрупп множество степеней $\{A, A^2, A^3, \ldots\}$ называют *циклической полугруппой* [6], порожденной элементом A. Имеются две возможности: (1) все степени для любого натурального k

различны между собой или (2) найдутся такие натуральные k_0 и k_1 ($k_0 < k_1$), что $A^{k_0} = A^{k_1}$. В первом случае говорят о бесконечном порядке в циклической полугруппе. Для нашего случая, когда A является булевой матрицей, он не имеет места. Это происходит в силу того что конечное число элементов образует данную матрицу и, следовательно, с помощью булевых операций из них можно образовать только конечное число матриц, в частности, степеней матрицы A. Таким образом, имеет место второй случай – случай *конечной циклической полугруппы*.

Пусть натуральные k_0 и k_1 ($k_0<k_1$), для которых соответствующие степени удовлетворяют равенству $A^{k_0} = A^{k_1}$, выбраны наименьшими. Тогда, обозначая $k_0 – k_1 = C$, получаем $A^{k_0} = A^{k_0+C}$. Умножая последнее равенство на A^t, получаем

$$A^{k_0+t} = A^{k_0+C+t},$$

в частности

$$A^{k_0} = A^{k_0+C} = A^{k_0+2C} = A^{k_0+3C} = \ldots = A^{k_0+mC} = \ldots$$

для любого натурального m. Поэтому показатель s каждой степени матрицы A порядка, превышающего число $k_0 + C – 1$, может быть представлен как $s = k_0 + mC + s_0$, где $0 \le s_0 \le C-1$, и m – некоторое положительное целое. Получаем

$$A^s = A^{k_0+mC+s_0} = A^{k_0+s_0},\ 0 \le s_0 \le C-1,$$

то есть каждая степень матрицы A, начиная с k_0 и далее, есть матрица из множества матриц $\{A^{k_0}, \ldots, A^{(k_0+C-1)}\}$.

Таким образом, конечная циклическая полугруппа степеней произвольной булевой матрицы A состоит из ($k_0 + C – 1$) матриц:

$$\{A, A^2, \ldots, A^{k_0}, \ldots, A^{(k_0+C-1)}\}.$$

При этом очевидно, что матрицы $\{A^{k_0}, \ldots, A^{(k_0+C-1)}\}$ образуют циклическую группу порядка C.

Число k_0 называется *индексом*, а число C – *периодом* булевой матрицы A и циклической полугруппы степеней этой матрицы.

В литературе вместо понятия «индекс» иногда употребляют термин «циклическая глубина» [7]. В случае, когда период равен единице, используют названия «индекс сходимости» и «характеристическая экспонента» [8], или просто «экспонента». При этом булева матрица A называется *сходящейся к пределу* A^{k_0}. Когда период булевой матрицы больше единицы, ее называют *осцилляторной*, или *периодической*.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Прежде чем будут сформулированы предложения, которые проясняют некоторые замечательные свойства индексов периодов таких матриц, укажем на следующие свойства степеней произвольной булевой $n\times n$-матрицы:

$$A^k \subset \bigcup_{p=0}^{n-1} A^p = E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{n-1}, \text{ для всех } k \ge n; \tag{1}$$

$$A^k \subset A^{k+p\cdot n!}, \text{ для всех } k \ge n \text{ и } p \ge 1; \tag{2}$$

$$\bigcup_{p=0}^{\infty} A^p = E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{n-1} = (E \cup A)^{n-1}; \tag{3}$$

$$A^k \subset A^r \cup A^{r+1} \cup \ldots \cup A^{r+n-1} = A^r \prod (E \cup A)^{n-1}, \text{ для всех } k \ge r. \tag{4}$$

Доказательство справедливости этих формул можно найти, например в работах [2, 8]. Однако получим эти формулы, восполнив, на наш взгляд, некоторые рассуждения автора статьи [2]. Причем покажем, что (1), (3) и (4) есть эквивалентные свойства булевых матриц.

