

МАТЕМАТИКА

УДК 510: 53.072: 621.1.016.4(03)

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Р. В. Арутюнян

Арутюнян Роберт Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Московский технический университет связи и информатики, rob57@mail.ru

В предлагаемой статье для исследования процесса зарастания отверстий в решетчатой структуре, играющей роль фильтра, использован стохастический подход. Сформулирована и исследована система кинетических уравнений, моделирующих процесс диффузной фильтрации на основе указанного подхода. Доказана теорема существования и единственности решения применительно к случаю непрерывной плотности. Получены представления решения в виде равномерно сходящегося и асимптотического рядов, а также изучен характер его поведения на бесконечности. Рассмотрены конкретные частные случаи плотности типа дельта-функции и равномерного распределения. Построена и обоснована конечно-разностная схема для решения соответствующей задачи Коши на конечных интервалах времени. Приведены результаты моделирования на ЭВМ.

Ключевые слова: фильтрация, диффузия, кинетика, стохастическое уравнение, существование, единственность, численный метод.

DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-1-5-12

1. ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

В статье для исследования процесса зарастания отверстий в решетчатой структуре, играющей роль фильтра, в отличие от [1–4], использован стохастический подход. Рассмотрим одномерную периодическую структуру типа «решета» (рис. 1).

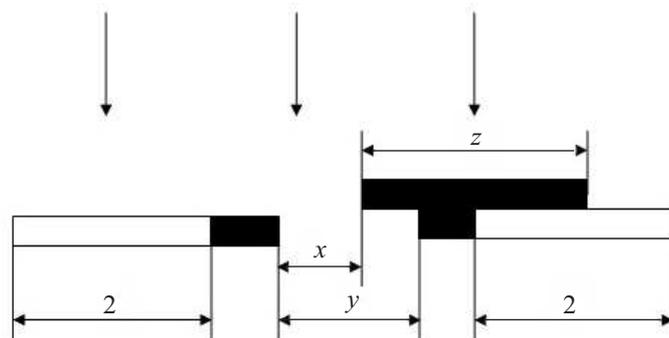
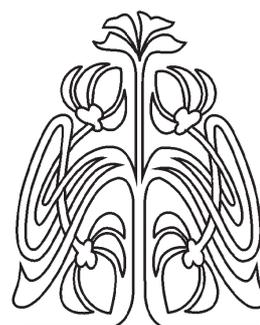
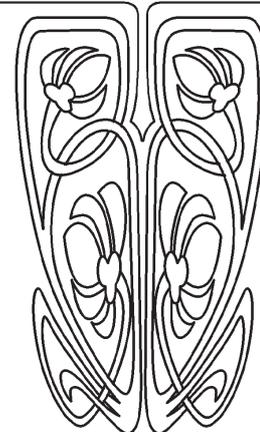


Рис. 1. Схема процесса фильтрации в одномерной решетчатой структуре

Длина непроницаемой части равна двум, а проницаемой (отверстия) — единице. Сквозь это решето просеивается поток одномерных частиц (палок) случайных размеров. Длина произвольной палки z ,



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





распределена по некоторому закону с плотностью $p(z)$, не зависящей от времени t , на полуинтервале $(0, 2]$. Примем следующие допущения:

1. Поток частиц однороден во времени, на период «решета» в единицу времени падает одна частица.
2. Падение частиц равновероятно в любую точку на периоде.
3. Частица проходит через отверстие, если ее центр тяжести попадает в створ отверстия. В противном случае прилипает к решетке.

