УДК 501.1

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА СО СЧЁТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА ПЕРВОГО РОДА ЕЁ КОЭФФИЦИЕНТА

Р. Б. Салимов

Доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, salimov.rsb@gmail.com

Даётся решение однородной краевой задачи Римана со счётным множеством точек разрыва первого рода её коэффициента, когда требуется найти две функции, аналитические соответственно в верхней и нижней полуплоскости, по заданному на действительной оси линейному краевому условию, связывающему граничные значения искомых функций.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, индекс задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические соответственно в полуплоскостях $D^+ : \operatorname{Im} z > 0$ и $D^- : \operatorname{Im} z < 0$ плоскости комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}y$ по заданному на действительной оси L краевому условию:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in L, \tag{1}$$

с заданными на L коэффициентом задачи $G(t)$ и свободным членом $g(t)$. В случае, когда индекс задачи, равный $(\arg G(+\infty) - \arg G(-\infty))/2\pi$, конечен, полное решение этой задачи дано в монографиях [1, с. 136–139; 2, с. 118–121].

Начало исследованиям задачи (1) в случае бесконечного индекса было положено в работах Н. В. Говорова, результаты которых вошли в его монографию [3]. Этой проблеме посвящён ряд работ других авторов, отметим из них статьи [4–9], в которых изучены новые случаи задачи Римана с бесконечным индексом.

Краевая задача, соответствующая вышеуказанной при $g(t) \equiv 0$ всюду на L, называется однородной, её краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \qquad t \in L. \tag{2}$$

Рассмотрим решение этой однородной задачи с бесконечным индексом в случае, когда коэффициент $G(t)$ имеет счётное множество точек разрыва первого рода.

Аналогичная задача, когда краевое условие (2) задавалось на луче — части действительной оси, ранее была рассмотрена в работе [10], в которой без доказательства приведен ряд теорем, определяющих решение рассматриваемой однородной задачи.

В настоящей работе для решения краевой задачи (2) с коэффициентом, имеющим счётное множество точек разрыва первого рода, используется метод, аналогичный применённому в книге [2, с. 430–435], когда разрывы коэффициента краевого условия устраняются и исходная краевая задача приводится к задаче с непрерывным коэффициентом.

Примем, что коэффициент $G(t)$ краевого условия (2) есть функция, непрерывная всюду на L, кроме точек разрыва первого рода $t_j, j = \pm1, \pm2, \ldots$, причём $|G(t)| \neq 0$ всюду на L,

$$0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} t_k = \infty,$$
$$-\infty < t_{-k-1} < t_{-k} < \ldots < t_{-1} < 0, \qquad \lim_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty.$$

Будем считать, что краевое условие (2) выполняется всюду на L, исключая точки t_k, t_{-k}, $k = \overline{1, \infty}$. Некоторые уточнения постановки задачи будут приведены ниже.

Примем, что непрерывные в интервалах $t_{-k-1} < t < t_{-k}$, $t_k < t < t_{k+1}$ ветви $\arg G(t)$ выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\arg G(t_k + 0) - \arg G(t_k - 0) = 2\varkappa_k\pi, \qquad 0 < \varkappa_k < 1, \tag{3}$$

$$\arg G(t_{-k} + 0) - \arg G(t_{-k} - 0) = 2\varkappa_{-k}\pi, \qquad 0 < \varkappa_{-k} < 1, \qquad k = \overline{1, \infty}, \tag{4}$$

когда искомые функции $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ в точках t_k, t_{-k} будут иметь интегрируемые особенности (как и в [2, с. 433]).