Элементы $n\times n$-матрицы A^k определяются объединением $(A^k)^i_j = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} (a^i_{i_1} \cap a^{i_1}_{i_2} \cap \ldots \cap a^{i_k}_j)$, в котором каждый одночлен $(a^i_{i_1} \cap a^{i_1}_{i_2} \cap \ldots \cap a^{i_k}_j)$ определяется набором индексов $(i, j_1, \ldots, i_k, j)$. Среди индексов

$(i_0,j_1, \ldots, i_k)$, где $i = i_0$, в случае $k \geq n$ должны встретиться одинаковые индексы. Допустим $i_s = i_t = r$ $0 \leq s \leq t \leq k$. Тогда

$$(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) = (a_{i_1}^{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \ldots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}). \qquad (5)$$

Удобно считать $(a_{i_1}^{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) = I$ или $(a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) = I$ в случаях значений $s = 0$, $t = k$.

Полученное равенство (5) дает, во-первых, включение

$$(a_{i_1}^i \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) \subset (a_{i_1}^i \cap \ldots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) \subset (A^{k-(t-s)})_j^i \subset \bigcup_{p=1}^{k} (A^{k-p})_j^i,$$

в котором мы избавились от зависимости t и s от выбранного одночлена $(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k})$, и, следовательно, получаем $(A^k)_j^i \subset \bigcup_{p=1}^{k} (A^{k-p})_j^i$, то есть $A^k \subset \bigcup_{p=1}^{k} A^{k-p} = E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{k-1}$. Так как последнее справедливо для всех $k \geq n$, то можно записать

$$A^n \subset E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{n-1},$$
$$A^{n+1} \subset E \cup A \cup \ldots \cup A^{n-1} \cup A^n \subset E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{n-1}$$

и так далее, что доказывает (1).

Во-вторых, равенство (5) дает выражение

$$(a_{i_1}^{i_0} \cap a_{i_2}^{i_1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) = (a_{i_1}^{i_0} \cap \ldots \cap a_{i_{s-1}}^{i_{s-2}} \cap a_r^{i_{s-1}}) \cap$$
$$\cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \ldots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \ldots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap \ldots \cap (a_{i_{s+1}}^r \cap \ldots \cap a_r^{i_{t-1}}) \cap$$
$$\cap (a_{t+1}^r \cap a_{t+2}^{t+1} \cap \ldots \cap a_j^{i_k}),$$

в котором скобка $(a_{i_{s+1}}^r \cap \ldots \cap a_r^{i_{t-1}})$ повторяется $m = \dfrac{p \cdot k!}{t-s}$ раз, причем $1 \leq t - s \leq k$ и p – произвольное натуральное число. Следовательно, для всех одночленов выполнено включение $(a_{i_1}^i \cap \ldots \cap a_j^{i_k}) \subset (A^{k+m(t-s)})_j^i = (A^{k+pk!})_j^i$, не зависящее от t и s. Получаем $A^k \subset A^{k+pk!}$, что, в частности, дает $A^n \subset A^{n+pn!}$. Умножение последнего включения на A^{k-n} дает (2).

Очевидно, что $A^k \subset E \cup A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{n-1}$ выполняется для всех $0 \leq k \leq n$. Добавляя к этому свойство (1) получаем формулы (3) . Матрицу $(E \cup A)^{n-1} = \bigcup_{p=0}^{\infty} A^p$ над двухэлементной алгеброй принято называть матрицей достижимости графа, в качестве соответствующей матрицы инциденций которого берется матрица A.

Формулы (4) дают (3) (при $r = 0$) и, следовательно, (1). С другой стороны, условие формулы (4) автоматически выполняется для $r \leq k \leq r + n - 1$. Покажем, что из (1) следует выполнение (4) для $k > r + n - 1$. Действительно, пусть $k = r + n + s$, $s \geq 0$. Тогда $A^k = A^{r+n+s} = A^r \prod A^{n+s} \subset A^r \prod (E \cup A)^{n-1}$ в силу условия (1). Получили, что (1), (3) и (4) – эквивалентные свойства степеней произвольной булевой $n \times n$-матрицы.

