УДК 517.518.826, 519.65

О МОДИФИКАЦИИ АЛГОРИТМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ С ОГРАНИЧЕНИЕМ ТИПА РАВЕНСТВА

И. Ю. Выгодчикова

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической экономики, Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, VigodchikovaIY@info.sgu.ru

Рассматривается дискретная задача аппроксимации зашумлённых данных алгебраическим полиномом с ограничением типа равенства. Цель исследования — получение свойств решения задачи и разработка на их основе нового, более эффективного, по сравнению с существующими приёмами решения, алгоритма. Задачи исследования — получение свойств решения задачи, изложение алгоритма и демонстрация его реализации. Методика исследования продолжает аппарат П. Л. Чебышёва и алгоритмизацию Валле-Пуссена. Получен критерий оптимальности решения, являющийся модификацией известного в теории приближений альтернанса П. Л. Чебышёва. Разработан рациональный алгоритм решения по аналогии с алгоритмом Валле-Пуссена. Рассматриваемая задача может применяться для оценки шумовых явлений при аппроксимации сложных хаотических процессов.

Ключевые слова: минимакс, многозначное отображение, аппроксимирующий полином, свойства решения, вычислительный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее последовательно результаты вклада в проблему минимакса основоположника теории приближений и прикладной математики П. Л. Чебышёва собраны в работах В. Ф. Демьянова и его последователей. Рассмотрим новые методы решения минимаксных задач приближения многозначных отображений с сегментными образами алгебраическими полиномами фиксированной степени с ограничением типа равенства на базе обобщения алгоритмизации Валле-Пуссена для безусловной дискретной задачи Чебышёва.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $n \geqslant 0$ (степень алгебраического полинома), $N \geqslant n+1$, $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Кроме того, считаем, что на множестве T определено многозначное отображение $\Phi(\cdot)$ с сегментными образами: $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1,k}$, $k = \overline{0,N}$.

Введём обозначение $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ для алгебраического полинома степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть $t_s \in T$. Положим $D = \{A \in \mathbb{R}^{n+1} : p_n(A, t_s) = \nu\}$. Обозначим

$$f_i(A,t_k) = (-1)^i (y_{i,k} - p_n(A,t_k)), \qquad i = 1,2, \qquad k = \overline{0,N},$$
$$f(A,t_k) = \max\{f_1(A,t_k), f_2(A,t_k)\}, \qquad k = \overline{0,N}.$$

Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \to \min_{A \in D}. \tag{1}$$

Обозначим $\rho^{**} = \min\limits_{A \in D} \rho(A)$, $\mathfrak{R}^D = \{A \in D : \rho(A) = \rho^{**}\}$. Сформулируем задачу без ограничений (см., напр., [1]):

$$\rho(A) = \max_{k=\overline{0,N}} f(A,t_k) \to \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \tag{2}$$

Положим $\rho^* = \min\limits_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\mathfrak{R} = \{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\}$.

Задачу (1) несложно свести к задаче линейного программирования (как и задачу (2), по аналогии с [2, с. 302]), однако объём вычислений при этом существенно возрастает с ростом узлов дискретной сетки. Проблемы могут возникнуть и с нахождением начального базисного плана, поэтому решать подобные задачи традиционным симплекс-методом нецелесообразно. Для решения оптимизационных задач в прикладных программах используются методы регуляризации, которые позволяют с заданной точностью найти решение, однако не дают ответа на вопрос о его однозначности. Кроме того, погрешность вычислений зависит от начального приближения, а ответить на вопрос, насколько точным получился результат, без изучения его свойств невозможно [3].

Как уже было отмечено, методы регуляризации не позволяют найти всех решений или даже сделать вывод о наличии ситуации неединственности.

Альтернативный предлагаемый ниже метод основан на новых свойствах решения задачи, которые позволят не только установить, получено ли верное решение, но также указать, будет ли оно единственным. На основе этих свойств и известного алгоритма Валле-Пуссена разработан рациональный алгоритм со значительно меньшим объёмом вычислений на каждом шаге, поскольку в расчётах используется всего одна вспомогательная переменная.

2. КРИТЕРИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Доказано, что задачи (1) и (2) имеют решение (см., напр., [1, 4]). Будем считать, что $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$. В таком случае имеем:

$$\rho(A) > \rho^* \geqslant m = \max_{k=\overline{0,N}} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}, \qquad \forall A \in \mathfrak{R}^D. \tag{3}$$

Не сложно показать, что справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Пусть* $n \geqslant 1$, $x_0 < \ldots < x_{n+1}$, $A \neq 0_{n+1}$, $p_n(A, x_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, *существуют* $l \in \overline{1, n+1}$ *и* $z_l \in (x_{l-1}; x_l)$ *такие, что* $(-1)^l p_n(A, z_l) < 0$. *Тогда* $(-1)^i p_n(A, x) < 0$ *при любом* $x \in (x_{i-1}; x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$.

Частичным базисом назовём такое множество $\sigma = \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\} \subset T$, что существует $r \in \overline{0, n+1}$, для которого $t_{j_r} = t_s$, множество всех частичных базисов обозначим через Ω.

Определим на каждом частичном базисе функции $\varphi_0(\sigma, \cdot)$ и $\varphi_1(\sigma, \cdot)$, присвоив им следующие значения:

$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = y_{2,\,j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — четно, $k \neq r$;
$\varphi_0(\sigma, t_{j_k}) = y_{1,\,j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — нечетно, $k \neq r$;
$\varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = y_{1,\,j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — четно, $k \neq r$;
$\varphi_1(\sigma, t_{j_k}) = y_{2,\,j_k}$, $k = \overline{0, n+1}$, k — нечетно, $k \neq r$;
$\varphi_i(\sigma, t_{j_r}) = \nu$.

Наряду с (1) рассмотрим на каждом частичном базисе вспомогательные задачи:

$$\rho_i(A, \sigma) = \max_{k=\overline{0,n+1}} |\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A, t_{j_k})| \to \min_{A \in D}, \qquad i \in \{0, 1\}. \tag{4}$$

Каждая из задач (4) (для $i = 0$ или $i = 1$) может рассматриваться как частный случай задачи (1) для многозначного отображения (м. о.), образами которого в узлах базиса являются значения соответствующей функции φ_i.

Обозначим $\theta = \max\{y_{2,s} - \nu, \nu - y_{1,s}\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$. *Вектор* $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением задачи* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$p_n(A^*, t_{j_r}) = \nu \tag{5}$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

(I) $\rho(A^*) = \theta$*;*

(II) для некоторого частичного базиса выполняются равенства:

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h_i(\sigma), \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \tag{6}$$

и при этом $\rho(A^*) = h_i(\sigma)$.

Замечание. Систему равенств (6) можно охарактеризовать термином «прерванный альтернанс».

Доказательство. *Необходимость.* 1. При $n = 0$ утверждение очевидно, считаем $n \geqslant 1$. Пусть $A^* \in \mathfrak{R}^D$ и условие (I) не выполняется. Тогда

$$\rho(A^*) > \theta. \tag{7}$$

Рассмотрим множество $S := \{t_k \in T\backslash\{t_s\} : f(A^*, t_k) = \rho(A^*)\}$. Из (7) вытекает, что $S \neq \varnothing$. Ввиду (3) $f_1(A^*, t) \neq f_2(A^*, t)$ для любого $t \in S$ [1].

Будем говорить, что в точке $t \in S$ *действует* функция f_j, если $f(A^*, t) = f_j(A^*, t)$. Разобьем множество S на следующие друг за другом непересекающиеся подмножества $\{S_i\}_{i=1}^{w}$, на каждом из которых действует только одна из функций $f_1 (f_2)$.

Если допустить, что $w > n + 1$, то получим условие, из которого вытекает, что $A^* \in \mathfrak{R}$ (см., напр., [1]). Последнее противоречит предположению $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$. Следовательно,

$$w \leqslant n + 1. \tag{8}$$

2. Пусть $\overline{\theta}_i = \max\limits_{t \in S_i} t$, $\underline{\theta}_i = \min\limits_{t \in S_i} t$, $i = \overline{1, w}$. Покажем, что не существует индекса $l \in \overline{1, w-1}$ такого, что

$$\overline{\theta}_l < t_s < \underline{\theta}_{l+1}. \tag{9}$$

Допустим, (9) выполняется. Для определенности считаем, что на множестве S_l действует функция f_1.