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k = \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_{-k} = \infty. \tag{5}$$

Кроме того, для определённости в постановке задачи будем считать, что имеют место соотношения

$$\ln|G(t_k+0)| - \ln|G(t_k-0)| = -2\beta_k\pi, \qquad 0 < \beta_k < 1, \tag{6}$$

$$\ln|G(t_{-k}+0)| - \ln|G(t_{-k}-0)| = -2\beta_{-k}\pi, \qquad 0 < \beta_{-k} < 1, \qquad k = \overline{1,\infty}, \tag{7}$$

выбор величин β_k, β_{-k} в которых не влияет на характер особенностей искомых функций в точках t_k, t_{-k}. Будем считать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{-k} < \infty.$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Предположим, что точки разрыва удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty, \tag{8}$$

и рассмотрим следующие бесконечные произведения:

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\varkappa_k + \mathrm{i}\,\beta_k}, \qquad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\varkappa_{-k} + \mathrm{i}\,\beta_{-k}}, \tag{9}$$

в которых [11, с. 275]

$$\begin{gathered} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_j}\right)^{\varkappa_j + \mathrm{i}\,\beta_j} = \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varkappa_j + \mathrm{i}\,\beta_j) \ln\left(1 - \frac{z}{t_j}\right)\right] = \\ = \exp\left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varkappa_j + \mathrm{i}\,\beta_j) \left(\ln\left|1 - \frac{z}{t_j}\right| + \mathrm{i}\,\arg\left(1 - \frac{z}{t_j}\right)\right)\right], \\ j = k \qquad \text{или} \qquad j = -k, \qquad k = \overline{1,\infty}. \end{gathered} \tag{10}$$

Под $\arg\left(1 - \dfrac{z}{t_k}\right)$, $\arg\left(1 - \dfrac{z}{t_{-k}}\right)$ понимаются однозначные ветви, обращающиеся в нуль при $z = 0$ и непрерывные в плоскости z, разрезанной по части действительной оси, соединяющей точки $t = t_k$, $t = +\infty$ для первой ветви и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_{-k}$ для второй ветви, когда

$$\arg\left(1 - \frac{z}{t_k}\right) = -\pi + \arg(z - t_k) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \arg(z - t_k) < 2\pi, \quad \arg t_k = 0, \quad k = \overline{1,\infty}, \tag{11}$$

$$\arg\left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right) = \arg(z - t_{-k}) \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \arg(z - t_{-k}) \leqslant \pi, \quad \arg(-t_{-k}) = 0, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{12}$$

При выполнении условий (8) бесконечные произведения $P_+(z)$ и $P_-(z)$ формул (9) представляют собой функции, аналитические в плоскости z, разрезанной соответственно по лучу действительной оси, соединяющему точки $t = t_1$, $t = +\infty$ и по лучу, соединяющему точки $t = -\infty$, $t = t_{-1}$. В силу аналогии обоснование сказанного достаточно провести относительно произведения $P_+(z)$.

Пусть G — замкнутая ограниченная область, расположенная внутри плоскости z, разрезанной по лучу с концами $t = t_1$, $t = +\infty$ и лежащая в круге $|z| < R$ достаточно большого радиуса R.

Выберем точку t_N множества $\{t_k\}$ так, чтобы для $z \in G$ выполнялись соотношения

$$\left|\frac{z}{t_N}\right| < \frac{R}{t_N} < \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{z}{t_k}\right| < \frac{R}{t_k} < \frac{R}{t_N} < \frac{1}{2}, \qquad k > N,$$

тогда будем иметь [11, с. 276]

$$\left| \ln\left(1-\frac{z}{t_k}\right)\right| < \frac{3}{2}\left|\frac{z}{t_k}\right| < \frac{3}{2}\frac{R}{t_k}, \qquad k>N.$$

Следовательно, для $z\in G$ будет справедливо неравенство

$$|\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k|\left|\ln\left(1-\frac{z}{t_k}\right)\right| < \frac{3R\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{t_k}, \qquad k>N.$$

Здесь в правой части стоят члены сходящегося ряда с положительными членами, получаемого из первого ряда (8), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\ln\left(1-\frac{z}{t_k}\right)$$

представляет собой аналитическую в области G функцию [11, с. 277], поэтому произведение $P_+(z)$ является функцией, аналитической внутри плоскости с вышеуказанным разрезом. Функция $P_+(z)$ представляет собой функцию, аналитическую и в точках берегов указанного разреза, кроме точек t_k, $k=\overline{1,\infty}$.