Со временем размер проникаемой части «решета» уменьшается из-за налипания палок. Искомые — плотности распределения вероятностей размеров отверстий и палок на выходе из «решета» $C(x, t)$ и $\varphi(z, t)$. Исходное уравнение баланса, описывающее процесс зарастания отверстий, имеет следующий вид:

$$C(x, t + \Delta t)\Delta x - C(x, t)\Delta x = (I_{in}(x, t)\Delta x - I_{out}(x, t)\Delta x) \frac{\Delta t}{\tau} + o(1), \quad (1)$$

$$\Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

где левая часть описывает с точностью до бесконечно малых приращение за интервал $(t, t + \Delta t)$ вероятности существования отверстий с размерами от x до $x + \Delta x$; $I_{in}(x, t)$ — плотность вероятности образования, а $I_{out}(x, t)$ — соответственно исчезновение отверстий шириной x в момент t в результате падения палки. Очевидно, $I_{in}(1, t) = 0$, для всех $t > 0$ $I_{out}(0, t) = 0$, $C(x, 0) = \delta(x - 1)$ — дельта-функция; τ — частота падения палок на период решета. Без ограничения общности примем $\tau = 1$. Для ненулевых отверстий ($x > 0$):

$$I_{in}(x, t)\Delta x = \frac{2\Delta x}{3} \int_x^1 C(y, t)P(y - x)dy, \quad \forall x \in (0, 1), \quad t > 0,$$

где $P(y - x) = \int_{2(y-x)}^2 p(z)dz$ — вероятность существования палок с длинами, способными образовать из отверстия шириной y отверстие размером x (см. рис. 1). Множитель $\frac{\Delta x}{3}$ есть вероятность попадания центра тяжести палки на интервал длиной Δx . Коэффициент 2 учитывает налипание палок с обеих сторон отверстий. Для вычисления уходящего члена $I_{out}(x, t)$ рассмотрим три случая соотношений между длиной падающей палки z и шириной отверстия x .

1. $0 < z < x$, чтобы изменить размер отверстия, центр тяжести палки должен попасть внутрь интервала на периоде решетки длиной z .

2. $0 \leq z < 2x$. Суммарная длина интервалов на периоде, попадание на которые приводит к уменьшению размера отверстия, составляет $2z - x$, из которых z идет на создание ненулевого отверстия, а $(z - x)/2$ — на нуль-отверстия.

3. $2x \leq z < 2$. В этом случае длина соответствующего интервала равна $z + x$, где $2x$ идет на создание ненулевого отверстия, а $z - x$ — на нуль-отверстие.

Таким образом,

$$I_{out}(x, t)\Delta x = C(x, t) \left[\int_0^x \frac{z}{3} P(z) dz + \int_x^{2x} \frac{2z - x}{3} P(z) dz + \int_{2x}^2 \frac{z + x}{3} P(z) dz \right] \Delta x,$$

нуль-отверстие может образовываться из всех ненулевых отверстий ($0 < x \leq 1$) при попадании центра тяжести палок с размерами $z \leq x$ на интервал длиной $z - x$ в пределах периода «решетки», поэтому

$$I_{in}(0, t)\Delta x = \int_x^1 C(y, t) \int_y^2 \frac{z - y}{3} p(z) dz dy.$$

Устремляя Δx и Δt к нулю, получаем из (1) с учетом выражений для $I_{in}(x, t)$ и $I_{out}(x, t)$, а также начальных условий:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -q(x)C(x, t) + \int_x^1 P(y - x)C(y, t) dy, \quad \forall x \in (0, 1], \quad t > 0, \quad (2)$$



$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) = \int_0^1 C(y, t) \int_y^2 \frac{z-y}{3} p(z) dz dy, \quad \forall t > 0, \quad (3)$$

$$C(x, 0) = \delta(x - 1 + 0), \quad \forall x \in (0, 1], \quad C_0(0) = 0, \quad (4)$$

$$P(w) = \frac{2}{3} \int_{2w}^2 p(z) dz, \quad 0 \leq w \leq 1,$$

$$q(x) = \frac{2}{3} \left[\int_0^x \frac{z}{2} P(z) dz + \int_x^{2x} \frac{2z-x}{2} P(z) dz + \int_{2x}^2 \frac{z+x}{2} P(z) dz \right], \quad \forall x \in (0, 1),$$