Возьмем $x_i \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, l-1} \cup \overline{l+1, w-1}$, $x_l = t_s$, и, если $w < n+1$, возьмём ещё $n+1-w$ различных между собой точек x_i так, чтобы $x_i > t_N$, $i = \overline{w, n}$.

Из леммы вытекает, что для вектора A^ε, определяемого равенствами

$$\begin{gathered} p_n(A^\varepsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i), \qquad i = \overline{1, n}, \\ p_n(A^\varepsilon, \overline{\theta}_l) = p_n(A^*, \overline{\theta}_l) - \varepsilon, \end{gathered}$$

выполняется

$$\rho(A^\varepsilon) < \rho(A^*), \tag{10}$$

противоречащее оптимальности A^*.

3. Пусть $\underline{\theta}_l < t_s < \overline{\theta}_l$, при этом в точках множества S_l действует функция f_2.

Если $w = n + 1$, выбираем по одной точке из каждого множества разбиения, включаем t_s и тем самым получаем (II).

Ввиду (8) осталось рассмотреть случай $w < n+1$. Возьмем $x_i \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$, $i = \overline{1, l-1}$, $x_l \in (\overline{\theta}_l; t_s)$, $x_{r+1} \in (t_s; \underline{\theta}_{r+1})$, $x_{i+1} \in (\overline{\theta}_i; \underline{\theta}_{i+1})$ $i = \overline{l+1, w-1}$, и, если $w < n$, возьмём ещё $n-w$ различных между собой точек x_i так, чтобы $x_i > t_N$, $i = \overline{w+1, n}$.

Фиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и решаем относительно A^ε систему

$$\begin{gathered} p_n(A^\varepsilon, x_i) = p_n(A^*, x_i), \qquad i = \overline{1, n}, \\ p_n(A^\varepsilon, t_s) = p_n(A^*, t_s) - \varepsilon. \end{gathered}$$

Применяя лемму, приходим к (10), которое противоречит оптимальности A^*.

Проводим аналогичные рассуждения для случая, если в точках множества S_l действует функция f_1. Случаи $t_s < \underline{\theta}_1$ или $t_s > \overline{\theta}_w$ рассматриваются аналогично.

Достаточность. Имеем $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$ и выполняется (5).

1. Пусть справедливо условие (I) теоремы. Тогда для любого A, удовлетворяющего равенству $p_n(A, t_s) = \nu$, имеем:

$$\rho(A) \geqslant f(A, t_s) = \theta = \rho(A^*),$$

что свидетельствует об оптимальности A^*.

2. Пусть справедливо условие (II) теоремы. Обозначим $\Delta := \{t_{q_0} < \ldots < t_{q_n}\} \subset \{t_{j_0} < \ldots < t_{j_{n+1}}\}\backslash\{t_s\}$. Рассмотрим сначала случай $t_{q_0} < t_s < t_{q_n}$. Тогда найдется l такое, что $t_{q_l} < t_s < t_{q_{l+1}}$, причем в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$ действует функция f_2 или f_1 (для определённости пусть f_2).

Допустим, что

$$A^{**} \in \mathfrak{R}(\nu), \qquad A^{**} \neq A^*. \tag{11}$$

Тогда $p_n(A^{**}, t_s) = \nu$, откуда, учитывая (5), получаем:

$$p_n(A^{**} - A^*, t_s) = 0. \tag{12}$$

Если в точке t_{q_g} действует функция f_1, то $p_n(A^{**}, t_{q_g}) < p_n(A^*, t_{q_g})$, если же в точке t_{q_g} действует f_2, то $p_n(A^{**}, t_{q_g}) > p_n(A^*, t_{q_g})$.

Тогда ввиду (II), $p_n(A^{**} - A^*, t)$ обращается в 0 на каждом интервале $(t_{q_g}; t_{q_{g+1}})$, $g = \overline{0, l-1}$, $g = \overline{l+1, n-1}$.

Отсюда и из (12) вытекает, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет n нулей. Следовательно, полином $\dfrac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет $n-1$ нулей в точках, отличных от t_s.