В формулах (9)–(12) значениям фигурирующих в них функций условимся приписывать верхний знак «+» или «–» соответственно при $z\in D^+$ или $z\in D^-$.

В частности, $P_+(z)=P_+^+(z)$ при $z\in D^+$, $P_+(z)=P_+^-(z)$ при $z\in D^-$. Кроме того, как и в формуле (10)

$$\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}} = \frac{\exp\left[(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\ln\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]}{\exp\left[(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\ln\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]} =$$

$$= \exp\left[\mathrm{i}\,(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\left(\arg\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+ - \arg\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right)\right].$$

Отсюда с учётом (11) имеем:

$$\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}} = \exp\Big[\,\mathrm{i}\,(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\Big(\arg(t-t_k)^+ - \arg(t-t_k)^-\Big)\Big].$$

Поэтому

$$\left.\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}\right|_{t=t_k+0} = \exp\left[\,\mathrm{i}\,(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\,(0-2\pi)\right],$$

$$\left.\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}\right|_{t=t_k-0} = \exp\left[\,\mathrm{i}\,(\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k)\,(\pi-\pi)\right] = 1.$$

Следовательно,

$$\left.\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}\right|_{t=t_k+0} = \left.\frac{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^+\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}{\left[\left(1-\frac{t}{t_k}\right)^-\right]^{\varkappa_k+\mathrm{i}\,\beta_k}}\right|_{t=t_k-0} \exp\left(-2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_k+2\pi\beta_k\right). \qquad (13)$$

Нетрудно проверить, что будет справедливо соотношение, получаемое из последнего заменой k на $(-k)$.

Бесконечное произведение

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left(1-\frac{z}{t_j}\right)^{\varkappa_j+\mathrm{i}\,\beta_j},$$

входящее в первую формулу (9), есть функция аналитическая в точке t_k любого берега вышеуказанного разреза. Поэтому на основании формул (9), (13) получаем:

$$\frac{P_+^+(t_k+0)}{P_+^-(t_k+0)}=\frac{P_+^+(t_k-0)}{P_+^-(t_k-0)}\exp\left(-2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_k+2\pi\beta_k\right). \tag{14}$$

Совершенно аналогично, заменяя в формуле (13) число k на $(-k)$, будем иметь

$$\frac{P_-^+(t_{-k}+0)}{P_-^-(t_{-k}+0)}=\frac{P_-^+(t_{-k}-0)}{P_-^-(t_{-k}-0)}\exp\left(-2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_{-k}+2\pi\beta_{-k}\right). \tag{15}$$

В силу формул (3)–(7) имеем:

$$G(t_k+0)=G(t_k-0)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_k-2\pi\beta_k}, \tag{16}$$

$$G(t_{-k}+0)=G(t_{-k}-0)e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_{-k}-2\pi\beta_{-k}}. \tag{17}$$

Введем в рассмотрение определённую на L функцию

$$G_1(t)=G(t)\frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)}\cdot\frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)}. \tag{18}$$

Как видно из формул (14)–(17), эта функция является непрерывной в точках t_k, t_{-k}, $k=\overline{1,\infty}$.

Краевое условие (2) запишем в виде

$$\Phi^+(t)P_+^+(t)P_-^+(t)=G_1(t)\Phi^-(t)P_+^-(t)P_-^-(t),\qquad t\in L, \tag{19}$$

где $G_1(t)$ – функция, определяемая формулой (18).

