References

1. Taibleson M. H. *Fourier Analysis on Local Fields*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1975.
2. Jiang H., Li D., Jin N. Multiresolution analysis on local fields. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, vol. 294, pp. 523–532.
3. Behera B, Jahan Q. Multiresolution analysis on local fields and characterization of scaling functions. *Adv. Pure Appl. Math.*, 2012, vol. 3, pp. 181–202.
4. Behera B., Jahan Q. Biorthogonal Wavelets on Local Fields of Positive Characteristic. *Communications in Math. Anal.*, 2013, vol. 15, no 2, pp. 52–75.
5. Behera B, Jahan Q. Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 395, pp. 1–14.
6. Lidl R., Niederreiter H. *Finite fields*. Encyclopedia Math. Appl., vol. 20, Reading, Mass., Addison-Wesley, 1983.
7. Gelfand I. M., Graev M. I., Piatetski-Shapiro I. I. *Teoriia predstavlenii i avtomorfnye funktsii* [Representation Theory and Automorphic Functions]. Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
8. Lukomskii S. F. Step refinable functions and orthogonal MRA on Vilenkin groups. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 42–65.
9. Lukomskii S. F. *Trees in Wavelet analysis on Vilenkin groups*. Preprint arxiv.org /abs/1303.5635.
10. Farkov Yu. A. Orthogonal wavelets on direct products of cyclic groups. *Math. Notes*, 2007, vol. 82, no. 6, pp. 843–859. DOI: 10.1134/S0001434607110296.

УДК 517.518

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $\mathbf{P}$-ИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ И VMO

С. С. Волосивец

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, VolosivetsSS@mail.ru

В настоящей статье доказаны некоторые теоремы вложения типа П. Л. Ульянова для пространств Гельдера, связанных с метриками $\mathbf{P}$-ичных пространств Харди, VMO, а также L^1 и равномерной метрикой на группах Виленкина. Установлена их неулучшаемость. Даны достаточные условия сходимости ряда Фурье по мультипликативной системе в пространстве Харди и в равномерной метрике.

Ключевые слова: $\mathbf{P}$-ичное пространство Харди, $\mathbf{P}$-ичное пространство VMO, теоремы вложения, неулучшаемость, равномерная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, не меньших 2. Обозначим через $\mathbb{Z}(p_k)$ дискретную циклическую группу $\{0, 1, \dots, p_k - 1\}$ порядка p_k со сложением по модулю p_k и определим $G = G(\mathbf{P})$ как прямое произведение $\mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, с операцией $\oplus$, мерой μ и топологией, соответствующими прямому произведению. Элементами G являются последовательности $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$, где $x_k \in \mathbb{Z}(p_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Важную роль при этом играют подгруппы $G_n = \{x \in G : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, $n \in \mathbb{N}$, и смежные классы $G_n(y) = y \oplus G_n = \{x \in G : x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in G$. Если $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$ и $m_0 = 1$, то мера $\mu(G_n(y))$ равна m_n^{-1} ($\mu(G) = 1 = m_0^{-1}$). Известно, что $G_n(y)$ являются одновременно открытыми и компактными. Аналоги функций Радемахера на группе G задаются формулами $r_k(x) = \exp(2\pi i x_k / p_k)$. Если

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k m_{k-1}, \qquad n_k \in \mathbb{Z}(p_k), \tag{1}$$

есть $\mathbf{P}$-ичное представление $n \in \mathbb{Z}_+$, то по определению $\chi_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k^{n_k}(x)$, $x \in G$ (на самом деле произведение конечно). Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, называемая системой характеров группы G, ортонормирована на G и полна в $L^1(G)$. Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x, y \in G$, верны равенства

$$\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y), \qquad \chi_k(x \ominus y) = \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)}, \tag{2}$$

где $\ominus$ — операция, обратная к $\oplus$. Все эти факты можно найти в [1, гл. 1, 3]. Далее считаем, что $p_n \le N$, $n \in \mathbb{N}$.

