4. Bakhbukh M., Nikishin E. M. The convergence of the double Fourier series of continuous functions. *Siberian Math. J.*, 1973, vol. 14, iss. 6, pp. 832–839. DOI: 10.1007/BF00975888
5. Bakhvalov A. N. Divergence everywhere of the Fourier series of continuous functions of several variables. *Sb. Math.*, 1997, vol. 188, no. 8, pp. 1153–1170. DOI: 10.1070/SM1997v188n08ABEH000240.
6. Bakhvalov A. N. λ-divergence of the Fourier series of continuous functions of several variables. *Math. Notes*, 2002, vol. 72, iss. 3–4, pp. 454–465. DOI: 10.4213/mzm438.
7. Stepanec A. I. Estimates of deviations of partial Fourier sums on classes of continuous periodic functions of several variables. *Math. USSR Izv.*, 1981, vol. 17, iss. 2, pp.369–403. DOI: 10.1070/IM1981v017n02ABEH001364.
8. *Zygmund A.* Trigonometric series. Vol. 2. Cambridge Univ. Press, 1959.

УДК 517.51

СИСТЕМЫ СЖАТИЙ И СДВИГОВ В ЗАДАЧЕ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

А. А Барышев[1], Д. С. Лукомский[2], С. Ф. Лукомский[3]

[1]Кандидат физико-математических наук, инженер-программист, ООО «Геофизтехника», Саратов, baryshevaa@gmail.com,
[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru
[3]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, lukomskiids@info.sgu.ru

Рассматривается новый подход к построению двумерных p-ичных систем Хаара и Виленкина. Для полученных систем разработаны быстрые алгоритмы преобразования Фурье – Хаара и Фурье – Виленкина. Проведен сравнительный анализ разработанных алгоритмов в задаче сжатия изображения.

Ключевые слова: преобразование Хаара, преобразование Виленкина, компактная группа, сжатие изображений.

ВВЕДЕНИЕ

В проблеме сжатия изображений можно выделить три направления — сжатие без потери данных, с потерями и смешанные методы. К первому направлению можно отнести RLE и LZW-алгоритмы, кодирование по Хаффману и т. д. [1]. Группа вторых методов основана на представлении исходного изображения как двумерного массива данных и разложения его по какой-либо системе функций. Из смешанных методов наиболее известен стандарт сжатия данных JPEG, где применяется дискретное косинус-преобразование, а затем кодирование по Хаффману. Основной вклад в таких смешанных методах дает сжатие с потерями, и задача поиска ортогональной системы, обеспечивающей наилучшее сжатие, по-прежнему привлекает внимание. Широкое распространение для решения этой задачи в последнее время получили вейвлет-базисы [2]. Настоящая работа посвящена сравнительному анализу алгоритмов сжатия изображений с помощью обобщенной системы Хаара и системы Виленкина. Функция Хаара на поле p-адических чисел впервые появилась в работе С. В. Козырева [3]. Обобщенные функции Хаара на нуль-мерных группах были введены в работе [4]. В статье [5] предложен способ построения функций Хаара на произведении нуль-мерных групп. Он основан на сведении произведения групп к новой группе с новой основной цепочкой подгрупп. Такую основную цепочку можно выбирать разными способами, в результате получаются различные двумерные системы Хаара. Каждая такая система определяется некоторыми целыми параметрами (ν, s). В статье для любых допустимых значений этих параметров строится система Хаара, приводится быстрый алгоритм дискретного преобразования по этой системе. Приводится алгоритм быстрого дискретного преобразования Виленкина, основанный на той же идее сведения произведения групп к одномерной. Для сравнения алгоритмов сжатия по таким системам с косинус-преобразованием были написаны на языке СИ программы, реализующие эти алгоритмы, вычислены среднеквадратичное отклонение MSE (mean square error) и коэффициент PSNR (peak signal-to-noise ratio). Сравнительный анализ по этим системам и тригонометрической для традиционных изображений lenna и flowers приводится в последнем параграфе.

1. БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ХААРА НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ

Пусть p — простое число, $(G, \dot{+})$ — p-ичная компактная нуль-мерная группа, $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ — основная цепочка, $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$ — базисная последовательность, $(G_n^{\perp})_{n=0}^{\infty}$ — цепочка аннуляторов,

$r_n \in G_{n+1}^{\perp} \setminus G_n^{\perp}$ — функции Радемахера. Определим функции Хаара на нуль-мерной группе $(G, \dot{+})$ [5] следующим образом:

$$H_0 \equiv 1; \qquad H_{jp^n+k}(x) = r_n^j(x \dot{-} q)\mathbf{1}_{G_n}(x \dot{-} q), \qquad k = 0, 1, \ldots, p^n - 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, p - 1,$$

где k и q связаны соотношениями

$$k = a_{n-1} + a_{n-2}p + \cdots + a_1 p^{n-2} + a_0 p^{n-1}, \qquad q = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}.$$

Пусть $S_{p^{n+1}} = \sum\limits_{l=0}^{p^{n+1}-1} c_l H_l$. Ясно, что $S_{p^{n+1}}$ постоянны на смежных классах $G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$, где $q_{n+1} = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n$, $a_i = \overline{0, p-1}$, и пусть $\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}) = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n)$ — значения $S_{p^{n+1}}$ на смежных классах по подгруппе G_{n+1}. Смежный класс $G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$ лежит внутри смежного класса $G_n \dot{+} q_n = G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$. Функции Хаара $H_{jp^n \dot{+} q_n}$ при $q_n = a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$ будем нумеровать векторным индексом и писать $H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$. Функции Хаара $H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ отличны от нуля на смежных классах $G_n \dot{+} q_n = G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1}$ и постоянны на смежных классах $G_{n+1} \dot{+} q_n \dot{+} a_n g_n$, а именно

$$H_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}(G_{n+1} \dot{+} q_n \dot{+} a_n g_n) = \varepsilon^j_{a_n}, \qquad \varepsilon_{a_n} = e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot a_n}.$$

Записывая равенство

$$S_{p^{n+1}}(x) = S_{p^n}(x) + \sum_{l=p^n}^{p^{n+1}-1} c_l H_l(x)$$

при $x \in G_{n+1} \dot{+} q_{n+1}$, приходим к равенству

$$\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = \lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} \cdot \varepsilon^j_{a_n}, \tag{1}$$

в котором $\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} = S_{p^{n+1}}(G_{n+1} \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_n g_n)$, $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}} = S_{p^n}(G_n \dot{+} a_0 g_0 \dot{+} a_1 g_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} g_{n-1})$. При каждом кортеже $(a_0 a_1 \ldots a_{n-1})$ равенства (1) есть система из p линейных уравнений ($a_n = \overline{0, p-1}$ — номера уравнений) относительно неизвестных

$$\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, c_{1, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, c_{2, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}, \ldots, c_{p-1, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

Матрица этой системы имеет вид $\mathscr{E} = (\varepsilon_i^j)_{i,j=0}^{p-1}$, причем матрица $\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}$ является унитарной, значит, обратная $\left(\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{-1} = \overline{\mathscr{E}\frac{1}{\sqrt{p}}}^T$.