Из формул (1) сразу же можно получить следующую теорему Лунца [9], показывающую, что все *рефлексивные* булевы отношения, то есть такие, что $E \subset A$, являются сходящимися и имеют индекс (экспоненту) не более чем $n - 1$.

Теорема 1. Если для произвольной $n \times n$-матрицы A над произвольной булевой алгеброй выполнено $E \subset A$, тогда имеет место

$$E \subset A \subset A^2 \subset \ldots \subset A^{n-1} = A^n = \ldots$$

Доказательство. Из формулы (1) и условия теоремы получаем $A^k \subset (E \cup A)^{n-1} = A^{n-1}$ для всех $k \geq n$. С другой стороны, умножая последовательно на $A, A^2, \ldots, A^{n-1}, \ldots, A^{k-1}$ правую и левую части выражения $E \subset A$, получим обратное включение $A^{n-1} \subset A^k$ $(k \geq n)$, что и доказывает теорему 1.

Далее рассматриваются, в частности матрицы, некоторые степени которых равны O, J и E соответственно. Если $A^p = O$ для некоторого $p \geq 1$, то булеву матрицу A называют *нильпотентной*, если $A^p = J$, то A называют *примитивной*, и если $A^p = E$, то A называют *корнем из единицы E*.

Теорема 2. Матрица A размера $n \times n$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $A^n = O$, то есть индекс любой нильпотентной булевой матрицы не превосходит ее порядка n.

Докажем это. Сначала заметим, что если матрица A размера $n \times n$ нильпотентна, то найдется такое наименьшее натуральное $k_0 \geq 1$, что $A^{k_0} = O$. Причем $A^t = O$ для всех $t > k_0$ и только таких t. Выберем такое натуральное p, чтобы $p \cdot n! \geq k_0$. Тогда (2) дает $A^k \subset A^{k+p \cdot n!} = O$, для всех $k \geq n$. Получаем $k_0 \leq n$. Достаточность очевидна.

ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ ОБРАТИМЫХ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

В полугруппе квадратных булевых матриц подгруппа всех обратимых матриц, т. е. таких матриц A, для которых существует матрица A^{-1} с условием $A \prod A^{-1} = A^{-1} \prod A = E$, состоит из ортогональных матриц. Сошлемся на статьи [1], [2], [10], в которых рассматриваются различные аспекты обратимости. Самой первой работой об обратных булевых матрицах следует, по-видимому, считать статью Веддерберна [11]. Требование ортогональности налагает на элементы обратимой матрицы определенные требования полноты и взаимной однозначности ее столбцов и строк: $\bigcup_k A_k^i = I, \bigcup_k A_j^k = I$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $A_k^j \cap A_k^i = \varnothing, A_j^k \cap A_i^k = \varnothing, j \neq i$. Таким образом, эти условия эквивалентны равенству $A^{-1} = A^T$. Этим условиям, очевидно, удовлетворяют рассмотренные выше матрицы перестановок, образующие подгруппу в группе всех обратимых матриц. Следующая теорема показывает связь обратных матриц с корнями из единицы. Кроме этого она говорит о том, что все корни из единицы есть матрицы периодические, не имеющие предел (кроме единичной матрицы), и, очевидно, с индексом, равным 1.

Теорема 3. Матрица A с периодом, равным C, является корнем из единицы степени mC (m – натуральное) тогда и только тогда, когда она является ортогональной и, следовательно, обратимой. При этом обратная матрица имеет тот же период C и, следовательно, является корнем той же степени, что и A.

Нетрудно показать [2], что условие $E \subset D^T \prod D$ эквивалентно условию $J \prod D = J$, а из равенства $J \prod C \prod D = J$ следует $J \prod D = J$ для любых квадратных булевых матриц C, D и универсальной матрицы J. Воспользуемся этими свойствами произведения матриц, чтобы проверить необходимость теоремы 3.