$C_0(t)$ — вероятность существования на периоде решета нуль-отверстия. Представим $C(x, t)$ в виде

$$C(x, t) = C_1(x, t) + \delta(x - 1 + 0)e^{-q(1)t}, \quad (5)$$

где $C_1(x, t)$ — ограниченная составляющая $C(x, t)$. После подстановки (5) в (2) и преобразований получаем задачу относительно $C_1(x, t)$ для любых $x \in (0, 1]$, $t > 0$:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}(x, t) = -q(x)C_1(x, t) + \int_x^1 P(y-x)C_1(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t} \quad (6)$$

с начальным условием

$$C_1(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1]. \quad (7)$$

Выражение для плотности условного распределения вероятностей длин палок на выходе из отверстий $\varphi(z, t)$ получается аналогично соотношениям для $I_{in}(x, t)$ и $I_{out}(x, t)$ и имеет вид

$$\varphi(z, t) = p(z) \int_{z/2}^1 R(y, z)C(y, t) dy, \quad \forall z \in [0, 2), \quad t > 0, \quad (8)$$

где $R(y, z)$ есть вероятность преодолеть отверстие шириной y палке длиной z :

$$R(y, z) = \begin{cases} (2y - z)/3, & z/2 \leq y \leq \min(z, 1), \\ y/3, & \min(z, 1) < y \leq 1. \end{cases}$$

Подстановка $C_1(x, t) = A(x, t)e^{-q(1)t}$ преобразует (6)–(7) для любых $x \in (0, 1]$ и $t > 0$ к виду

$$\frac{\partial A}{\partial t}(x, t) = -Q(x)A(x, t) + \int_x^1 P(y-x)A(y, t) dy + P(1-x), \quad (9)$$

$$A(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1], \quad (10)$$

где $Q(x) = q(1) - q(x)$. Функция $A(x, t)$ для любых $x \in (0, 1]$ и $t \geq 0$ может быть разложена в степенной ряд:

$$A(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j(x)t^j, \quad (11)$$

коэффициенты которого определяются из соотношений для $j = 1, 2, \dots$,

$$(j+1)D_{j+1}(x) = Q(x)D_j(x) + \int_x^1 P(y-x)D_j(y) dy, \quad D_1(x) = P(1-x), \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (12)$$

Свойство 1. Если плотность распределения $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$, то решение задачи Коши (3)–(4), (6)–(7) существует, единственно, причем

$$C_0(t) \in C^\infty(0, \infty), \quad \frac{\partial^k C}{\partial t^k}(x, t) \in C^1(0, 1), \quad \forall t > 0, \quad k = 0, 1, \dots$$



Доказательство. Поскольку $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0, 2]$, то $q(x) \in C^2(0, 1)$, $P(x) \in C^1(0, 1)$, $D_j(x) \in C^1(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots$.

Промажорируем коэффициенты ряда (11):

$$0 < q(x) < \frac{2}{3} \max \left(\frac{x}{2}, \frac{3}{2x}, 1 + \frac{x}{2} \right) < 1, \quad \left| \frac{dq}{dx} \right| \leq \frac{1}{3}, \quad |Q(x)| \leq \frac{1}{3}(1-x),$$

$$0 \leq P(x) \leq \frac{2}{3}, \quad \forall x \in [0, 1],$$

с учетом которых из (2) получаем мажоранты

$$\|D_j\|_{C(0,1)} = \frac{j+1}{3^j(j-1)!}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Посредством дифференцирования (12) по x получаем рекуррентные соотношения для производных коэффициентов $D_j(x)$:

$$(j+1) \frac{dD_{j+1}}{dx}(x) = -\frac{dq}{dx}(x)D_j(x) + Q(x) \frac{dD_j}{dx}(x) - P(x)D_j(x) - \int_x^1 \frac{dP}{dy}(y-x)D_j(y) dy,$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad j = 1, 2, \dots,$$