Решая все системы (1) при фиксированном n находим коэффициенты Фурье – Хаара $c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ и значения $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ частичной суммы $S_{p^n}(x)$ с номером в p раз меньше. Найденным коэффициентам $c_{j, p^n, a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ присваиваем векторные номера $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, j)$ и помещаем в $n+1$-мерный массив коэффициентов Фурье – Хаара $c(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j_n^+)$. Значения $\lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}}$ помещаем в $n+1$-мерный массив $\lambda(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0)$ с номерами $(a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, 0)$. Таким образом, после 1-го шага получаем массив $c^{(n)}(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, j^+)$, в котором элементы с номерами $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1} = \overline{0, p-1}$, $j^+ = \overline{1, p-1}$ есть найденные коэффициенты Фурье – Хаара, и массив значений $\lambda^{(n)}(j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, 0)$, в котором заданы элементы с номерами $(j_0, j_1, \ldots j_{n-1}, 0)$. Повторяя эти рассуждения, получаем после $n+1$-го шага схему для нахождения коэффициентов Фурье – Хаара:

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda^{(n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_n} & \longrightarrow & \lambda^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, 0} & \longrightarrow & \lambda^{(n-1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, 0, 0} & \cdots \longrightarrow & \lambda^{(0)}_{0, 0, \ldots, 0, 0} = c_0 \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & c^{(n)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-1}, j^+} & & c^{(n-1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{n-2}, j^+, 0} & & c^{(0)}_{j^+, 0, \ldots 0, 0}
\end{array}$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ – ХААРА НА ПРОИЗВЕДЕНИИ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$, (G_n) — основная цепочка, (g_n) — базисная последовательность. Для наглядности можно считать

$$G_n = \left[0, \frac{1}{p_n}\right), \qquad g_n = \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Построим систему Хаара на произведении групп $G \times G$. Для этого строим подгруппы

$$\mathfrak{G}_{2n+1} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (G_{n+1} \times G_{n+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{2n+1}), \qquad \mathbf{g}_{2n+1} = (g_n, \nu g_n) = \left(\frac{1}{p^{n+1}}, \frac{\nu}{p^{n+1}}\right),$$

$$\mathfrak{G}_{2n} = \bigsqcup_{j=0}^{p-1} (\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} j\mathbf{g}_{2n}), \qquad \mathbf{g}_{2n} = (g_n, (\nu \dot{+} s) g_n), \qquad s = \overline{1, p-1}.$$

Знак $\dot{+}$ в определении вектора $\mathbf{g}_{2n}$ означает сложение по модулю p. Очевидно, что $\mathfrak{G}_{2n} = G_n \times G_n$. Известно [5], что подгруппы $\mathfrak{G}_n$ образуют основную цепочку. На произведении $G \times G$ по цепочке подгрупп $\mathfrak{G}_n$ построим функции

$$\mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1) = r_n(\gamma_0, x_0) \cdot r_n(\gamma_1, x_1), \qquad \mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1) = r_n(\xi_0, x_0) \cdot r_n(\xi_1, x_1),$$

где $\gamma_0 + \gamma_1 \nu \equiv 1 \bmod p$, $\xi_0 + \xi_1 \nu \ \equiv 0 \bmod p$, $\xi_1 s \equiv 1 \bmod p$, $\xi_1 \neq 0$.

Теорема 1 [5]. *Функции $(\mathbf{r}_{2n}, \mathbf{r}_{2n+1})$ образуют систему Радемахера и выполнены равенства*

$$\mathbf{r}_{2n}(\mathbf{g}_{2n}) = \mathbf{r}_{2n}(g_n, (\nu + s) g_n) = r_n(\xi_0, g_n) r_n(\xi_1, (\nu + s) g_n) = (r_n, g_n)^{\xi_0 + \xi_1(\nu + s)} = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

$$\mathbf{r}_{2n+1}(\mathbf{g}_{2n+1}) = \mathbf{r}_{2n+1}(g_n, \nu g_n) = r_n(\gamma_0, g_n) r_n(\gamma_1, \nu g_n) = (r_n, g_n)^{\gamma_0 + \gamma_1 \nu} = (r_n, g_n) = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Запишем функции Хаара на группе $\mathfrak{G} = G \times G$ с основной цепочкой подгрупп $(\mathfrak{G}_{2n}, \mathfrak{G}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$, базисной последовательностью $(\mathbf{g}_{2n}, \mathbf{g}_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ и системой Радемахера $(\mathbf{r}_{2n}(x_0, x_1), \mathbf{r}_{2n+1}(x_0, x_1))_{n=0}^{\infty}$ в виде

$$H_{jp^n + k}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q}) \mathbf{1}_{\mathfrak{G}_n \dot{+} \mathbf{q}}(x) \ \ (j = \overline{1, p-1}).$$