Пусть существует такое натуральное $p \geq 1$, что $A^p = E$, кроме этого $(A^T)^p = (A^p)^T = E$. Тогда $J \prod A^p = J$, что дает $J \prod A^{p-1} \prod A = J$. Поэтому $J \prod A = J$. Следовательно, $E \subset A^T \prod A$. Умножая (7) слева и справа на $(A^T)^s$ и A^s, соответственно получим $(A^T)^s \prod A^s \subset (A^T)^{s+1} \prod A^{s+1}$ для любого s, т. е.

$$E \subset A^T \prod A \subset (A^T)^2 \prod A^2 \subset \ldots \subset (A^T)^p \prod A^p = E.$$

Последнее доказывает ортогональность матрицы: $A^T \prod A = E$.

Покажем теперь, что из условия $A \prod B = B \prod A = E$ следует существование такого натурального $p \geq 1$, что $A^p = E$. Имеем $E = A^s \prod B^s$ для любого s. Пусть $A^{k_A} = A^{k_A + C_A}$ и $B^{k_B} = B^{k_B + C_B}$, где k_A, C_A, k_B, C_B есть индексы и периоды матриц A и B соответственно. С одной стороны, $E = A^{k_A} \prod B^{k_A} = A^{k_A + C_A} \prod B^{k_A} = A^{C_A}$, тогда с другой – $E = A^{C_A} \prod B^{C_A} = B^{C_A}$. Аналогично $B^{C_B} = E$ и $A^{C_B} = E$. Получаем, что периоды кратны друг другу, поэтому $C_A = C_B = C$. Причем C является наименьшим показателем p степени, для которой $A^p = E$. Кроме этого $A^1 = A^{1+C}$, то есть индекс равен 1.

Следовательно, матрицы A и A^{-1} с периодами, равными C, и индексом, равным 1, являются корнями из единицы степени mC. Таковыми являются матрицы-перестановки P, определенные во введении.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ

Теоремы 1 и 2 показывают, что среди рефлексивных и нильпотентных отношений не найти матриц с максимальным индексом $k_{\max}$ поскольку имеет место утверждение Шварца [12], указывающее этот максимум для булевых (или неотрицательных) $n \times n$-матриц:

$$k_{\max} = (n-1)^2 + 1.$$

Следует сказать, что Вейландт [13] ранее доказал, что этот предел достигается примитивными матрицами тогда и только тогда, когда они определяют булевы отношения, задаваемые матрицами вида

$$W_{1\times 1} = (I), W_{2\times 2} = \begin{pmatrix} I & I \\ I & \varnothing \end{pmatrix}, W_{n\times n} = \begin{pmatrix} \varnothing & I & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & I & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \cdots & I & \varnothing \\ I & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & I \\ I & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}, n \geq 3. \quad (6)$$

Отметим, что $W_{n\times n}{}^{(n-1)^2} \neq W_{n\times n}{}^{(n-1)^2+1} = W_{n\times n}{}^{(n-1)^2+2} = \ldots = J$.

Существуют жесткие ограничения на матрицы с максимальным индексом, которые в общем зависят и от булевых рангов таких матриц, от их разложимости и пр., что отражено в многочисленных публикациях на эту тему (напр., см. [3,5, 14]).

Теорема 4. Период булевой матрицы размера $n\times n$ над произвольной булевой алгеброй является делителем $n!$.

Действительно, из свойства степеней (2) получается

$$A^k \subset A^{k+n!} \subset A^{k+2\cdot n!} \ldots \subset A^{k+p\cdot n!} \subset A^{k+p\cdot n!+n!} \ldots$$

В конце концов, в этой цепочке включений наступит повторение и, следовательно, равенство $A^s = A^{s+n!}$ для некоторого s, что будет означать, что период C делит $n!$.