При $t<t_1$ согласно (10), (11), замечая, что $\arg(t-t_k)=\pi$, $\arg(1-\frac{t}{t_k})=0$, имеем:

$$\frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)}=1\qquad\text{и}\qquad\arg\frac{P_+^+(t)}{P_+^-(t)}=0. \tag{20}$$

Аналогично при $t>t_{-1}$ в силу (10), (12), замечая, что $\arg(t-t_k)=0$, получим:

$$\frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)}=1\qquad\text{и}\qquad\arg\frac{P_-^+(t)}{P_-^-(t)}=0. \tag{21}$$

В силу (9)–(11) будем иметь

$$\frac{P_+^+(t_k-0)}{P_+^-(t_k-0)}=\exp\left[\sum_{j=1}^{k-1}-2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_j+\sum_{j=1}^{k-1}2\pi\beta_j\right], \tag{22}$$

$$\frac{P_+^+(t_k+0)}{P_+^-(t_k+0)}=\exp\left[\sum_{j=1}^{k}-2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_j+\sum_{j=1}^{k}2\pi\beta_j\right],\qquad k=\overline{1,\infty}. \tag{23}$$

На основании формул (7), (10), (12) аналогично получим:

$$\frac{P_-^+(t_{-k}-0)}{P_-^-(t_{-k}-0)}=\exp\left[\sum_{j=1}^{k}2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_{-j}-\sum_{j=1}^{k}2\pi\beta_{-j}\right], \tag{24}$$

$$\frac{P_-^+(t_{-k}+0)}{P_-^-(t_{-k}+0)} = \exp\left[\sum_{j=1}^{k-1} 2\pi\,\mathrm{i}\,\varkappa_{-j} - \sum_{j=1}^{k-1} 2\pi\beta_{-j}\right], \qquad k=\overline{1,\infty}. \tag{25}$$

Обозначая

$$\Phi_1^+(z) = \Phi^+(z)P_+^+(z)P_-^+(z), \qquad \Phi_1^-(z) = \Phi^-(z)P_+^-(z)P_-^-(z) \tag{26}$$

краевое условие (19) запишем так

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\Phi_1^-(t), \qquad t\in L. \tag{27}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда в последнем краевом условии коэффициент $G_1(t)$, определяемый формулой (18), имеет конечный индекс $\varkappa > 0$ и удовлетворяет условию Гельдера всюду на L. Тогда ограниченное решение однородной краевой задачи (27) определяется формулами [2, с. 119, 120]

$$\Phi_1^+(z) = \chi^+(z)\frac{P_\varkappa(z)}{(z+\mathrm{i}\,)^\varkappa}, \qquad \Phi_1^-(z) = \chi^-(z)\frac{P_\varkappa(z)}{(z+\mathrm{i}\,)^\varkappa}, \tag{28}$$

где $P_\varkappa(z)$ — многочлен степени не выше $\varkappa$ с произвольными постоянными,

$$\chi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \qquad \chi^-(z) = \left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau-\mathrm{i}}{\tau+\mathrm{i}}\right)^{-\varkappa} G_1(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$\Gamma(z) = \Gamma^+(z) \quad \text{при} \quad z\in D^+, \qquad \Gamma(z) = \Gamma^-(z), \quad \text{при} \quad z\in D^-,$$

$$\arg\frac{t-i}{t+i} = 2\arg(t-\mathrm{i}\,),$$

где $\arg(z-\mathrm{i}\,)$ – ветвь, непрерывная в плоскости z, разрезанной по части мнимой оси, соединяющей точки $z=\mathrm{i}\,$, $z=\infty$.

В рассматриваемом случае, как это видно из формул (18), (20)–(25), индекс задачи (2) (коэффициента $G(t)$) в силу (5) будет равен $+\infty$. Решение задачи (2) в классе функций, для которых произведения

$$\Phi^+(z)P_+^+(z)P_-^+(z), \qquad \Phi^-(z)P_+^-(z)P_-^-(z) \tag{29}$$

являются ограниченными функциями при найденных функциях (28), определяется согласно (26) формулами

$$\Phi^+(z) = \frac{\Phi_1^+(z)}{P_+^+(z)P_-^+(z)}, \qquad \Phi^-(z) = \frac{\Phi_1^-(z)}{P_+^-(z)P_-^-(z)} \tag{30}$$