Здесь $\mathbf{q} = a_0 \mathbf{g}_0 \dot{+} a_1 \mathbf{g}_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{n-1} \mathbf{g}_{n-1}$, число k определяется по элементу $\mathbf{q}$ равенством $k = a_{n-1} + a_{n-2} p + \ldots + a_0 p^{n-1}$. Поэтому функцию H_{jp^n+k} для удобства запишем в векторной нумерации:

$$H_{j, p^n, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}}(x) = \mathbf{r}_n(\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{q}) \mathbf{1}_{G_n \dot{+} q}(\mathbf{x}).$$

Частичную сумму $S_{p^{2n+2}} = \sum\limits_{l=0}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x})$ представим в виде суммы

$$S_{p^{2n+2}} = \sum_{l=0}^{p^{2n+1}-1} c_l H_l(\mathbf{x}) + \sum_{l=p^{2n}+1}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x}) = S_{p^{2n+1}}(\mathbf{x}) + \sum_{l=p^{2n}+1}^{p^{2n+2}-1} c_l H_l(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Сумма $S_{p^{2n+1}}(\mathbf{x})$ постоянна на смежных классах:

$$\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \mathbf{g}_{2n-1} a_{2n-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0 = \mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{q}. \tag{3}$$

Сумма $S_{p^{2n+2}}(\mathbf{x})$ постоянна на смежных классах:

$$\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_1 a_1 \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0 = \mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{q}. \tag{4}$$

Обозначим значения $S_{p^{2n+1}}$ и $S_{p^{2n+2}}$ на смежных классах (4) и (3) следующим образом:

$$S_{p^{2n+1}}(\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0) = \lambda^{(2n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n}},$$

$$S_{p^{2n+2}}(\mathfrak{G}_{2n+2} \dot{+} \mathbf{g}_{2n+1} a_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0) = \lambda^{(2n+2)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n} a_{2n+1}}.$$

На смежном классе $\mathfrak{G}_{2n+1} \dot{+} \mathbf{g}_{2n} a_{2n} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{g}_0 a_0$ с учетом равенства (2) имеем:

$$\lambda^{(2n+2)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n} a_{2n+1}} = \lambda^{(2n+1)}_{a_0 a_1 \ldots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j, p^{2n+1}, a_0 a_1 \ldots a_{2n}} \mathbf{r}^j_{2n+1}(\mathfrak{G}_{2n+1}) =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} \mathbf{r}^j_{2n+1}(\mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}a_{2n+1}\mathbf{g}_{2n+1}) =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} (\mathbf{r}_{2n+1},\mathbf{g}_{2n+1})^{a_{2n+1}\cdot j} =$$

$$= \lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}} \varepsilon^j_{a_{2n+1}} \qquad (a_{2n+1} = \overline{0,p-1}), \tag{5}$$

здесь $\varepsilon_{a_{2n+1}} = e^{\frac{2\pi i}{p}a_{2n+1}}$.

Равенства (5) при фиксированных $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ есть система p линейных уравнений, относительно неизвестных $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$, $c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$ $(j = \overline{1,p-1})$. Решая системы (5) при фиксированном n, найдем коэффициенты $C_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$ и значения $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$ суммы $S_{p^{2n+1}}$ на смежных классах $\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{g}_{2n}a_{2n}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbf{g}_0a_0$.