На самом деле, наибольший период равен наименьшему общему кратному чисел от 1 до n, то есть $C_{\max} = HOK(1,2,3,\ldots,n)$. В некотором смысле это объясняется тем, что коммутативная полугруппа, каждый элемент которой имеет индекс, равный 1 (таковой является циклическая группа), является объединением непересекающихся периодических групп [6]. Порядок объединения циклических групп (непересекающихся) имеет, очевидно, порядок, равный наименьшему общему кратному их порядков.

Свойства периодов некоторых (0,1)-матриц можно найти в [3], а описание периодов в контексте теории графов в работе Розенблата [4]. О других свойствах степеней булевых матриц, связанных с понятиями булевых определителей и перманентов, можно найти в [15].

Дальнейшее рассуждение будет связано с поиском и построением примеров таких матриц с максимальным индексом и периодом. В итоге такие поиски следует вести среди так называемых циркулянтных матриц с наибольшим периодом (по возможности с наименьшим индексом) и примитивных матриц (с обязательным требованием сходимости), которые, несмотря на парадокс, связанный с их названием, обладают самым большим индексом среди матриц того же размера.

Для построения нашего примера, определим матрицу $a \cap A$ как матрицу с элементами $(a \cap A)^i_j = a \cap (A)^i_j$, где a – элемент булевой алгебры, а A есть матрица над этой алгеброй. Определим блочные матрицы P_m размера $n\times n$, дающие перестановки порядков $m = 1,2,\ldots, n$, с помощью нулевых $O_{r\times m}$, $O_{m\times r}$ блоков и единичного блока $E_{r\times r}$ с соответствующими размерами и удовлетворяющими условию $m + r = n$, следующим образом:

$$P_m = \begin{pmatrix} P_{m\times m} & O_{m\times r} \\ O_{r\times m} & E_{r\times r} \end{pmatrix}.$$

Блок $P_{m\times m}$ пусть определяется как

$$P_{1\times 1} = (I), P_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \varnothing & I \\ I & \varnothing \end{pmatrix}, P_{m\times m} = \begin{pmatrix} \varnothing & I & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & I & \cdots & \varnothing & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \cdots & I & \varnothing \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & I \\ I & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing \end{pmatrix}, 3 \leq m \leq n.$$

Заметим, что для дизъюнктного набора $\left\{a^1,...,a^s : a^i \cap a^j = \varnothing, i \neq j\right\}$ элементов булевой алгебры линейная комбинация матриц с такими коэффициентами обладает свойством: степень такой линейной комбинации есть линейная комбинация степеней, то есть

$$((a^1 \cap A_1) \cup (a^2 \cap A_2) \cup ... \cup (a^s \cap A_s))^p = (a^1 \cap A_1{}^p) \cup (a^2 \cap A_2{}^p) \cup ... \cup (a^s \cap A_s{}^p).$$

Рассмотрим линейную комбинацию матрицы Вейландта $W_{m \times m}$ с перестановочными матрицами $P_1, \ldots, P_n$ и с дизъюнктными коэффициентами $a^0, a^1, \ldots, a^n$. Тогда

$$((a^0 \cap W_{n \times n}) \cup (a^1 \cap P_1) \cup ... \cup (a^n \cap P_n))^{(n-1)^2+1} = (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap P_1^{(n-1)^2+1}) \cup ... \cup (a^n \cap P_n^{(n-1)^2+1}) =$$

$$= (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup ... \cup (a^n \cap \tilde{P}_n).$$

Отметим, что степень $\tilde{P}_m = P_m{}^s$ есть опять циклическая перестановка порядка m, так как $\tilde{P}_m{}^m = (P_m{}^s)^m = P_m{}^{sm} = (P_m{}^m)^s = (P_m)^s = \tilde{P}_m$. Поэтому

$$((a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup ... \cup (a^n \cap \tilde{P}_n))^{C_{\max}} = (a^0 \cap J) \cup (a^1 \cap \tilde{P}_1) \cup ... \cup (a^n \cap \tilde{P}_n).$$

Причем $C_{\max}$ является наименьшим среди таких показателей, так как $C_{\max} = НОК(1,2,3,...,n)$.