3. Ввиду рассуждений, приведённых выше (п. 2 доказательства достаточности) и (12), на интервале $(t_{q_l}; t_{q_{l+1}})$ полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет нулевое значение лишь при $t = t_s$, в остальных точках значение полинома положительно, как и в точках t_{q_l} и $t_{q_{l+1}}$, где действует функция f_2.

Следовательно, в точке t_s этот полином достигает локального минимума, поэтому $\dfrac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t_s) = 0$. Учитывая выводы, сделанные выше (п. 2 доказательства достаточности), получаем, что полином $\dfrac{d}{dt} p_n(A^* - A^{**}, t)$ имеет n нулей, то есть является константой. что противоречит (11).

4. При $t_s < t_{q_0}$ или $t_s > t_{q_n}$ из (12), (II) вытекает, что полином $p_n(A^{**} - A^*, t)$ имеет $n+1$ нулей, что невозможно ввиду предположения (11). Теорема доказана.

3. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСА

Разработаем правила, согласно которым, по аналогии с алгоритмом Валле-Пуссена [5, с. 26] можно переходить к новому частичному базису путём замены одной точки так, что значение целевой функции текущей базисной подзадачи увеличивается, приведя в итоге за конечное число шагов к решению задачи, удовлетворяющему условию (II) теоремы 1. Если же такой переход на каком-то шаге окажется невозможным ввиду предположения об отсутствии среди решений задачи (2) решений задачи (1), будет получен вывод о выполнении условия (I) теоремы 1 и неединственности решения задачи (1).

Применим к (4) теорему 1.

Теорема 2. *Решение задачи* (4) *единственно,* $i = 0$ *или* $i = 1$. *Вектор* $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением задачи* (4) *тогда и только тогда, когда выполняется* (5) *и равенства:*

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(A^*, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h_i(\sigma), \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{r\}, \tag{13}$$

при этом $\rho_i(A^*, \sigma) = h_i(\sigma)$.

Приведём факт, доказанный в [6].

Теорема 3. *Пусть решение задачи* (4) *единственно,* $h \geqslant 0$, $w > 0$, $v \in \overline{0, n+1} \setminus \{r\}$. *Если для некоторого* $\widetilde{A} \in D$ *выполняются соотношения:*

$$\varphi_i(\sigma, t_{j_k}) - p_n(\widetilde{A}, t_{j_k}) = (-1)^{k+i} h, \qquad k = \overline{0, n+1} \setminus \{\{r\} \cup \{v\}\},$$
$$\varphi_i(\sigma, t_{j_v}) - p_n(\widetilde{A}, t_{j_v}) = (-1)^{v+i}(h + w), \qquad p_n(\widetilde{A}, t_{j_r}) = y_s,$$

то $h_i(\sigma)$ *из* (5), (13) *удовлетворяет неравенству* $h_i(\sigma) > h$.

В [4, 6] рассмотрены некоторые элементы алгоритмизации, обобщим и продолжим рассуждения. Приведём монотонный алгоритм, позволяющий отыскать решение задачи (1), удовлетворяющее условию (II) теоремы 1 или сделать вывод о его неединственности.

Как и прежде, считаем $\mathfrak{R} \cap D = \varnothing$, то есть используем предположение об отсутствии среди решений задачи (2) решений задачи (1).

Приведём описание шагов *алгоритма*.

Начальный шаг. Выберем произвольно $\sigma \in \Omega$.

Решение базисных задач. Положим $\beta = 0$, если $h_0(\sigma) \geqslant h_1(\sigma)$, и $\beta = 1$ в противном случае. Пусть $\widetilde{A}$ — решение системы (5), (13) при $i = \beta$. По теореме 2 имеем $\rho^*_\beta(\sigma) = \rho_\beta(\widetilde{A}, \sigma) = h_\beta(\sigma)$.

Анализ текущего вектора на оптимальность. Проверяем условие:

$$\rho(\widetilde{A}) = \rho^*_\beta(\sigma). \tag{14}$$

Если (14) выполнено, алгоритм завершается, и решение задачи (1) совпадает с решением задачи (4) на текущем частичном базисе при $i = \beta$.