откуда следуют оценки

$$(j+1) \left\| \frac{dD_{j+1}}{dx} \right\|_{C(0,1)} \leq \frac{5}{3} \|D_j\|_{C(0,1)} + \frac{1}{3} \left\| \frac{dD_j}{dx} \right\|_{C(0,1)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

на основании которых с учетом (13) и начальных условий имеем:

$$\|D_1\|_{C^1(0,1)} = \frac{4\|p\|_{C(0,2)} + 2}{3}, \quad (14)$$

$$\|D_j\|_{C^1(0,1)} = \frac{\|p\|_{C(0,2)} + 4j}{3^{j-1}(j-2)!}, \quad j = 2, 3, \dots \quad (15)$$

Из (13)–(15) следует, что ряд (11) и ему соответствующие, полученные почленным дифференцированием (11) по x и t , сходятся равномерно, причем при всех $t \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$

$$\left\| \frac{\partial^k C_1}{\partial t^k} \right\|_{C^1(0,1)} < \left(\frac{4}{3} \right)^k (R+2)^3 (t + \|p\|_{C(0,2)} + 8)^3 e^{(1/3 - q(1))t}.$$

Так как

$$\frac{d^{k+1}C_0}{dt^{k+1}}(t) \leq \frac{2}{3} \left\| \frac{d^k C_1}{dt^k} \right\|_{C(0,1)} + \frac{1}{3} q^k(t) e^{-q(1)t}, \quad \forall t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то утверждение доказано. □

Свойство 2. *Имеют место оценки снизу*

$$C_1(x, t) \geq P(1-x) \frac{e^{-q(x)t} - e^{-q(1)t}}{q(1) - q(x)} \geq P(1-x) \frac{e^{-q(1)t} - e^{-q_{\max}t}}{q_{\max} - q(1)},$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad q_{\max} = \|q\|_{C(0,1)}.$$

Доказательство. Так как $P(x) \geq 0 \forall x \in (0, 1)$, то из (9)–(10): $A(x, t) \geq 0$, $A(x, t) \geq P(x-1) \frac{e^{Q(x)t} - 1}{Q(x)}$. С учетом монотонности $\frac{e^{-x} - e^{-y}}{(y-x)}$ по обоим аргументам, следует доказательство. □

Заметим, что $C_1(1, t) = \frac{2}{3t} e^{-q(1)t}$.



Свойство 3. *Справедливы оценки*

$$C_1(x, t) \leq \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}} I_1 \left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t} \right) e^{-q_{\min}t} \leq \frac{(3/2)^{3/4}}{3\sqrt{\pi}} \frac{t^{1/4}}{(1-x)^{3/2}} e^{-q_{\min}t + 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t}},$$

$$\forall x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad q_{\min} = \min_{[0,1]} q(x).$$

Доказательство. Поскольку $q(x) - q_{\min} \geq 0$, $0 \leq P(x) \leq 2/3$, $\forall x \in [0, 1]$, то $C_1(x, t) \leq A_+(x, t)e^{-q_{\min}t}$, где $\frac{\partial A_+}{\partial t}(x, t) = \frac{2}{3} \int_x^1 A(y, t) dy + \frac{2}{3}$, $\forall x \in (0, 1]$, $t \geq 0$, при начальном условии $A_+(x, 0) = 0$, $\forall x \in (0, 1]$. Аналитическое решение данной задачи Коши имеет вид

$$A_+(x, t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}} I_1 \left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t} \right), \quad \forall x \in (0, 1), \quad A_+(1, t) = \frac{2}{3t}, \quad \forall t > 0,$$

что вследствие свойств функций Бесселя [5] доказывает данное свойство. □

Свойство 4. *Имеет место условие нормировки:*

$$C_0(t) + \int_0^1 C_1(x, t) dx = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Для доказательства достаточно доказать

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) + \int_0^1 \frac{\partial C_1}{\partial t}(x, t) dx \equiv 0, \quad \forall t \geq 0,$$