Введем коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(G)$, частичную сумму Фурье и ядро Дирихле по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ формулами

$$\hat{f}(k) = \int_G f(x)\overline{\chi_k(x)}\, d\mu(x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\chi_k(x), \qquad D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Пространства $L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, рассматриваются с нормами $\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$. Пространство $C(G)$ непрерывных на G функций снабжено нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in G} |f(x)|$. $\mathbf{P}$-ичная максимальная функция $M(f)$ для измеримой функции f на G задается формулой

$$M(f)(x) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_n}(f)(x)| = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} m_n \left| \int_{G_n(x)} f(x)\, dx \right|, \qquad x \in G.$$

Во втором равенстве была использована лемма 1. Если $f \in L^1(G)$ и при этом $\|f\|_H = \|M(f)\|_1 < \infty$, то f принадлежит пространству Харди $H^1(G)$. Если для интегрируемой на G функции f величина

$$\|f\|_{BMO}^{(k)} = \sup_{x\in G} \sup_{n\ge k} m_n \int_{G_n(x)} |f(t) - S_{m_n}(f)(t)|\, d\mu t$$

конечна при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in BMO(G)$, если же $\lim\limits_{k\to\infty} \|f\|_{BMO}^{(k)} = 0$, то $f \in VMO(G)$. Все введенные пространства являются банаховыми относительно своих норм (для $\|\cdot\|_{BMO} := \|\cdot\|_{BMO}^{(0)}$ следует рассматривать фактор пространство $BMO(G)$ или $VMO(G)$ по подпространству констант). Эти пространства $X(G)$ (кроме $BMO(G)$) являются сепарабельными и однородными в следующем смысле: 1) множество $\mathscr{P}$ полиномов по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ содержится и плотно в $X(G)$; 2) для $f \in X(G)$ верно включение $f \in L^1(G)$ и неравенство $\|f\|_1 \le C\|f\|_X$, C не зависит от f; 3) для любых $f \in X(G)$ и $h \in G$ верно включение $f(\cdot \oplus h) \in X(G)$ и равенство $\|f\|_X = \|f(\cdot \oplus h)\|_X$. Как установлено в [2, гл. 4, лемма 1] в двоичном случае, для f, принадлежащей однородному пространству $X(G)$ и $g \in L^1(G)$, их свертка $f * g(x) = \int_G f(x \ominus t) g(t)\, d\mu(t)$, существует в $X(G)$ и при этом

$$\|f * g\|_X \le \|f\|_X \|g\|_1. \tag{3}$$

Пусть $\mathscr{P}_n = \{f \in L^1(G) : \hat{f}(k) = 0,\ k \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Введем модуль непрерывности и наилучшее приближение во введенных пространствах $X(G)$:

$$\omega_n(f)_X = \sup_{h\in G_n} \|f(\cdot \oplus h) - f(\cdot)\|_X, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$E_n(f)_X = \inf\{\|f - t_n\|_X : t_n \in \mathscr{P}_n\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В случае $X(G) = L^p(G)$, $1 \le p < \infty$, будем писать $E_n(f)_p$ и $\omega_n(f)_p$, а в случае $X(G) = C(G)$ соответственно $E_n(f)_\infty$ и $\omega_n(f)_\infty$. Известны неравенства А. В. Ефимова (см. [3, гл. 10, § 10.5] для $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, или $X = C$)

$$E_{m_n}(f)_X \le \|f - S_{m_n}(f)\|_X \le \omega_n(f)_X \le 2E_{m_n}(f)_X, \qquad f \in X(G), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

В остальных случаях они доказываются с помощью неравенства (3) и его обобщения из [2, гл. 4, лемма 1].

Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ убывает к нулю. Тогда по определению $H_X^\omega(G) = \{f \in X(G) : \omega_n(f)_X \le C\omega_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$. Тот факт, что $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ может быть точным модулем непрерывности в $C(G)$, $L^1(G)$, $L^2(G)$, установлен А. И. Рубинштейном (см. [1, гл. 2, § 7]). Для $X = L^p$, $1 \le p < \infty$, вместо $H_X^\omega(G)$ будем писать $H_p^\omega(G)$.