Приведем пример матрицы с наибольшим возможным индексом и периодом:

$$\begin{pmatrix} [1;2) & [0;1)\cup[2;6) & \varnothing & \varnothing & \varnothing \\ [2;3) & [1;2) & [0;1)\cup[2;6) & \varnothing & \varnothing \\ [3;4) & \varnothing & [1;3) & [0;1)\cup[4;6) & \varnothing \\ [0;1)\cup[4;5) & \varnothing & \varnothing & [1;4) & [0;1)\cup[5;6) \\ [0;1)\cup[5;6) & \varnothing & \varnothing & \varnothing & [1;5) \end{pmatrix}.$$

Индекс этой интервальной матрицы, построенной выше описанным способом, равен 17, а период – 60.

ОБЕРТОНЫ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕПЕНЕЙ БУЛЕВЫХ МАТРИЦ

Приведенная ниже таблица показывает значения индексов и возможные значения периодов $n \times n$-матриц (n = 2,3,4,5,6,), которые должны делить максимальный период.

Размер матрицы	Индекс: наибольшая циклическая глубина	Наибольший возможный период	Возможные периоды
2×2	2	2	1,2
3×3	5	6	1,2,3,6
4×4	10	12	1,2,3,4,6,12
5×5	17	60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60
6×6	26	60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60

Результаты для наибольшей циклической глубины и наибольшего возможного периода в приведенной выше таблице были проверены с помощью достаточно мощной вычислительной техники и языка программирования C++. При этом условии вычисление занимало много времени. Нормальные дизъюнктивные формы элементов высоких степеней матрицы размера 7 × 7, рассматриваемых как булевы функции, аргументы которых являются элементами этой матрицы, содержат многие сотни тысяч одночленов.

Следует отметить следующий примечательный факт. Как было уже сказано, каждый элемент $(A^k)_i^i$ булевой матрицы A^k, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца и определяющий меру отношения (связи) i-го элемента с j-м конечного множества M, представляет собой булевы функции, аргументами которых являются элементы матрицы A. Сравнение соответствующих элементов различных степеней данной матрицы показывает, что для элементов $(A^k)_i^i$ имеет место более частая повторяемость значений, чем та, что получается из-за периодичности последовательности степеней данной матрицы. Причем у диагональных элементов $(A^k)_i^i$ эта повторяемость значений происходит гораздо чаще, чем у не диагональных, которые в общем-то не сравнимы между собой.

Так, например, для произвольной булевой матрицы A размера 3×3 выполняется всегда $A^5 = A^{11} = = A^{17} = \ldots$ (с периодом $C_{\max} = 6$, индексом не более $k_{\max} = 5$). Однако возможно для осцилляторных матриц $(A^5)_i^i = (A^7)_i^i = (A^{11})_i^i = \ldots$, то есть повторяемость значений на диагонали проявляется по крайней мере через 2 и 4 шага.

Для $n = 4$ выполняется всегда $A^{10} = A^{22}$ (индекс $k_{\max} = 10$, период $C_{\max} = 12$), но существует уже четыре серии «обертонов»:

1. $(A^7)_i^i = (A^{11})_i^i = (A^{13})_i^i = (A^{17})_i^i = (A^{19})_i^i = \ldots,$
2. $(A^8)_i^i = (A^{16})_i^i = (A^{20})_i^i = \ldots$
3. $(A^{10})_i^i = (A^{14})_i^i = (A^{22})_i^i = \ldots$
4. $(A^{15})_i^i = (A^{21})_i^i = \ldots$

(далее с периодичностью, равной 12) и два «одиночных» тона:

5. $(A^{12s})_i^i,\ s = 1, 2, \ldots,$
6. $(A^{18+12s})_i^i,\ s = 0, 1, 2, \ldots$.