и зависит от $(\varkappa+1)$ произвольных постоянных. Отсюда, в частности, видно, что найденное решение в точках t_k, t_{-k} будет обращаться, вообще говоря, в бесконечность порядка соответственно $\varkappa_k$, $\varkappa_{-k}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема. *Пусть выполняются условия* (5) *и индекс коэффициента краевой задачи* (27) $\varkappa > 0$ *и конечен, тогда краевая задача* (2) *имеет бесконечный индекс, её решение в классе функций, для которых произведения* (29) *ограничены, определяются формулами* (30) *и зависят от* $\varkappa+1$ *произвольных постоянных.*

В случае, когда индекс краевой задачи (27) бесконечен, картина разрешимости задачи (2) будет другой. В частности, если задача (27) имеет бесконечный индекс степенного порядка, меньшего единицы, при исследовании картины разрешимости задачи (2) можно использовать результаты работы [4] или преобразовать краевое условие (27), по аналогии с подходом, применённым в статье [12], устраняя бесконечный разрыв аргумента его коэффициента, что требует специального рассмотрения. Можно показать, что решение (30) обладает следующим свойством. Если числа t_j, $\varkappa_j$, $j=\pm1,\pm2,\ldots$ таковы, что существуют отличные от нуля конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1}\varkappa_j}{x^{\varkappa_+}}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1}\varkappa_{-j}}{x^{\varkappa_-}},$$

в которых $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ — известные положительные числа, не превышающие $1/2$, то для любого достаточно малого числа $\delta > 0$ будем иметь

$$\lim_{\rho\to+\infty} \Phi^+(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}) = 0, \qquad \delta < \theta < \pi - \delta,$$

$$\lim_{\rho\to+\infty} \Phi^-(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}) = 0, \qquad -\pi + \delta < \theta < -\delta.$$

Сказанное вытекает из соответствующих свойств функций (9).

Библиографический список

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М. : Наука, 1977.
3. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М. : Наука, 1986.
4. *Толочко М. Э.* О разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1972. №5. С. 34–41.
5. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости // Докл. АН БССР. 1975. Т. 19, № 10. С. 872–875.
6. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 544–547.
7. *Алехно А. Г.* Достаточные условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань, 2002. Т. 14. С. 71–77.
8. *Гарифьянов Ф. Н.* Об одном особом случае задачи Римана // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1984. Т. 22. С. 66–68.
9. *Кац Б. А.* Об одной задаче Римана с осцилирующим коэффициентом // Тр. семинара по краевым задачам. Казань, 1977. Т. 14. С. 110–120.
10. *Журавлева М. И.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом со счетным множеством разрывов первого рода её коэффициента // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 1. С. 15–17.
11. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций : в 2 т. Т. 1. М. : Наука, 1987.
12. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Метод регуляризующего множителя для решения одной задачи Гильберта с бесконечным индексом // Изв. вузов. Матем. 2001. № 4. С. 76–79.

The Solution of the Homogeneous Riemann Boundary Value Problem with a Countable Set of Points of Discontinuity of the First Kind its Coefficient

R. B. Salimov

Kazan State Architecture and Building University, 1, Zelenaya str., 420043, Kazan, Russia, salimov.rsb@gmail.com

We consider the Riemann homogeneous boundary value problem with a countable set of points of discontinuity of the first kind in the case, when it is required to find two functions, analytic, respectively, in the upper and lower half-plane, for a given linear boundary condition on the real axis, connecting the boundary values of the unknown functions.