Дадим краткий обзор предшествующих результатов. Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности и $1 \le p < \infty$. Тогда

$$H_p^\omega[0,1] = \left\{ f \in L^p[0,1] : \sup_{0\le h\le\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p[0,1-h]} \le C\omega(\delta) \right\}.$$

Для 2π-периодических функций можно аналогично ввести пространство $\tilde{H}_p^\omega$, заменяя в определении $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^p[0,1-h]}$ на $\|f(\cdot+h)-f(\cdot)\|_{L^p[0,2\pi]}$ и подпространство $\tilde{H}_C^\omega$ пространства 2π-периодических непрерывных функций. П. Л. Ульяновым [4] установлена

Теорема A. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, а $p \in [1,\infty)$ — фиксированное число. Для того чтобы всякая функция $\psi \in \tilde{H}_p^\omega$ была эквивалентна (равна п. в.) непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p-1}\omega(k^{-1}) < \infty.$$

Теорема A в части достаточности была доказана в 1958 г. Я. Л. Геронимусом [5].

Также в [4] был получен критерий принадлежности всякой функции $\psi \in \tilde{H}_p^\omega$ пространству Липшица $Lip(\alpha)$. В. А. Андриенко [6] распространил последний результат на случай произвольного подпространства $\tilde{H}_C^{\omega_1}$, где $\omega_1(\delta)$ также является модулем непрерывности. В работе [7] среди других результатов о вложении пространств $H_p^\omega[0,1]$ П. Л. Ульяновым была доказана следующая теорема.

Теорема B. *Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности, $1 \le p < q < \infty$. Для того чтобы имело место вложение $H_p^\omega[0,1] \subset L^q[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p-2}\omega^q(k^{-1}) < \infty.$$

Кроме того, в [7] был установлен критерий вложения $H_p^\omega[0,1] \subset Lip(\alpha, L^q[0,1])$. В. А. Андриенко получил критерий вложения $H_p^\omega[0,1] \subset H_q^{\omega_1}[0,1]$, где $\omega_1(\delta)$ также является модулем непрерывности.

Б. И. Голубов [8] (см. также [3, § 10.3, 10.4]) получил условия вложения в пространство $L^q[0,1]$ в терминах $E_n^{(p)}(f) = \inf\limits_{\{a_k\}\subset\mathbb{R}} \left\| f - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k w_k \right\|_{L^p[0,1]}$ — наилучших приближений f в метрике $L^p[0,1]$ по системе Уолша.

Теорема C. *Пусть $1 \le p < q < \infty$ и $f \in L^p[0,1]$. Тогда справедливы неравенства*

$$\|f\|_{L^q[0,1]} \le C_1 \left(\|f\|_{L^p[0,1]} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{q/p-2} (E_k^{(p)}(f))^q \right]^{1/q} \right),$$

$$E_n^{(q)}(f) \le C_2 \left(n^{1/p-1/q} E_n^{(p)}(f) + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{q/p-2} (E_k^{(p)}(f))^q \right]^{1/q} \right).$$

Эти неравенства остаются верными при замене $E_k^{(p)}(f)$ на $E_k^{(p)}(f)_h$ — наилучшие приближения по системе Хаара.

М. Ф. Тиман и А. И. Рубинштейн (см. [9] или [1, гл. 4, § 9]) перенесли результаты П. Л. Ульянова и В. А. Андриенко на случай функций, определенных на компактных коммутативных нуль-мерных группах со второй аксиомой счетности.

Теорема D. *1. Для вложения $H_p^\omega(G) \subset L^q(G)$, где $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ убывает к нулю, в случае $p_n \le C$ необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{q/p-1}\omega_n^q < \infty, \quad 1 \le p < q < \infty,$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_n^{1/p}\omega_n < \infty, \quad 1 \le p < q = \infty.$

2. Для вложения $H_p^\omega(G) \subset H_q^{\omega^*}(G)$, где ω^* и ω убывают к нулю, в случае $p_n \le C$ необходимо и достаточно, чтобы

а) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} m_k^{q/p-1}\omega_k^q \le C_1(\omega_n^*)^q$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p < q < \infty$,

б) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} m_k\omega_k \le C_1\omega_n^*$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p < q = \infty$.

Здесь $L^\infty(G)$ отождествляется с $C(G)$, а $H_\infty^\omega(G)$ — с $H_C^\omega(G)$.

Ш. Фридли (S. Fridli) [10] получил уточнения предельных случаев теоремы D в случае $p_i \equiv 2$, заменяя $H_1^\omega(G)$ на $H_H^\omega(G)$ и $H_C^\omega(G)$ на $H_{VMO}^\omega(G)$. Кроме того, он изучил вложения вида $H_1^\omega(G) \subset H_H^{\omega^*}(G)$ и $H_{VMO}^\omega(G) \subset H_C^{\omega^*}(G)$.