что достигается подстановкой вместо производных соответствующих выражений правых частей системы (2)–(4). □

2. ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ (6)–(7)

Исследуем важный случай, когда $q(x) < 0$, $\forall x \in (0, 1)$, вследствие чего на полуинтервале $[0, 1)$ существует не более одной точки с абсциссой x_* , для которой выполняется равенство $q(x_*) = q(1)$, если же $q(x_*) \geq q(1)$, $\forall x \in [0, 1)$, то положим $x_* = 1$. Будем искать коэффициенты асимптотического разложения $A(x, t)$ на $(x_*, 1]$ в ряд Лорана (предполагаем, что $x_* < 1$):

$$A(x, t) = \sum_{j=-r}^{\infty} a_j(x)t^{-j}, \quad r > 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (9), находим соотношения его коэффициентов:

$$(1-j)a_{j-1}(x) = Q(x)a_j(x) + \int_x^1 P(y-x)a_j(y) dy, \quad j = -r, \dots, -1, 1, \dots;$$

$$a_j(x) \equiv 0, \quad (-j) = r, r+1, \dots;$$

$$a_{-1}(x) = Q(x)a_0(x) + \int_x^1 P(y-x)a_0(y) dy + P(1-x), \quad Q(x) > 0, \quad \forall x \in (x_*, 1].$$

Для определения степени r главного члена асимптотики (16) сделаем оценку снизу и сверху для функции $C_1(x, t)$. Поскольку $P(x) \leq 2/3$, то $C_1(x, t) \leq A_0(x, t)$, где $A_0(x, t)$ есть решение задачи Коши для каждого $x \in (x_*, 1]$ и $t > 0$:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t}(x, t) + q(x)A_0(x, t) = \frac{2}{3} \int_x^1 A_0(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t}, \quad (17)$$



$$A_0(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (x_*, 1]. \quad (18)$$

Рассмотрим $w_0(x, t) = \int_x^1 A_0(y, t) dy$ при произвольных $x \in (x_*, 1]$ и $t > 0$. Точное решение (17), (18):

$$\hat{w}_0(x, s) = \int_x^1 \frac{P(1-y)}{(s+q(1))(s+q(y))} e^{\frac{2}{3} \int_x^y \frac{dz}{s+q(z)}} dy, \quad \forall x \in (x_*, 1], \quad (19)$$

где $\hat{w}_0(x, s)$ — образ функции $w_0(x, t)$, s — параметр преобразования Лапласа.

Из (19) получаем, что $\hat{w}_0(x, s - q(1)) = G(x)s^{-n(1)-1}(1 + o(1))$ для любого $x \in (x_*, 1]$, $s \rightarrow \infty$, где

$$G(x) = [q(x) - q(1)]^{n(1)} e^{n(1) \int_x^1 \frac{q'(z) - q'(1)}{q(z) - q(1)} dz}, \quad n(x) = -\frac{2}{3q'(x)}, \quad q'(x) = \frac{dq}{dx}, \quad \forall x \in (x_*, 1],$$

откуда

$$w_0(x, t) = t^{n(1)} e^{-q(1)t} \frac{G(x)}{\Gamma(n(1) + 1)} (1 + o(1)), \quad \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty$$

и с учетом

$$A_0(x, t) = q'(1)t^{n(1)} e^{-q(1)t} \frac{G(x)}{\Gamma(n(1)Q(x))} (1 + o(1)), \quad \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Из непрерывности $p(z)$ и условия $q''(x) < 0$ при любом $x \in (0, 1)$ следует, что $q'(x) < 0$, поэтому $n(1)$ конечно и $x_* \leq 1$. В силу справедливости неравенства $P(x-y) > P(1-x)$ для всех $y \in (x, 1)$, $x \in (0, 1)$ $A_1(x, t)$, являющаяся решением задачи Коши:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}(x, t) + q(x)A_1(x, t) = P(1-x) \int_x^1 A_1(y, t) dy + P(1-x)e^{-q(1)t}, \quad \forall x \in (x_*, 1], \quad t > 0, \\ A_1(x, 0) = 0, \quad \forall x \in (x_*, 1],$$