Запишем смежный класс $\mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}\mathbf{g}_{2n+1}a_{2n+1}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbf{g}_0a_0$ как произведение одномерных смежных классов. Учитывая, что $\mathbf{g}_{2k} = (g_k, (\nu\dot{+}s)g_k)$ и $\mathbf{g}_{2k+1} = (g_k, \nu g_k)$, имеем:

$$\mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}\mathbf{q} = \mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}\sum_{k=0}^{2n+1} a_k\mathbf{g}_k = \mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}(g_n,\nu g_n)a_{2n+1}\dot{+}(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}\dot{+}\dots$$

$$\dots\dot{+}(g_0,\nu g_0)a_1\dot{+}(g_0,(\nu\dot{+}s)g_0)a_0 = G_{n+1}\times G_{n+1} + \left(\sum_{k=0}^{n} g_k(a_{2k}\dot{+}a_{2k+1}) \sum_{k=0}^{n} g_k((\nu\dot{+}s)a_{2k}\dot{+}\nu a_{2k+1})\right).$$

При переходе на отрезок заменяем g_k на $1/p^{k+1}$ и получаем:

$$\mathfrak{G}_{2n+2}\dot{+}\mathbf{q} = G_{n+1}\times G_{n+1} + \left(\frac{1}{p^{n+1}}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} p^{n-k}(a_{2k}\dot{+}a_{2k+1})}_{=k^{(0)}}, \frac{1}{p^{n+1}}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} p^{n-k}(\nu a_{2k+1}\dot{+}(\nu\dot{+}s)a_{2k})}_{=k^{(1)}}\right) =$$

$$= \left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right)\times\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right) + \left(\frac{k^{(0)}}{p^{n+1}},\frac{k^{(0)}}{p^{n+1}}\right). \tag{6}$$

На практике изображение задается матрицей интенсивностей пикселей, которые нумеруются по горизонтали и вертикали, т. е. заданы числа $\lambda^{(2n+2)}_{k^{(0)},k^{(1)}}$. Поэтому вначале надо от номеров пикселей $(k^{(0)}, k^{(1)})$ перейти к кортежам $a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$. Для этого по p-ичным разложениям чисел $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$

$$k^{(0)} = \beta^{(0)}_0 + \beta^{(0)}_1 p + \dots + \beta^{(0)}_n p^n, \qquad k^{(1)} = \beta^{(1)}_0 + \beta^{(1)}_1 p + \dots + \beta^{(1)}_n p^n,$$

получаем системы уравнений

$$\begin{cases} a_{2k}\dot{+}a_{2k+1} = \beta^{(0)}_{n-k}, \\ \nu a_{2k+1}\dot{+}(\nu\dot{+}s)a_{2k} = \beta^{(1)}_{n-k}, \end{cases}$$

в которых операция $\dot{+}$ есть сложение по модулю p. Решая при каждом k такую систему, находим a_{2k} и a_{2k+1}. Решая систему (5), находим значения $\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}}$, т. е. значения суммы $S_{p^{2n+1}}$ на смежных классах (3) и коэффициенты $c_{j,p^{2n+1},a_0a_1\dots a_{2n}}$. Теперь мы должны найти значения суммы $S_{p^{2n}}$ на смежных классах $(\mathfrak{G}_{2n}\dot{+}\mathbf{g}_{2n-1}a_{2n-1}\dot{+}\mathbf{g}_{2n-2}a_{2n-2}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbf{g}_1a_1\dot{+}\mathbf{g}_0a_0)$ и коэффициенты $c_{j,p^{2n},a_0a_1\dots a_{2n-1}}$.