Целью нашей работы является доказательство результатов из [10] для более общих групп G при ограничении $p_n \le N$.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Лемма 1. *Для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in G$ справедлива формула $D_{m_n}(x) = m_n X_{G_n}$, где X_E — характеристическая функция множества E. Если $n \in \mathbb{N}$, то $\|D_n\|_1 \le C\ln(n+1)$.*

Доказательство леммы 1 можно найти в [1, гл. 4, § 3, 4].

Лемма 2. *Пусть $f \in L^1(G)$ и $\Delta_k(f) := S_{m_{k+1}}(f) - S_{m_k}(f)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\|\Delta_k(f)\|_H = \|\Delta_k(f)\|_1$ и $N^{-1}\|\Delta_k(f)\|_\infty \le \|\Delta_k(f)\|_{BMO} \le \|\Delta_k(f)\|_\infty$.*

Доказательство. Из ортонормированности системы $\{\chi_k\}_{k=0}^\infty$ следует, что

$$S_{m_l}(S_{m_n}(f))(x) = S_{m_k}(f)(x), \qquad k = \min(l,n), \qquad l, n \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in G. \tag{5}$$

Поэтому $S_{m_l}(\Delta_k(f)) = 0$ при $l \le k$ и $S_{m_l}(\Delta_k(f)) = \Delta_k(f)$ при $l \ge k+1$. В результате получаем, что $\sup\limits_{l\in\mathbb{Z}_+} |S_{m_l}(\Delta_k(f))(x)| = |\Delta_k(f)(x)|$ при $x \in G$, откуда вытекает первое утверждение леммы. Также по формуле (5) имеем равенства $\Delta_k(f) - S_{m_l}(\Delta_k(f)) = \Delta_k(f)$ при $l \le k$ и $\Delta_k(f) - S_{m_l}(\Delta_k(f)) = 0$ при $l \ge k+1$. Поэтому

$$\sup_{l\in\mathbb{Z}_+} m_l \int_{G_l(x)} |\Delta_k(f)(t) - S_{m_l}(\Delta_k(f))(t)|\, d\mu(t) = \sup_{l\le k} m_l \int_{G_l(x)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) \le \|\Delta_k(f)\|_\infty, \tag{6}$$

и аналогичная оценка верна для $\|\Delta_k(f)\|_{BMO}$. С другой стороны, $\Delta_k(f)$ постоянна на всех смежных классах $G_{k+1}(x)$, и $\|\Delta_k(f)\|_\infty$ равна значению $|\Delta_k(f)|$ на некотором смежном классе $G_{k+1}(y)$. Пусть $G_{k+1}(y) \subset G_k(z)$, тогда

$$\begin{aligned}\|\Delta_k(f)\|_{BMO} \ge m_k \int_{G_k(z)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) \ge m_k \int_{G_{k+1}(y)} |\Delta_k(f)(t)|\, d\mu(t) = \\ = m_k\|\Delta_k(f)\|_\infty / m_{k+1} \ge N^{-1}\|\Delta_k(f)\|_\infty.\end{aligned} \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа G такова, что $2 \le p_n \le N$ при $n \in \mathbb{N}$, $f \in L^1(G)$. Тогда*

$$C_1\|Q(f)\|_1 \le \|f\|_H \le C_2\|Q(f)\|_1, \quad \text{где} \quad Q(f) = \left(|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{k=0}^\infty |\Delta_k(f)|^2\right)^{1/2}.$$

Утверждение леммы можно найти в [11, § 2.2, следствие 2.23].

Лемма 4. *Пусть $f \in X(G)$, $j \in (m_n, m_{n+1}] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$E_j(f)_X \le \|S_{m_{n+1}}(f) - f\|_X + \inf_{q\in\mathscr{P}_j} \|\Delta_n(f) - \Delta_n(q)\|_X.$$

Доказательство. Пусть $f \in X(G)$, $j \in (m_n, m_{n+1}] \cap \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathscr{P}_j$. Тогда в силу равенства $S_{m_{n+1}}(q) = q$ имеем:

$$\|f - q\|_X \le \|f - S_{m_{n+1}}(f)\|_X + \|S_{m_{n+1}}(f-q) - S_{m_n}(f-q)\|_X + \|S_{m_n}(f-q)\|_X. \tag{8}$$

Если $S_{m_n}(q) = S_{m_n}(f)$, то третье слагаемое правой части (8) равно нулю, а второе не зависит от $\hat{q}(i)$, $0 \le i < m_n$. Поэтому, переходя в (8) к точной нижней грани по $q \in \mathscr{P}_j$, получаем неравенство леммы.

2. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1(G)$ и $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^\infty$, $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающие к нулю последовательности. Тогда*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty k^{-1}E_k(f)_1$, то $f \in H^1(G)$ и справедливо неравенство

$$E_j(f)_H \le C\left(E_j(f)_1 + \sum_{k=j+1}^\infty k^{-1}E_k(f)_1\right), \qquad j \in \mathbb{N};$$

2) вложение $H_1^\omega(G) \subset H^1(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$;

3) вложение $H_1^\omega(G) \subset H_H^\eta(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k \le C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Используя лемму 3, неравенство А. В. Ефимова (4) и неравенство Йенсена, получаем:

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_H \le C_1 \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_k(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \le C_1 \left\| \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_k(f)| \right\|_1 \le$$

$$\le C_1 \sum_{k=n}^{\infty} \|S_{m_{k+1}}(f) - f + f - S_{m_k}(f)\|_1 \le$$

$$\le 4C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_{m_k}(f)_1 \le C_2 \left(E_{m_n}(f)_1 + \sum_{k=m_n+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right). \tag{9}$$

т. е. в силу неравенства А. В. Ефимова (4) утверждение 1) доказано при $j = m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Используя (9), лемму 4, лемму 2 и оценку $\|S_{m_n}(f)\|_1 \le \|f\|_1$ для $f \in L^1(G)$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ (она вытекает из (3) и леммы 1), находим, что при $j \in (m_n, m_{n+1}]$

$$E_j(f)_H \le E_j(S_{m_{n+1}}(f))_H + \|f - S_{m_{n+1}}\|_H \le \inf_{q \in \mathscr{P}_j} \|\Delta_n(f-q)\|_1 +$$

$$+ C_2 \left(E_{m_{n+1}}(f)_1 + \sum_{k=m_{n+1}+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right) \le C_3 \left(E_j(f)_1 + \sum_{k=j+1}^{\infty} k^{-1} E_k(f)_1 \right),$$

утверждение 1) доказано. Используя промежуточное неравенство из (9) и (4), имеем: $\omega_n(f)_H \le \le C_4 \sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k(f)_1$, $n \in \mathbb{N}$. Из последнего неравенства вытекает достаточность условий $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k < \infty$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \omega_k \le C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$, в 2) и 3) соответственно. Покажем необходимость этих условий. Пусть $g(x) = c_{n+1}$ на $G_n \setminus G_{n+1}$, где $c_{n+1} = m_n(\omega_{n-1} - \omega_n) + c_n$, $c_0 = c_1 = 0$, т. е. $c_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)$, $n \in \mathbb{N}$. По определению g

$$\int_G |g(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_n \setminus G_{n+1}} |g(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(m_n^{-1} - m_{n+1}^{-1}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (c_{n+1} - c_n) m_n^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (\omega_{n-1} - \omega_n) = \omega_0,$$

т. е. $f \in L^1(G)$. В самом деле, в силу преобразования Абеля

$$\sum_{n=0}^{M} c_{n+1}(m_n^{-1} - m_{n+1}^{-1}) = \sum_{n=0}^{M} (c_{n+1} - c_n) m_n^{-1} - c_{M+1} m_{M+1}^{-1}.$$

Последнее слагаемое правой части стремится к нулю по теореме Штольца, и можно перейти к пределу при $M \to \infty$.