есть оценка снизу для $C_1(x, t)$. Асимптотика для функции $A_1(x, t)$ находится также при помощи преобразования Лапласа и имеет вид

$$A_1(x, t) = -q(1) \frac{P(1-x)}{P(0)} \frac{[q(x) - q(1)]^{n(1)-1}}{\Gamma(n(1))} e^{x \int \left(\frac{P(0)q'(z)}{q'(1)} - P(1-z) \right) \frac{dz}{q(z) - q(1)}} (1 + o(1)), \quad (21) \\ \forall x \in (x_*, 1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из (20) и (21) следует, что максимальный порядок степеней t в слагаемых асимптотического разложения (16) $r = n(1)$, а также выводится краевое условие для коэффициента $a_{n(1)}(x)$ главного члена асимптотики

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{a_{n(1)}(x)}{(1-x)^{n(1)-1}} = \frac{[-q(1)]^{n(1)}}{\Gamma(n(1))}, \quad (22)$$

являющееся условием однозначности для соответствующего уравнения системы соотношений для коэффициентов $a_j(x)$, $j = -n(1), -n(1) + 1, \dots$

3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (6)–(7)

На конечных интервалах $(0, T)$, где $T > 0$ — величина порядка постоянной времени процесса, одним из эффективных способов решения (6)–(7) является применение МКР. Рассмотрим схему первого порядка:

$$\frac{B_i^{j+1} - B_i^j}{\tau} = -a_i B_i^j + \sum_{k=1}^i P_{i-k} B_k^j h + R_i^j, \quad i = \overline{1, M}, \quad (23) \\ B_0^j = P_0 t_j e^{-q_0 t_j}, \quad a_i = q(1 - z_i), \quad P_i = P(z_i), \quad z_i = ih, \quad R_i^j = P_i e^{-q_0 t_j},$$



$$C_1(z_i, t_j) = B_{m-i}^j(1 + o(1)), \quad \tau, h \rightarrow 0, \quad i = \overline{0, M}, \quad h = \frac{1}{M},$$

$$t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, J}, \quad J = [T/\tau],$$

где квадратные скобки означают вычисление целой части. Для невязок (23), получающихся после подстановки сеточной функции $B_h = \{B_i^j\}_{i=0, M}^{j=0, J}$ точного решения задачи (6)–(7), имеют место неравенства

$$\varepsilon_i^j \leq f_1\tau + f_2h, \tag{24}$$

где $\tau \geq 0, h \geq 0, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}$; коэффициенты $f_1 = f_3 \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} \right\|_{C(0,1)}$; $f_2 = f_3 \sup_{t \geq 0} \|C_1\|_{C^1(0,1)}$; $f_3 = \frac{2}{3}(1 + 2\|p\|_{C(0,2)})$ в силу ранее доказанных в пп. 1 и 2 свойств $C_1(x, t)$ являются конечными. Методом мажорант можно показать выполнение условия устойчивости схемы

$$\|B_h^{(1)} - B_h^{(2)}\|_h \leq \gamma \|R_h^{(1)} - R_h^{(2)}\|_h, \quad \gamma = \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}, \quad \omega = \|P\|_{C(0,1)} - q_{\min}, \tag{25}$$

сеточная норма равна: $\|B_h\|_h = \max_{\Omega} |B_i^j|$, $\Omega = \{(i, j) : i = \overline{0, M}, j = \overline{0, J}\}$.