Если это не так, ищем $k_0 \in \overline{0, N}$: $t_{k_0} \notin \sigma$,

$$f(\widetilde{A}, t_{k_0}) = \max_{t_k \in \{T \setminus \sigma\}} f(\widetilde{A}, t_k), \qquad f(\widetilde{A}, t_{k_0}) > h_\beta(\sigma).$$

Если такого k_0 не найдено, алгоритм заканчиваем с выводом о неединственности решения задачи (1). Иначе продолжаем рассуждения.

Анализ вариантов перехода к новому базису. Возможны следующие варианты расположения точки t_{k_0} относительно узлов текущего частичного базиса.

1. $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$.

1.1. Существует $v \neq r$ такое, что $t_{j_v} < t_{k_0} < t_{j_{v+1}}$. Полагаем $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n+1}$, $l \neq v$, $l \neq v+1$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.1.1. Если для $i \in \{0, 1\}$ справедливы:

$$h_\beta(\sigma) = (-1)^i (p_n(\widetilde{A}, t_{j_v}) - y_{1+i, j_v}), \qquad f(\widetilde{A}, t_{k_0}) = (-1)^i (p_n(\widetilde{A}, t_{k_0}) - y_{1+i, k_0}), \tag{15}$$

то осуществляем присвоение: $\overline{j}_v := k_0$, $\overline{j}_{v+1} := j_{v+1}$.

1.1.2. Если (15) не выполняются, то $\overline{j}_v := j_v$, $\overline{j}_{v+1} := k_0$.

1.2. $v = 1, r = 0$ и $t_{j_0} < t_{k_0} < t_{j_1}$. Полагаем $\overline{j}_0 := j_r$, $\overline{j}_1 := k_0$.

1.2.1. Если выполняются равенства (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 1$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{2, n+1}$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{2, n+1}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

1.3. $v = n, r = n+1$ и $t_{j_n} < t_{k_0} < t_{j_{n+1}}$. Полагаем $\overline{j}_{n+1} := j_r$, $\overline{j}_n := k_0$.

1.3.1. Если выполняются равенства (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n-1}$, $\overline{\beta} := \beta$.

1.3.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{0, n-1}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

2. $t_{k_0} < t_{j_0}$.

2.1. $r = 0$. Полагаем $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_1 := j_r$.

2.1.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 1$, берём $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{2, n+1}$ и $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

2.1.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{2, n+1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

2.2. $0 < r \leqslant n+1$.

2.2.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = 0$, берём $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{1, n+1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

2.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_0 := k_0$, $\overline{j}_l := j_{l-1}$, $l = \overline{1, n}$, $\overline{\beta} := 1 - \beta$; $\overline{j}_{n+1} := j_r$, если $r = n+1$; $\overline{j}_{n+1} := j_n$, если $r < n+1$.

3. $t_{k_0} > t_{j_{n+1}}$.

3.1. $0 \leqslant r < n+1$.

3.1.1. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n+1$, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n}$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$ и $\overline{\beta} := \beta$.

3.1.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_0 := j_r$, если $r = 0$; $\overline{j}_0 := j_1$, если $r > 0$; $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{1, n}$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$; $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

3.2. $r = n+1$.

3.2.1. Полагаем $\overline{j}_n := j_r$, $\overline{j}_{n+1} := k_0$. Если выполняются (15) для $i = 0$ или $i = 1$,$v = n$, берём $\overline{j}_l := j_{l+1}$, $l = \overline{0, n-1}$ и $\overline{\beta} := 1 - \beta$.

3.2.2. Если (15) не выполняются, берём $\overline{j}_l := j_l$, $l = \overline{0, n-1}$ и $\overline{\beta} := \beta$.

Условие монотонности $h_{\overline{\beta}}(\overline{\sigma}) > h_\beta(\sigma)$ при наличии единственности, приводящее к получению решения задачи (1), вытекает из теоремы 3 — достаточно положить $h := h_\beta(\sigma)$ и переобозначить $\sigma := \overline{\sigma}$. После смены базиса возвращаемся к шагу алгоритма, на котором производится решение базисных задач. Перебор базисов заканчивается с выполнением (14).