Обозначим

$$S_{p^{2n}}(\mathfrak{G}_{2n}\dot{+}\mathbf{g}_{2n-1}a_{2n-1}\dot{+}\mathbf{g}_{2n-2}a_{2n-2}\dot{+}\dots\dot{+}\mathbf{g}_1a_1\dot{+}\mathbf{g}_0a_0) = \lambda^{(2n)}_{a_0a_1\dots a_{2n}a_{2n-1}}.$$

Приравнивая значения на соответствующих смежных классах, получаем равенства, которые дают систему

$$\lambda^{(2n+1)}_{a_0a_1\dots a_{2n}} = \lambda^{(2n)}_{a_0a_1\dots a_{2n}a_{2n-1}} + \sum_{j=1}^{p-1} c_{j,p^{2n},a_0a_1\dots a_{2n-1}}\varepsilon^j_{a_{2n}}, \quad a_{2n=\overline{0,p-1}} \tag{7}$$

с той же матрицей $\mathscr{E}$. Формулы для пересчета смежных классов $\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{q}$ на отрезок $[0,1]$ отличаются от (6) и задаются следующим образом:

$$\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\mathbf{q}=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}\sum_{k=0}^{2n}a_k g_k=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}+(g_{n-1},\nu g_{n-1})a_{2(n-1)+1}+$$
$$+(g_{n-1},(\nu+s)g_{n-1})a_{2(n-1)}+\cdots+(g_0,\nu g_0)a_1+(g_0,(\nu\dot{+}s)g_0)a_0=$$
$$=\mathfrak{G}_{2n+1}\dot{+}(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}g_k(a_{2k}\dot{+}a_{2k+1}),\sum_{k=0}^{n-1}g_k((\nu\dot{+}s)a_{2k}\dot{+}\nu a_{2k+1})\right)=$$
$$=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}(G_{n+1}\times G_{n+1}\dot{+}a_{2n+1}(g_n,\nu g_n))+(g_n,(\nu\dot{+}s)g_n)a_{2n}+\sum_{k=0}^{n-1}g_k(a_{2k}+a_{2k+1}),$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}((\nu+\beta)a_{2k}+\nu a_{2k+1})g_k=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}\left(\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right)\times\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right)\dot{+}\left(\sum_{k=0}^{n}g_k(a_{2k}+a_{2k+1}),\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{k=0}^{n}g_k((\nu\dot{+}s)a_{2k}+\nu a_{2k+1})\right)\right)=\bigsqcup_{a_{2n+1}=0}^{p-1}\left(\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right]\times\left[0,\frac{1}{p^{n+1}}\right]\left(\frac{k^{(0)}}{p^{n+1}},\frac{k^{(1)}}{p^{n+1}}\right)\right),$$

где $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$ те же, что и в (6). Таким образом, мы перешли от массива размерности $p^{n+1}\times p^{n+1}$ к массиву размерности $p^n\times p^n$ и на этом первый шаг алгоритма закончен. После $n+1$-го шага получаем матрицу из коэффициентов Фурье.

Аналогичным образом строятся одномерное и двумерное преобразования по системе Виленкина. Только в этом случае, в отличие от преобразования Хаара, где большая часть коэффициентов находится после каждой итерации, здесь все коэффициенты получаются после последнего шага.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Приведем алгоритм сжатия, основанный на системах Хаара и Виленкина.

1. Исходное изображение разбивается на квадраты размерности $p^n\times p^n$, где p — простое число, а n — натуральное. Затем выделяются цветовые каналы из RGB палитры и выполняются преобразования к каждому каналу для каждого квадрата в отдельности.

2. Проводится анализ коэффициентов, выделяется определенное количество наибольших по модулю, а остальные коэффициенты обнуляются.

3. К оставшимся массивам данных применяется обратное преобразование.

4. Для полученного изображения проводится сравнение с исходным и вычисляется погрешность отклонения.

Для оценки погрешности воспользуемся следующими критериями. Пусть $K(i,j)$ — исходное изображение, $N(i,j)$ — восстановленное изображение. Определим среднеквадратичное отклонение MSE (mean square error) между изображениями по формуле

$$MSE=\frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(N(i,j)-K(i,j)\right)^2,$$

где m и n — ширина и высота картинки.