Таким образом [6], схема (23) является корректной, а приближенное решение B_h сходится к точному, причем из (24)–(25) следуют оценки:

$$|C_1(z_i, t_j) - B_{m-i}^j| \leq f_4\tau + f_5h, \quad \forall (i, j) \in \Omega,$$

где $f_4 = \text{const } f_1, f_5 = \text{const } f_2$. Аналогичная схема первого порядка точности для задачи (6)–(7) получается из (23) при $q_i = Q(1 - z_i), R_i^j = P_i$, тогда $A(z_i, t_j) = B_{m-i}^j(1 + o(\tau + h)), \tau, h \rightarrow 0, i = \overline{0, M}, j = \overline{0, J}$. Значения коэффициентов в мажоранте (24) для этой схемы становятся зависящими степенным образом от T . Из упомянутых схем предпочтительнее вторая, так как в ней свободный член не зависит от времени. Результаты моделирования даны на рис. 2 (задача с коэффициентами $q(x) = 1 + (1 - x)/6, P(x) = 2/3$, и квазиполиномиальным решением, параметры $h = 0.025, \tau = 0.5$) и рис. 3 (данные п. 2.2, параметры $h = 0.025, \tau = 0.3$)).

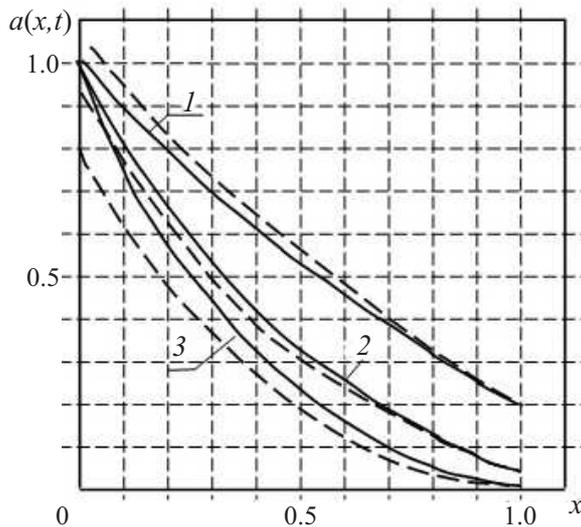


Рис. 2. Результаты решения МКР модельной задачи: 1 – $t = 10$; 2 – $t = 30$; 3 – $t = 60$; основная линия – МКР, пунктирная – точное решение

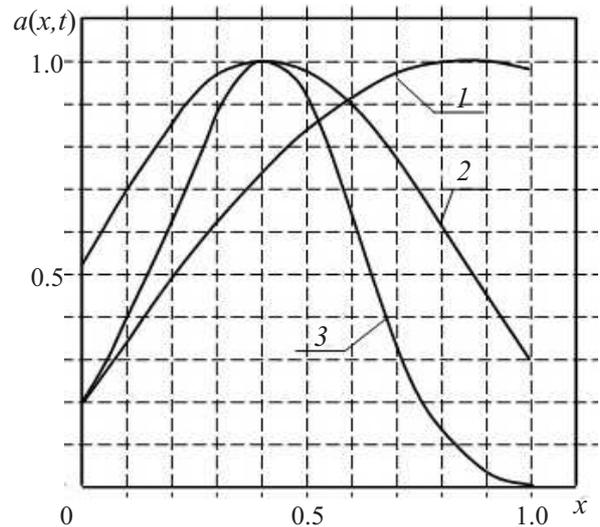


Рис. 3. Графики численного решения МКР при равномерном распределении размеров частиц: 1 – $t = 3(3)$; 2 – $t = 13(3)$; 3 – $t = 60$

По оси ординат откладывались: на рис. 2 – $a_1(x, t) = \frac{A_h(x, t)}{\|A_h\|_h}$ (приближенное решение), $a_2(x, t) = \frac{A(x, t)}{\|A_h\|_h}$ (точное решение); на рис. 3 – $a_3(x, t) = \frac{A_h(x, t)}{\|A_h\|_h}$, $A_h(x, t)$ – линейный сплайн, соответствующий вектору A_h .



