УДК 517.9

О ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ГЕНЕРАТОРА ПОЛУГРУППЫ

М. Ю. Романова

Воронежский государственный университет,
кафедра математических методов исследования операций
E-mail: maria.romanovaru@mail.ru

В статье строится полугруппа операторов, числовая область генератора которой покрывает всю комплексную плоскость. Показывается, что такая полугруппа операторов ограничена.

Ключевые слова: полугруппа операторов, генератор полугруппы, числовая область оператора, резольвента оператора.

About Numerical Range of Semigroup's Generator

M. Yu. Romanova

Voronezh State University,
Chair of Mathematical Methods of Operational Research
E-mail: maria.romanovaru@mail.ru

In the article the semigroup is built. The numerical range of its generator covers complex plane. It is provided that such semigroup is bounded.

Key words: semigroup of operators, generator of semigroup, numerical range of operator, resolvent of operator.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, $End\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{1}$$

с линейным оператором A, имеющим плотную в $\mathcal{H}$ область определения $D(A)$.

Обозначим через $T : \mathbb{R}_+ = [0, \infty] \to End\mathcal{H}$ сильно непрерывную полугруппу операторов (полугруппу класса C_0) [1], порождённую оператором A (т. е. A — производящий оператор, или генератор полугруппы T).

Определение 1 [1]. *Числовой областью* оператора A называется множество точек вида $\Theta(A) = \{(Ax, x) : x \in D(A),\ \|x\| = 1\}$.

Обозначим через C_ω полуплоскость$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \le \omega\}$, где $\omega \in \mathbb{R}$.

Определение 2 [2]. Оператор A называется *ограниченным справа*, если существует $\omega \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \le \omega(x, x), x \in D(A). \tag{2}$$

Другими словами, оператор A ограничен справа, если его числовая область лежит в полуплоскости C_ω, т. е. $\Theta(A) \subseteq C_\omega$.

Рассмотрим сопряжённый оператор $A^* : D(A^*) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Из (2) следует, что оператор A^* ограничен справа, если

$$Re(A^*y, y) \le \omega(y, y), y \in D(A^*). \tag{3}$$

Следующий результат содержится в работе [2].

Теорема 1. *Для того, чтобы оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ был генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \mathbb{R}_+ \to End\mathcal{H}$, удовлетворяющей оценке*

$$\|T(t)\| \le e^{\omega t}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия (2) *и* (3).

Как хорошо известно [3], любая полугруппа класса C_0 допускает оценку вида $\|T(t)\| \le Me^{\gamma t}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $M \ge 1$, $t \ge 0$. Отметим, что другой способ оценок полугруппы операторов имеется в статье [4].

Возникает вопрос: всегда ли можно найти такое ω, чтобы имела место оценка (4) для полугруппы? Этот вопрос эквивалентен тому, что числовая область находится в полуплоскости C_ω. В данной работе дан отрицательный ответ и приведён пример полугруппы, для которой числовая область генератора покрывает всю комплексную плоскость, но при этом полугруппа ограничена.

Рассматривается гильбертово пространство $l^2 = \bigoplus\limits_{n\geq 2} \mathbb{C}^n$ последовательностей $x = (x_2, x_3, \ldots)$, где $x_n \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n, y_n)$, x_n, $y_n \in \mathbb{C}^n$. Следовательно, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\|x_n\|^2$.

Рассмотрим последовательность нильпотентных операторов $Q_n \in End\mathbb{C}^n, n \geq 2$, определяемых с помощью квадратной матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Оператор Q_n действует на $z \in \mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$Q_n z = \left(\sum_{k=2}^{n} z_k, 0, 0, \ldots, 0\right), \qquad n \geq 2,$$

и индекс нильпотентности каждого из операторов Q_n равен двум, т.е. $Q_n^2 = 0$.

Выберем последовательность $z \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, следующим образом:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad z_k = \frac{\overline{\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \qquad \alpha \in \mathbb{T}, \quad k \geq 2,$$

где символом $\mathbb{T}(0, r)$ будем обозначать множество точек $\mathbb{T}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$, т. е. окружность радиуса r с центром в нуле, при $r = 1$, через $\mathbb{T}$ обозначим единичную окружность с центром в нуле. Таким образом, $\|x\| = 1$.