Согласно [1, гл. 2, § 7, формула (1.6)] справедливо равенство

$$\omega_n(g)_1 = 2 \sup_{k \ge n} \sum_{s=k+1}^{\infty} |c_{s+1} - c_{k+1}|(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}).$$

Так как у нас $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает, то, меняя порядок суммирования, получаем:

$$\omega_n(g)_1 = 2 \sum_{s=n+1}^{\infty} (c_{s+1} - c_{n+1})(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}) = 2 \sum_{s=n+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{s} m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)(m_s^{-1} - m_{s+1}^{-1}) =$$

$$= 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty}(m_s^{-1}-m_{s+1}^{-1})m_k(\omega_{k-1}-\omega_k) = 2\sum_{k=n+1}^{\infty}(\omega_{k-1}-\omega_k) = 2\omega_n.$$

Таким образом, $g \in H_1^{\omega}(G)$. Далее, оценим

$$\|g - S_{m_n}(g)\|_H \geq \int_{G_n} M(g - S_{m_n}(g))(x)\,d\mu(x) \geq$$
$$\geq \int_{G_n} M(g)(x)\,d\mu(x) - \geq \int_{G_n} M(S_{m_n}(g))(x))\,d\mu(x). \qquad (10)$$

В силу формулы (5) и возрастания последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ для $x \in G_n$ верно равенство

$$M(S_{m_n}(g))(x) = \sup_{0\leq l\leq n} S_{m_l}(g)(x) = S_{m_n}(g)(x).$$

Используя лемму 1 и понятие свертки на группе, легко установить, что $S_{m_n}(f)(x)$ равно $m_n\int_{G_n(x)} f(t)\,d\mu(t)$ при $f \in L^1(G)$, т. е. $\int_{G_n} g(t)\,d\mu(t) = \int_{G_n} S_{m_n}(g)(t)\,d\mu(t)$.

Также в силу возрастания $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ для $x \in G_j \setminus G_{j+1}$ справедливо равенство

$$M(g)(x) = m_j\int_{G_j} g(t)\,d\mu(t) = m_j\sum_{k=j}^{\infty} c_{k+1}(m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}).$$

В силу (10), (4) и последнего равенства находим, что

$$\omega_n(g)_H \geq \|g - S_{m_n}(g)\|_H \geq \sum_{j=n}^{\infty}\int_{G_j\setminus G_{j+1}} (M(g)(x) - g(x))\,d\mu(x) =$$
$$= \sum_{j=n}^{\infty} m_j(m_j^{-1} - m_{j+1}^{-1})\sum_{k=j}^{\infty}(c_{k+1} - c_{j+1})(m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}) \geq$$
$$\geq 2^{-1}\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty}(c_{k+1} - c_{j+1})(m_k^{-1} - m_{k+1}^{-1}) \geq 4^{-1}\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}(c_{k+1} - c_{j+1})m_k^{-1} \geq$$
$$\geq 4^{-1}\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty}(\omega_{k-1} - \omega_k) = 4^{-1}\sum_{j=n}^{\infty}\omega_j. \qquad (11)$$

В конце выкладок использовано неравенство $c_{k+1} - c_{j+1} \geq c_{k+1} - c_k = m_k(\omega_{k-1} - \omega_k)$. Возвращаясь к доказательству пунктов 2) и 3), отметим что при $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\omega_j = \infty$ из (11) выводим $g \notin H^1(G)$, а при $\sum\limits_{j=n}^{\infty}\omega_j \neq O(\eta_n)$ получаем противоречие между (11) и предположением $g \in H_H^{\eta}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f \in VMO(G)$ и $\omega = \{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\eta = \{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ — убывающие к нулю последовательности. Тогда*

1) если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-1}E_k(f)_{BMO}$, то f эквивалентна $f_0 \in C(G)$ и справедливо неравенство

$$E_j(f_0)_{\infty} \leq C\left(E_j(f)_{BMO} + \sum_{k=j+1}^{\infty} k^{-1}E_k(f)_{BMO}\right), \qquad j \in \mathbb{N};$$

2) вложение $H_{VMO}^{\omega}(G) \subset C(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k < \infty$;

3) вложение $H_{VMO}^{\omega}(G) \subset H_C^{\eta}(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\omega_k \leq C\eta_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По леммам 4 и 2, а также неравенству (3) и лемме 1 аналогично доказательству теоремы 1 при $j \in (m_n, m_{n+1}]$ получаем:

$$E_j(f_0)_{\infty} \leq \|f - S_{m_{n+1}}(f_0)\|_{\infty} + \inf_{q\in P_j}\|\Delta_n(f_0 - q)\|_{\infty} \leq N\sum_{k=n+1}^{\infty}\|\Delta_k(f)\|_{BMO} +$$

$$+N\inf_{q\in P_j}\|\Delta_n(f-q)\|_{BMO}\le C_1\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}E_{m_k}(f)_{BMO}+E_j(f)_{BMO}\right)\le$$
$$\le C_2\left(E_j(f)_{BMO}+\sum_{k=j+1}^{\infty}k^{-1}E_k(f)_{BMO}\right).$$