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованная в статье модель, несмотря на ряд упрощающих предположений, дает общее представление о процессе фильтрации в решетчатых структурах. Полученные результаты могут быть развиты, прежде всего, в отношении рассматриваемых функциональных классов плотности распределения размеров фильтрующихся частиц и метода асимптотических оценок на отрезке $[0, x_*]$.

Библиографический список

1. Резников Г. Д., Жихарь А. С. Численно-аналитический подход к моделированию переноса частиц в фильтрующем слое // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 118–125.
2. Гавич И. К., Зекцер И. С., Ковалевский В. С., Язвин Л. С., Пиннекер Е. В., Бондаренко С. С., Боровский Л. В., Дзюба А. А. Основы гидрогеологии. Гидрогеодинамика. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1983. 241 с.
3. Гуревич А. Е. Практическое руководство по изучению движения подземных вод при поисках полезных ископаемых. Л. : Недра, 1980. 216 с.
4. Колесников А. В. Математическое моделирование фильтрации жидкости в неоднородных и периодических пористых телах методом однородно-анизотропного эквивалентирования : автореф. дис. ... канд. техн. наук / Северо-Кавказский федеральный университет. Ставрополь, 2014.
5. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М. : Наука, 1979. 832 с.
6. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 496 с.

Stochastic Simulation of Diffusion Filtering

R. V. Arutyunyan

Arutyunyan Robert Vladimirovich, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8a, Aviamotornaya st., Moscow, Russia, 111024, rob57@mail.ru

Formulated and investigated is the system of kinetic equations describing the process of diffusion filtering based on a stochastic approach. The theorem of existence and uniqueness of the solution for the case of a continuous density is prove. We obtain the representation of solution in the form of a uniformly convergent and asymptotic series, and explore the nature of its behavior at infinity. The concrete particular cases such as the density of the delta function and a uniform distribution are considered. The finite-difference scheme for the solution of the corresponding Cauchy problem on finite intervals of time is constructed and justified. The results of computer simulation are given.

Key words: filtration, diffusion, kinetics, stochastic equation, existence, uniqueness, numerical method.

References

1. Reznikov G. D., Zhikhar' A. S. Chislenno-analitičeskii podkhod k modelirovaniu perenosa chastits v fil'truishchem sloe [Numerical and analytical approach to the modeling of the transport of particles in the filter bed]. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling], 1995, vol. 7, no. 6, pp. 118–125 (in Russian).
2. Gavich I. K., Zektser I. S., Kovalevskii V. S., Iazvin L. S., Pinneker E. V., Bondarenko S. S., Borevskii L. V., Dziuba A. A. *Osnovy gidrogeologii. Hidrogeodinamika* [Fundamentals of hydrogeology. Hidrogeodinamika]. Novosibirsk, Nauka, 1983, 241 p. (in Russian).
3. Gurevich A. E. *Prakticheskoe rukovodstvo po izucheniiu dvizhenia podzemnykh vod pri poiskakh poleznykh iskopaemykh* [A Practical Guide to the study of groundwater movement in the search for minerals]. Leningrad, Nedra, 1980, 216 p. (in Russian).
4. Kolesnikov A. V. *Matematicheskoe modelirovanie fil'tratsii zhidkosti v neodnorodnykh i periodicheskikh poristyykh telakh metodom odnorodno-anzotropnogo ekvivalentirovaniia* [Mathematical modeling of fluid flow in heterogeneous and periodic porous bodies by homogeneous anisotropic equivalenting] : avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk / Severo-Kavkazskii federal'nyi universitet. Stavropol', 2014 (in Russian).
5. *Spravochnik po spetsial'nykh funktsiiam* [Handbook of special functions] / eds. M. Abramovitsa, I. Stigan. Moscow, Nauka, 1979, 832 p. (in Russian).
6. Trenogin V. A. *Funktsional'nyi analiz* [Function analysis]. Moscow, Nauka, 1980, 496 p. (in Russian).