Числовая область $\Theta(Q_n)$ нильпотентного оператора Q_n — множество точек, которое определяется из равенств вида [1]

$$(Q_n z, z) = \left\{\left(\sum_{k=2}^{n} z_k\right)\overline{z_1}\right\} = \left\{\frac{\overline{\alpha}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{n-1}{\sqrt{n-1}}\right\} = \left\{\frac{\overline{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{n-1}\right\}, \qquad \|z\| = 1.$$

Следовательно, числовая область $\Theta(Q_n)$ оператора содержит множество $\left\{\frac{\overline{\alpha}}{2}\sqrt{n-1},\ \alpha \in \mathbb{T},\ n \geq 2\right\} = \mathbb{T}\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{n-1}\right)$, $n \geq 2$, т.е. включает в себя окружность радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{n-1}$ с центром в нуле. В силу теоремы Хаусдорфа [1] множество $\Theta(Q_n)$ выпукло, следовательно,$\Theta(Q_n) \supset \mathbb{D}(\frac{1}{2}\sqrt{n-1})$, $n \geq 2$, где $\mathbb{D}(0, \frac{1}{2}\sqrt{n-1})$, $n \geq 2$, — диск радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{n-1}$ с центром в нуле.

Далее рассмотрим операторы

$$A_n = -\frac{\sqrt{n-1}}{4} I_n + Q_n, \qquad n \geq 2.$$

Рассмотрим полугруппу операторов $(T(t), t \geq 0)$, построенную следующим образом:

$$T(t)x = (e^{tA_2}x_2, e^{tA_3}x_3, \ldots), \quad x \in l^2, \quad x_n \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2, \quad t \geq 0.$$

На каждом инвариантном подпространстве $l_n^2 = \{x \in l^2 : x_k = 0,\ k \neq n\}$ рассматривается сильно непрерывная полугруппа $T_n(t) = T(t)|l_n^2$, $t \geq 0$, $n \geq 2$.

Норма оператора T допускает оценку вида

$$\|T(t)x\|^2 = \sum_{n\geq 2}\|e^{tA_n}x_n\|^2 \leq \sup_{t\geq 0}\|e^{tA_n}\|^2 \sum_{n\geq 2}\|x_n\|^2 \leq \sup_{t\geq 0}\|e^{tA_n}\|^2\|x\|^2.$$

Поскольку $e^{tA_n} = e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4}t}e^{Q_n t} = e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4}t}(I + Q_n t)$, то

$$\|e^{tA_n}\| \leq e^{-\frac{\sqrt{n-1}}{4}t}\left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{2}t\right).$$

Из этой оценки получаем, что $\sup\limits_{t\ge 0, n\ge 2} \|e^{tA_n}\| \le \max\limits_{t\ge 0, a\ge 0} e^{\frac{-at}{4}}\left(1+\frac{at}{2}\right)$. Максимум функции достигается в точке $t_0 = \frac{2}{a}$ и равен $\frac{2}{\sqrt{e}}$.

Таким образом, полугруппа T ограничена, так как допускает оценку вида

$$\|T(t)x\|^2 \le \frac{4}{e}\|x\|^2, \qquad t \ge 0. \tag{5}$$

Ввиду того, что эта полугруппа сильно непрерывна на каждом из конечномерных подпространств l_n^2 и эта система подпространств плотна во всём пространстве, из ограниченности полугруппы следует её сильная непрерывность на всём пространстве. Таким образом, T — полугруппа класса C_0.

Пусть оператор A — генератор построенной полугруппы операторов $(T(t), t \ge 0)$. Поскольку числовая область сужения оператора A на каждое инвариантное подпространство l_n^2 содержится в числовой области оператора A, то числовая область $\Theta(A)$ оператора A содержит все множества

$$\Theta(A_n) \supset \mathbb{D}\left(-\frac{\sqrt{n-1}}{2}, \frac{\sqrt{n-1}}{4}\right), \qquad n \ge 2,$$

где $\mathbb{D}\left(-\frac{\sqrt{n-1}}{2}, \frac{1}{4}\sqrt{n-1}\right)$, $n \ge 2$, — диск радиуса $\frac{1}{4}\sqrt{n-1}$ с центром в точке $-\frac{\sqrt{n-1}}{2}$.

Следовательно, числовая область оператора A покрывает всю комплексную плоскость, но при этом полугруппа T ограничена, т. е. $\|T(t)\| \le \frac{2}{\sqrt{e}}$, $t \ge 0$.

Обозначим через $R(i\lambda, A) = (A - i\lambda I)^{-1}$ резольвенту оператора A, где $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A, I — тождественный оператор. Далее покажем, что резольвента оператора A ограничена на мнимой оси, т.е. $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \le C < \infty$, где C — некоторая константа.