Пример. Пусть $T = \{0 < 0.5 < 1 < 2 < 3\}$, $\Phi(0) = [0; 0]$, $\Phi(0.5) = [0.5; 4]$, $\Phi(1) = [0; 4]$, $\Phi(2) = [5; 8]$, $\Phi(3) = [8; 8]$, $n = 1$, $s = 0$, $\nu = 1$.

Выбираем начальный базис $\sigma = \{0 < 0.5 < 1\}$. Находим решения задач (4) при $i = 0$: $p_1(t) = 1 + 5t/3$, $h_0 = 4/3$; при $i = 1$: $p_1(t) = 1 + 4t/3$, $h_1 = 7/3$. Следовательно, $\beta = 1$.

Вычисляем уклонение м. о. от полинома $p_1(t) = 1 + 4/3t$ на множестве $\{T \setminus \sigma\}$, оно достигается в точке $t_3 = 2$ и составляет $8 - (1 + 8/3) = 13/3$, поэтому $k_0 = 2$.

Следуя правилу преобразования базиса, исключаем из базиса элемент 0.5 и включаем элемент 2 (п. 3.1.2. алгоритма, $r = 0$).

На новом базисе $\sigma = \{0 < 1 < 2\}$ получаем решения задач (4) при $i = 0$: $p_1(t) = 1 + 2t$, $h_0 = 3$; при $i = 1$: $p_1(t) = 1 + t/3$, $h_1 = 8/3$, и определяем $\beta = 0$.

Вычисляем уклонение м. о. от полинома $p_1(t) = 1 + 2t$ на T, оно составляет 3 и совпадает с h_0.
Решение задачи (1) единственно, $p_1(t) = 1 + 2t$, удовлетворяет условию (II), $\rho^{**} = 3$.
Решением задачи (2) является $p_1(t) = 8t/3$, $\rho^* = 8/3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена дискретная задача наилучшего приближения многозначного отображения с сегментными образами алгебраическим полиномом при наличии ограничения типа равенства. Получен критерий оптимальности решения, разработан рациональный алгоритм решения, являющийся модификацией алгоритма Валле-Пуссена.Рассматриваемая задача может применяться для оценки шумовых явлений при аппроксимации сложных хаотических процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (*проект* № 13-01-00175).

Библиографический список

1. *Выгодчикова И. Ю.* О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1, 2. С. 11–19.
2. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М. : Наука, 1967. 460 с.
3. *Выгодчикова И. Ю.* О методе аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом // Вестн. СГТУ. Сер. Математика и механика. 2013. Вып. 2(70). С. 7–12.
4. *Выгодчикова И. Ю.* Об условной задаче наилучшего приближения сегментной функции алгебраическим полиномом // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2008. Вып. 10. С. 12–15.
5. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М. : Наука, 1972. 368 с.
6. *Выгодчикова И. Ю.* О монотонном алгоритме решения задачи аппроксимации сегментной функции алгебраическим полиномом с ограничением // Математика. Механика : сб. науч. тр. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Вып. 14. С. 20–23.

About the Retrofit of the Valle'e-Poussin's Algorithm for Approximations of Multivalued Mappings by Algebraic Polynomial with Type Constraint Equality

I. Yu. Vygodchikova

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, VigodchikovaIY@info.sgu.ru

The discrete approximation of noisy data by algebraic polynomial with restriction of type equality is studied. The aim of the investigation is to obtain the fundamental properties of solution of the problem and development by them the new algorithm, more effective, in comparison with existing methods of the solution. The tasks of the research — gets the properties of the solution of the problem, presentation of the algorithm and the demonstration of its implementation. Research methodology continues P. L. Chebyshjov's and Valle-Pussen's method. Results. The criterion for optimality of the solution, which is a retrofit of the well-known in the theory of approximations of alternance P. L. Chebyshjov. Developed a rational algorithm, similar to the algorithm Vallee-Poussin. The conclusions. This problem has application to assess noise events at approximation to complex chaotic processes.

Key words: minimax, multivalued mapping, approximating polynomial, solutions's properties, computational algorithm.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*project no.* 13-01-00175).