Key words: Riemann boundary value problem, analytic functions, finite index.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow, Nauka, 1968, 511 p. (in Russian).
2. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka, 1977, 640 p. (in Russian).
3. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka, 1986, 239 p. (in Russian).
4. Tolochko M. E. About the solvability of the homogeneous Riemann boundary value problem for the half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 1972, no. 5, pp. 34–41 (in Russian).
5. Sandrygailo I. E. On Hilbert – Rieman boundary value problem for half-plane with infinite index. *Izvestiya Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 1974, no. 6, pp. 872–875 (in Russian).
6. Monahov V. N., Semenko E. V. Boundary value problem with infinite index in Hardy spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 291, no. 3, pp. 544–547 (in Russian).
7. Alehno A. G. Sufficient conditions for the solvability of homogeneous Riemann boundary value problem with infinite index. *Trudy matematicheskogo tsentra imeni N. I. Lobachevskogo*, Kazan, 2002, vol. 14, pp. 71–77 (in Russian).
8. Garifianov F. N. About a special case of the Riemann problem. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1984, no 22, pp. 66–68 (in Russian).
9. Katc B. A. About Riemann problem with an oscillating coefficient. *Trydu seminara po kraevum zadacham*. Kazan, 1977, no. 14, pp. 110–120 (in Russian).
10. Zhuravleva M. I. Homogeneous Riemann boundary problem with infinite index with scating many discontinuities of the first kind itfactor. *Dokl. Akad. Nauk*

SSSR, 1973, vol. 210, no. 1, pp. 15–17 (in Russian).
11. Markushevich A. I. *The theory of analytic functions : in 2 vol.* Moscow, Nauka, 1968, vol. 2, 624 p. (in Russian).
12. Salimov R. B., Shabalin P. L. The regularizing factor method for solving a homogeneous Hilbert problem with an infinite index. *Russian Math.* [Izvestiya VUZ. Matematika], 2001, vol. 45, iss. 4, pp. 74–77.

УДК 517.95; 517.984

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Хромов

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

В статье методом Фурье дается классическое решение смешанной задачи для волнового уравнения с комплексным потенциалом при минимальных условиях гладкости начальных данных. Используется резольвентный подход, состоящий в привлечении в формальном решении метода Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты соответствующей спектральной задачи по спектральному параметру, не требующий никакой информации о собственных и присоединенных функциях и использующий лишь главную часть асимптотики собственных значений. Существенно используется прием А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье. Граничные условия таковы, что спектральная задача допускает кратный спектр и бесконечное множество присоединенных функций, что создает дополнительные трудности при анализе формального решения.

Ключевые слова: формальное решение, спектральная задача, резольвента, классическое решение.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая публикация приурочена к 150-летию со дня рождения выдающихся отечественных ученых В. А. Стеклова (1884–1926) и А. Н. Крылова (1883–1945), внесших весомый вклад в решение смешанных задач методом Фурье.

Обоснование метода Фурье в задачах математической физики традиционно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, полученных из него почленным дифференцированием нужное число раз. В. А. Стеклов, впервые давший строгое обоснование метода Фурье, придерживался этой точки зрения [1, с. 224], которая сделала метод Фурье очень популярным. Было проведено большое количество исследований и достигнуты значительные успехи.

Информация обзорного характера содержится, в частности, в книгах И. Г. Петровского [2], В. И. Смирнова [3], О. А. Ладыженской [4], В. А. Ильина [5] (см. также [6]), В. А. Чернятина [7]. Недостатком такого подхода является требование завышенной гладкости на начальные данные. Выход из этого положения намечен А. Н. Крыловым в его исследованиях по ускорению сходимости рядов Фурье и им подобных [8]. Суть его приема состояла в том, что изучение вопроса о дифференцировании ряда Фурье решается путем разбиения его на два ряда, один из которых точно суммируется (в этом случае не надо прибегать к почленному дифференцированию), а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать. На ряде прикладных задач им были успешно преодолены трудности, связанные с невозможностью почленного дифференцирования. Приведем его слова: «Изложенный прием усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от функций, ими представляемых, может служить для доказательства или проверки того, что представляемая рядом функция действительно удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, как решение коего она найдена, хотя бы самый ряд и нельзя было дифференцировать почленно требуемое число раз.» [8, с. 227].

В. А. Чернятин [7] приемом А. Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций успешно исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в ряде случаев эти условия гладкости стали минимально возможными. Переход от формального решения к новому виду, вытекающему из исследований А. Н. Крылова и В. А. Чернятина, есть качественно новый шаг в методе Фурье, позволяющий с исчерпывающей полнотой исследовать краевые задачи методом Фурье и ставящий много новых вопросов в теории функций.