Рассмотрим резольвенту $R(i\lambda, A)$ оператора A, построенную следующим образом:

$$R(i\lambda, A)x = (R(i\lambda, A_2)x_2, R(i\lambda, A_3)x_3, \ldots), \quad x \in l^2, \quad x_n \in \mathbb{C}^n, \quad n \ge 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Норма резольвенты допускает оценку вида

$$\|R(i\lambda, A)x\|^2 = \sum_{n\ge 2} \|R(i\lambda, A_n)x_n\|^2 \le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|^2 \sum_{n\ge 2} \|x_n\|^2 \le \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|^2 \|x\|^2,$$

т. е. $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \le \sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\|$, $n \ge 2$.

Обозначим $\lambda_n = -\frac{\sqrt{n-1}}{4}$, $n \ge 2$, тогда из представления

$$R(i\lambda, A_n) = (A_n - i\lambda I) = (\lambda_n + Q_n - i\lambda I) = \frac{1}{\lambda_n - i\lambda}\left(I + \frac{Q_n}{\lambda_n - i\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda_n - i\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q_n)^k}{(\lambda_n - i\lambda)^k} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_n - i\lambda}\left(I + \frac{Q_n}{\lambda_n - i\lambda}\right),$$

следует, что

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A_n)\| \le \frac{1}{|\lambda_n - i\lambda|}\left(1 + \frac{\|Q_n\|}{|\lambda_n - i\lambda|}\right) \le \frac{4}{\sqrt{n-1}}\left(1 + \frac{4\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n-1}}\right) \le 12, \qquad n \ge 2.$$

Следовательно,

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| \le \sqrt{12}. \tag{6}$$

Таким образом, резольвента оператора A ограничена на мнимой оси, несмотря на то что числовая область оператора A покрывает всю комплексную плоскость.

Из приведённых построений следует

Теорема 2. *Оператор A является генератором ограниченной полугруппы операторов T класса C_0, удовлетворяющей оценке* (5), *с резольвентой, удовлетворяющей оценке* (6), *а его числовая область $\Theta(A)$ совпадает со всей комплексной плоскостью $\mathbb{C}$.*

Библиографический список

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 739 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
3. *Engel K., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. N.Y.: Springer, 1999. 586 p.
4. *Баскаков А. Г., Воробьёв А. А., Романова М. Ю.* Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 2. С. 190–203.

УДК 517.54

МОДИФИКАЦИЯ НОВОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ

Р. Б. Салимов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра высшей математики
E-mail: salimov@5354.ru

Предлагается модификация нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической функции в многосвязной области, основанное на построении решения соответствующей однородной задачи, когда определяется аналитическая в области функция по известным граничным значениям ее аргумента применительно к случаю, когда область является круговой.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, индекс задачи, оператор Шварца.

Modification of New Approach to Solution of the Hilbert Boundary Value Problem for Analytic Function in Multi-Connected Circular Domain

R. B. Salimov

Kazan State University of Architecture and Engineering,
Chair of Higher Mathematics
E-mail: salimov@5354.ru

The author offers a new approach to the Riemann – Hilbert boundary value problem in multiconnected domain. The approach bases on certain construction of solution of corresponding homogeneous problem including determination of analytic function by known boundary values of its argument circular domain.

Key words: Riemann – Hilbert boundary value problem, index of a problem, Schwarz's operator.

Предлагается модификация рассмотренного в работе [1] нового подхода к решению краевой задачи Гильберта для аналитической в многосвязной круговой области функции.

Пусть D является $(m+1)$-связной круговой областью, ограниченной полными окружностями $L_0, L_1, \ldots, L_m$ без общих точек, расположенными в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, из которых L_0 охватывает остальные.

Требуется найти функцию $F(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую и однозначную в области D, непрерывно продолжимую на её границу $L = \bigcup\limits_{j=0}^{m} L_j$ по краевому условию

$$\mathrm{Re}\,[(a(t) + ib(t))F(t)] = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t), b(t), c(t)-$ заданные на L действительные функции точки t контура L, удовлетворяющие условию Гёльдера, — функции класса H на L, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ всюду на L.

На L установим положительное направление обхода, при котором область D остается слева. Пусть t_{j0} — фиксированная точка кривой L_j. В дальнейшем для функции $f(t)$, заданной на L_j, под $f(t_{j0}+0)$ и $f(t_{j0}-0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(t)$, когда точка t стремится к t_{j0} соответственно в отрицательном и положительном направлениях.

Краевое условие (1) запишем так

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\nu(t)}F(t)\right] = c(t)/|G(t)|, \tag{2}$$