References

1. Vygodchikova I. Yu. On the uniqueness of the solution of problems in the best approximation of multivalued mappings algebraic polynomial. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2006, vol. 6, iss. 1, pt. 2, pp. 11–19 (in Russian).
2. Zuhovickij S. I., Avdeeva L. I. Linejnoe i vypukloe programmirovanie [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka, 1967, 460 p. (in Russian).
3. Vygodchikova I. Yu. O metode approksimacii mnogoznachnogo otobrazhenija algebraicheskim polinomom [On the method of approximation of multivalued display algebraic polynomial]. *Vestnic SSTU, Ser.: Math. Mech.*, 2013, iss. 2 (70), pp. 7–12 (in Russian).
4. Vygodchikova I. Yu. Ob uslovnoj zadache nailuchshego priblizhenija segmentnoj funkcii algebraicheskim polinomom [About conditional task best the segment approximation of functions by algebraic polynomial]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Sa-

ratov, Saratov Univ. Press, 2008, iss. 10, pp. 12–15 (in Russian).
5. Dem'janov V. F., Malozemov V. N. Vvedenie v minimaks [Introduction to minimax]. Moscow, Nauka, 1972, 368 p. (in Russian).
6. Vygodchikova I. Yu. O monotonnom algoritme reshenija zadachi approksimacii segmentnoj funkcii algebraicheskim polinomom s ogranicheniem [About the monotone algorithm for solving task segment approximation of functions by algebraic polynomial with restriction]. *Matematika. Mehanika* [Mathematics. Mechanics]. Saratov, Saratov Univ. Press, 2012, iss. 14, pp. 20–23 (in Russian).

УДК 519.853.6

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МЕТОДОВ НАИСКОРЕЙШЕГО И ГИПОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СПУСКОВ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

М. В. Долгополик[1], Г. Ш. Тамасян[2]

[1]Аспирант кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, maxim.dolgopolik@gmail.com

[2]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории моделирования систем управления, Санкт-Петербургский государственный университет, g.tamasyan@spbu.ru

В настоящее время при исследовании экстремальных задач с ограничениями широко используется метод точных штрафных функций. Указанный метод успешно применяется при решении ряда задач вариационного исчисления, теории управления, вычислительной геометрии и математической диагностики. В статье с помощью теории точных штрафных функций исследуются бесконечномерные экстремальные задачи с линейными ограничениями. Рассматриваются методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для решения данных задач, их свойства и показывается, в каких случаях данные методы эквиваленты.

Ключевые слова: негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, точная штрафная функция, гиподифференциал, субдифференциал, метод гиподифференциального спуска, вариационное исчисление.

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество разнообразных методов решения гладких и негладких задач условной оптимизации, в частности, модификация метода множителей Лагранжа и метод штрафных функций. В последнее время при исследовании экстремальных задач с ограничениями широко используется метод точных штрафных функций [1–6], который позволяет сводить задачи условной оптимизации к эквивалентным задачам безусловной оптимизации. Данный подход был успешно применен при решении задач вариационного исчисления, теории управления, вычислительной геометрии, математической диагностики [5, 7–12]. Отметим, что даже если исходная задача условной оптимизации является гладкой, построенная с помощью теории точных штрафных функций, эквивалентная задача безусловной оптимизации всегда является существенно негладкой [5, 6].

На сегодняшний день имеется хорошо разработанная теория негладкого анализа [13] и недифференцируемой оптимизации [14], с помощью которой можно исследовать и эффективно решать широкий круг негладких задач. Одними из центральных понятий данной теории являются понятия субдифференциала и субдифференцируемости [13–17]. С помощью субдифференциала можно проверять необходимые условия экстремума исследуемой функции, находить направления спуска, а также строить численные методы решения негладких оптимизационных задач. Отметим, что во многих задачах на условный экстремум построенная точная штрафная функция принадлежит к классу субдифференцируемых функций, который совпадает с классом гиподифференцируемых функций [5, 7, 8, 11]. Поэтому к данному классу задач можно применить методы наискорейшего и гиподифференциального спусков [13, 16, 18]. При этом оказывается, что в ряде задач данные методы совпадают, если начальная точка удовлетворяет ограничениям в рассматриваемой задаче [5, 8, 18].

Целью данной статьи является выделить общий класс задач, в котором методы наискорейшего и гиподифференциального спусков для минимизации штрафной функции в рассматриваемой задаче совпадают, а также исследовать некоторые общие свойства этих методов в контексте данного класса