Далее введем величину

$$PSNR=10\log\left(\frac{255^2}{MSE}\right).$$

PSNR (peak signal-to-noise ratio) — это соотношение между максимумом возможного значения сигнала и мощностью шума, искажающего значения сигнала. Таким образом, чем меньше MSE и чем больше PSNR — тем меньше отклонение восстановленного изображения от оригинала.

Для тестирования алгоритма рассматривались изображения lenna (табл. 1) и flowers (табл. 2). Кроме сравнения между собой преобразований Хаара и Виленкина было проведено сравнение с дискретным косинус-преобразованием. Рассматривались разные степени сжатия, т. е. различный процент обнуленных коэффициентов. Индекс MSE приводится для каждой цветовой компоненты отдельно.

Таблица 1

Значения MSE и PSNR при сжатии изображения lenna

Система, используемая для сжатия	Сжатие в 38 раз				Сжатие в 50 раз			
	PSNR	MSE			PSNR	MSE		
Дискретное косинус-преобразование	21.14	41.39	51.86	73.46	2.87	3953	2056	5193
Система Хаара	19.6	187.24	25.37	25.21	9.6	1876	3412	3215
Система Виленкина	24.02	61.26	12.24	12.32	23.66	61.26	15.99	16.07

Таблица 2

Значения MSE и PSNR при сжатии изображения flowers

Система, используемая для сжатия	Сжатие в 38 раз				Сжатие в 50 раз			
	PSNR	MSE			PSNR	MSE		
Дискретное косинус-преобразование	22.14	42.25	31.42	54.74	7.89	1422	818	1283
Система Хаара	20.76	138.36	29.23	13.76	15.6	876	734	628
Система Виленкина	24.88	55.52	10.27	4.68	24.19	55.52	18.38	8.62

Таким образом, сжатие с использованием системы Виленкина более эффективно, чем дискретное косинус-преобразование и преобразование по системе Хаара.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект №* 13-01-00102).

Библиографический список

1. *Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В.* Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2002.
2. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображения в действии. М. : Триумф, 2003.
3. *Козырев С. В.* Вейвлет анализ как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 149–158. DOI: 10.4213/im381.
4. *Лукомский С. Ф.* О рядах Хаара на компактной нуль-мерной группе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 14–19.
5. *Lukomskii S. F.* Haar system on a product of zero-dimensional compact groups // Central Europ. J. Math. 2011. Vol. 9, № 3. С. 627–639.

Systems of Scales and Shifts in the Problem Still Image Compression

A. A. Baryshev[1], D. S. Lukomskii[2], S. F. Lukomskii[2]

[1]LLC «Geofiztekhnika», 1, Lomonosov str., Saratov, 410041, Russia, baryshevaa@gmail.com,
[2]Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, lukomskiids@info.sgu.ru, lukomskiisf@info.sgu.ru

A new approach to the construction of two-dimensional Haar and Vilenkin considered. To the obtained systems fast algorithms Fourier – Haar and Fourier – Vilenkin developed. Comparative analysis of algorithms developed in the problem still image compression performed.

Key words: Haar transform, Vilenkin transform, compact group, image processing.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00102).

References

1. Vatolin D., Ratushnyak A., Smirnov M., Yoockin V. Data compression methods. Structure of archivers, compression of images and video. Moscow, Dialog–MIFI Publ., 2002 (in Russian).
2. Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques. Bellinham, WA, SPIE Optical Engineering Press, 1999.
3. Kozyrev S. V. Wavelet theory as p-adic spectral analysis. *Izv. Math.*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 367–376. DOI: 10.1070/IM2002v066n02ABEH000381.
4. Lukomskii S. F. Haar series on compact zero-dimensional abelian group. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2009, vol. 9, iss. 1, pp. 14–19 (in Russian).
5. Lukomskii S. F. Haar system on a product of zero-dimensional compact groups. *Central Europ. J. Math.*, 2011, vol. 9, no. 3, pp. 627–639.