Символом $\vdots\!=\!\vdots$ отмечены те места в цепочках равенств, которые соответствуют начальным номерам «одиночных» тонов – 12 и 18. Причем эти серии начинаются еще до начала вхождения в цикл, то есть до 10-й степени.

Для $n = 5$ (индекс $k_{\max} = 17$, период $C_{\max} = 60$) на каждом цикле можно обнаружить уже двенадцать серий «обертонов»:

1. $(A^{13})_i^i = (A^{17})_i^i = (A^{19})_i^i =$
$= (A^{23})_i^i = (A^{29})_i^i = (A^{31})_i^i = (A^{37})_i^i = (A^{41})_i^i = (A^{43})_i^i = (A^{47})_i^i = (A^{49})_i^i = (A^{53})_i^i = (A^{59})_i^i = (A^{61})_i^i =$
$= (A^{67})_i^i = (A^{71})_i^i = (A^{73})_i^i = (A^{77})_i^i = (A^{79})_i^i = (A^{83})_i^i = (A^{89})_i^i = \ldots$
2. $(A^{14})_i^i = (A^{22})_i^i = (A^{26})_i^i = (A^{34})_i^i = (A^{38})_i^i = (A^{46})_i^i = (A^{58})_i^i = (A^{62})_i^i = (A^{74})_i^i = (A^{82})_i^i = (A^{86})_i^i = \ldots$
3. $(A^{21})_i^i = (A^{27})_i^i = (A^{33})_i^i = (A^{39})_i^i = (A^{51})_i^i = (A^{57})_i^i = (A^{63})_i^i = (A^{69})_i^i = (A^{81})_i^i = (A^{87})_i^i = \ldots$
4. $(A^{28})_i^i = (A^{32})_i^i = (A^{44})_i^i = (A^{52})_i^i = (A^{56})_i^i = (A^{64})_i^i = (A^{68})_i^i = (A^{76})_i^i = \ldots$
5. $(A^{18})_i^i = (A^{42})_i^i = (A^{54})_i^i = (A^{66})_i^i = \ldots$
6. $(A^{24})_i^i = (A^{36})_i^i = (A^{48})_i^i = (A^{72})_i^i = (A^{84})_i^i \ldots$
7. $(A^{25})_i^i = (A^{35})_i^i = (A^{55})_i^i = (A^{65})_i^i = \ldots$
8. $(A^{10})_i^i = (A^{50})_i^i = (A^{70})_i^i = \ldots$
9. $(A^{15})_i^i = (A^{45})_i^i = (A^{75})_i^i = \ldots$
10. $(A^{20})_i^i = (A^{40})_i^i = (A^{80})_i^i = \ldots$

и два «одиночных» тона:

11. $(A^{30+60s})_i^i,\ s = 0, 1, 2, \ldots$,
12. $(A^{60+60s})_i^i,\ s = 0, 1, 2, \ldots$.

Символы $\vdots\!=\!\vdots$ в цепочках 1 – 10 соответствуют «одиночным» тонам с начальными показателями – 30 и 60.

Для $n = 6$ (индекс $k_{\max} = 26$, период $C_{\max} = 60$) обнаруживается также двенадцать серий «обертонов», очень схожих с указанными сериями в случае $n = 5$:

в 1 серии нет только начала – $(A^{13})_i^i$ и $(A^{17})_i^i$;

во 2 серии нет $(A^{14})_i^i$;

в 7 серии нет $(A^{25})_i^i$;

в 9 серии нет $(A^{15})_i^i$;

в 10 серии нет $(A^{20})_i^i$.

Остальные серии, включая одиночные, точно такие же, как и в случае $n = 5$.

Отметим, что во всех разобранных случаях волна (цикл) как бы состоит из двух полуволн, симметричных относительно двух осей, приходящихся на номера «одиночных» тонов и соответствующих символу $\overset{\vdots}{\underset{\vdots}{=}}$.