Существование $f_0\in C(G)$ доказывается аналогично. При $j=m_{n+1}$ получаем неравенство $E_{m_{n+1}}(f_0)_\infty\le 2C_1\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}E_{m_k}(f)_{BMO}$, из которого с помощью (4) следует достаточность условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k<\infty$ в 2) и $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\omega_k\le C\eta_n$ в 3). Для доказательства необходимости этих условий рассмотрим функцию $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k(x)$, где $g_k(x)=m_k^{-1}\omega_k(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x))$. Тогда

$$g(x)-S_{m_n}(g)(x)=\sum_{k=n}^{\infty}m_k^{-1}\omega_k(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x))\qquad(12)$$

и при $x\notin G_n$ и $k\ge n$ в силу леммы 1 верно $D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x)=0$, т. е. $g(x)-S_{m_n}(g)(x)=0$. Поэтому для $G_i(x)$, не содержащих G_n, имеем: $\int_{G_i(x)}|g(x)-S_{m_n}(g)(x)-S_{m_j}(g-S_{m_n}(g))(x)|\,d\mu(x)=0$, а для $G_i(x)$, содержащих G_n, такой же интеграл равен интегралу по одному из G_j, $j\ge n$. Следовательно, в силу (5), (12) и леммы 1

$$\|g-S_{m_n}(g)\|_{BMO}=\sup_{j\ge n}m_j\int_{G_j}|g(x)-S_{m_n}(g)(x)-S_{m_j}(g-S_{m_n}(g))(x)|\,d\mu(x)=$$
$$=\sup_{j\ge n}m_j\int_{G_j}|g(x)-S_{m_j}(g)(x)|\,d\mu(x)\le\sup_{j\ge n}m_j\sum_{k=j}^{\infty}m_k^{-1}2\omega_k\le$$
$$\le C_3\omega_n\sup_{j\ge n}m_jm_j^{-1}=C_3\omega_n,\qquad n\in\mathbb{Z}_+.\qquad(13)$$

Благодаря (4) и (13) получаем $g\in H^{\omega}_{VMO}(G)$. С другой стороны, по лемме 1 верно $g_k(0)=$ $=m_k^{-1}(m_{k+1}-m_k)\omega_k\ge\omega_k$. Поэтому $\omega_n(f)_\infty\ge\|g-S_{m_n}(g)\|_\infty\ge\sum\limits_{k=n}^{\infty}\omega_k$, откуда аналогично теореме 1 легко вытекает необходимость в 2) и 3). Теорема доказана.

Замечание. Вложения в 2) и 3) понимаются как принадлежность эквивалентных функций соответствующим пространствам непрерывных функций.

Теорема 3. *1. Пусть* $f\in L^1(G)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_1<\infty$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_n(f)\|_H=0$.

2. Пусть $f\in VMO(G)$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_{BMO}<\infty$. *Тогда* f *эквивалентна* $f_0\in C(G)$ *и справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_0-S_n(f_0)\|_\infty=0$.

Доказательство. 1. Так как в условиях пункта 1) теоремы 3 по теореме 1 имеем $f\in H^1(G)$ и, как следствие, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-S_{m_n}(f)\|_H=0$, то докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_j(f)-S_{m_{n+1}}(f)\|_H=0$ равномерно по $j\in[m_n,m_{n+1})\cap\mathbb{Z}$. Отметим, что в силу (3), лемм 1, 2 и (4) верно неравенство

$$\|S_j(f)-S_{m_{n+1}}(f)\|_H=\|\Delta_n(f-f*D_j)\|_H\le\|\Delta_n(f)\|_H+\|\Delta_n(f*D_j)\|_H\le$$
$$\le\|\Delta_n(f)\|_1+\|\Delta_n(f)\|_1\|D_j\|_1\le C_1\ln(j+1)\|\Delta_n(f)\|_1\le C_2(n+1)\omega_n(f)_1.\qquad(14)$$

Но $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\omega_k(f)_1$ сходится и $\{\omega_k(f)_1\}_{k=0}^{\infty}$ убывает, поэтому $\omega_k(f)_1=o(k^{-1})$, $k\to\infty$, и правая часть (14) стремится к нулю, откуда следует сходимость $S_j(f)$ в $H^1(G)$.