Таким образом, наблюдатель (находящийся в i-й точке), который не видит всю картину функционирования конечной системы в целом, однако видит последовательность биволн с двумя осями симметрии. Ему сложно уловить цикличность из-за «шумов». Лучше находиться на «пути», идущем от i-й точки к j-й точке ($i \neq j$), что соответствует элементам $(A^k)^i_j$ булевой матрицы A, определяющей некоторый осциллятор.

Замеченное наличие обертонов может оказаться весьма интересным, в частности для проблемы максимальной плотности элементов булевой матрицы, сформулированной в [5].

Библиографический список

1. *Luce R.D.* A note on Boolean matrix theory // Proc. Ammer Math. Soc. 1952. V. 3. P.382–388.
2. *Give'on Y.* Lattice matrices // Inform. And Control. 1964. V. 7, № 4. P. 477–484
3. *Kim Ki Hang*. Boolean matrix theory and applications. Pure and Applied Mathematics, 70. N. Y.; Basel: Marcel Dekker, Inc., 1982. XIV+ 425 p.
4. *Rosenblatt D.* On the graphs and asymptotic forms of finite Boolean relation matrices and stochastic matrices // Naval Res. Logist. Quart. 1957. V. 4. P. 151–167.
5. *Li Q., Shao J.* The index set problem for Boolean (or nonnegative) matrices // Discrete Math. 1993. V. 123, №1–3. P. 75–92.
6. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972. Т. 1. 286 с.
7. *Лаллеман Ж.* Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985. 440 с.
8. *Hammer P. L., Rudeanu S.* Boolean methods in operations research and related areas. Berlin; N. Y.; Springer, 1968. XIX+ 329 p.
9. *Лунц А.Г.* Приложение матричной булевской алгебры к анализу и синтезу релейно-контактных схем // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, №3. С. 421–423.
10. *Rutherford D.E.* Inverses of Boolean matrices // Proc. Glasg. Math. Assoc. 1963. V. 6. P. 49–53.
11. *Wedderburn J.H.M.* Boolean linear associative algebra // Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 185–194.
12. *Schwarz S.* On the semigroup of binary relations on a finite set // Czech. Math. J. 1970. V. 20(95). P. 632–679.
13. *Wielandt H.* Unzerlegbare, nichnegativen Matrizen//Math. Z. 1950. V. 52. P. 642–648.
14. *Gregory D.A., Kirkland S.J., Pullmang N.J.* A bound on the exponent of a primitive matrix using Boolean rank // Linear Algebra Appl. 1995. V. 217. P. 101–116.
15. *Поплавский В.Б.* Определители степеней булевых матриц // Чебышевский сборник: Труды VI Междунар. конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения». 2004. Т. 5, вып. 3(11). С. 98–111.

УДК 517.51

МНОГОМЕРНЫЕ q-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ p-МОДУЛИ И КРИТЕРИИ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

Л.В.Сахно

Саратовский государственный университет,
кафедра математического анализа
E-mail: SahnoLV@mail.ru

В статье в терминах L_q-нормы дается характеристика анизотропных пространств С.Л. Соболева в пространстве L_p. Так как по одной части номеров возможно неравенство $p_i>1$, а по другой – $p_i=1$, то аналог теоремы Ф. Рисса и Hardy–Littlwood представляется в комбинированном виде. Рассматривается более общее дифференцирование, регулярное по М. Шварцу, которое лишь по части переменных является соболевским.

Multivariate q-integral p-modules and Criterion of the Generalized Differentiability

L.V. Sakhno

In the article in terms of L_q-norm the performance of anisotropic spaces of S.L.Sobolev in space L_p is given. As by one part of numbers probably inequality $p_i>1$, and on another – $p_i=1$ the analog of the theorem of F.Rissa and Hardy–Littlwood is represented in a combined aspect. More common derivation, regular by Schwarz which only in part of variables is Sobolev's also is considered.