2. Доказывается аналогично 1) с использованием теоремы 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00238).

Библиографический список

1. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку : Элм, 1981. 180 с.
2. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh series. An introduction to dyadic analysis. Budapest : Akademiai Kiado, 1990. 560 c.
3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М. : Наука, 1987. 344 с.
4. *Ульянов П. Л.* Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Матем. сб. 1967. Т. 72, № 2. С. 193–225.
5. *Геронимус Я. Л.* О некоторых свойствах функций класса L^p // Изв. вузов. Матем. 1958. № 1. С. 24–32.
6. *Андриенко В. А.* Вложение некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, № 6. С. 1311–1326.
7. *Ульянов П. Л.* Вложение некоторых классов функций H_p^ω // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
8. *Голубов Б. И.* Наилучшие приближения функций в метрике L_p полиномами Хаара и Уолша // Матем. сб. 1972. Т. 87, № 2. С. 254–274.
9. *Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И.* О вложении классов функций, определенных на нуль-мерных группах // Изв. вузов. Матем. 1980. № 6. С. 66–76.
10. *Fridli S.* Embedding theorems involving dyadic Hardy and VMO spaces // Approximation theory (Kecskemet, 1990). P. 287–301; Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Vol. 58. North-Holland, Amsterdam, 1991.
11. *Weisz F.* Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis // Lecture Notes in Math. Vol. 1568. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1994. 228 p.

Embedding Theorems for $\mathbf{P}$-nary Hardy and VMO Spaces

S. S. Volosivets

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, VolosivetsSS@mail.ru

In the present paper several embedding theorems of P. L. Ul'yanov type for Hölder spaces connected with $\mathbf{P}$-nary Hardy, VMO, L^1 and uniform metric on Vilenkin groups are proved. Its sharpness is also established. The sufficient conditions for the convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems in Hardy space and uniform metric are also given.

Key words: $\mathbf{P}$-nary Hardy space, $\mathbf{P}$-nary VMO space, embedding theorems, sharpness, uniform convergence.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00238).

References

1. Agaev G. N., Vilenkin N. Ya., Dzhafarli G. M., Rubinstein A. I. *Mul'tiplikativnye sistemy funkcii i garmonicheskii analiz na nul'-mernyh gruppah* [Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups]. Baku, Elm, 1980 (in Russian).
2. Schipp F., Wade W. R., Simon P. *Walsh series. An introduction to dyadic analysis*. Budapest, Akademiai Kiado, 1990.
3. Golubov B. I., Efimov A. V., Skvortsov V. A. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* Dordrecht, Kluwer, 1991.
4. Ul'janov P. L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197. DOI: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001973.
5. Geronimus Ya. L. Some properties of functions of class L^p. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1958, no. 1, pp. 24–32 (in Russian).
6. Andrienko V. A. The imbedding of certain classes of functions. *Math. USSR-Izv.*, 1967, vol. 1, no. 6, pp. 1255–1270. DOI: 10.1070/IM1967v001n06ABEH000614.
7. Ul'janov P. L. The imbedding of certain function classes H_p^ω. *Math. USSR-Izv.*, 1968, vol. 2, no. 3, pp. 601–637. DOI: 10.1070/IM1968v002n03ABEH000650
8. Golubov B. I. Best approximations of functions in the L_p metric by Haar and Walsh polynomials. *Math. USSR-Sb.*, 1972, vol. 16, no. 2, pp. 265–285. DOI: 10.1070/SM1972v016n02ABEH001425.
9. Timan M. F., Rubinshtejn A. I. On imbedding of classes of functions, defined in zero-dimensional groups. *Soviet Math.*, 1980, vol. 24, no. 8, pp. 74–85.
10. Fridli S. Embedding theorems involving dyadic Hardy and VMO spaces. *Approximation theory (Kecskemet, 1990)*, pp. 287–301, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai*, vol. 58, North-Holland, Amsterdam, 1991.
11. Weisz F. Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis. *Lecture Notes in Math.*, vol. 1568. Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1994, 228 p.