13. Demyanov V. F., Rubinov A. M. *Constructive nonsmooth analysis*. Frankfurt a/M, Verl. Peter Lang, 1995, 416 p.
14. Demyanov V. F., Vasiliev L. V. *Nondifferentiable optimization*. New York, Springer-Optimization Software, 1985, 452 p.
15. Ioffe A. D. Metric regularity and subdifferential calculus. *Russ. Math. Surv.*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 501–558, DOI: 10.1070/RM2000v055n03ABEH000292.
16. Demyanov V. F., Malozemov V. N. *Introduction to minimax*. New York, Dover, 1990, 307 p.
17. Borwein J. M., Zhu Q. J. A survey on subdifferential calculus with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1999, vol. 38, no. 6, pp. 687–773. DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00142-4.
18. Demyanov V. F., Dolgopolik M. V. Codifferentiable functions in Banach spaces: methods and applications to problems of variation calculus. *Vestnik St.-Petersburg. Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2013, iss. 3, pp. 48–67.
19. Demyanov V. F. Conditions for an extremum in metric spaces. *J. Global Optim.*, 2000, vol. 17, no. 1–4, pp. 55–63. DOI: 10.1023/A:1026599021286.
20. Gantmacher F. R. *The Theory of Matrices*. Reprinted by Amer. Math. Soc., AMS Chelsea Publ., 2000, 660 p.
21. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Oxford; New York, Pergamon Press, 1982, 589 p.

УДК 517.984

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА НА ПРОСТЕЙШЕМ НЕКОМПАКТНОМ ГРАФЕ С ЦИКЛОМ

М. Ю. Игнатьев

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, IgnatievMU@info.sgu.ru

Исследуется обратная задача рассеяния для дифференциальных операторов переменных порядков на простейшем некомпактном графе с циклом. Приведена теорема единственности восстановления коэффициентов операторов по данным рассеяния.

Ключевые слова: квантовые графы, дифференциальные операторы переменных порядков, обратные спектральные задачи, обратные задачи рассеяния.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение многих процессов и явлений в различных областях естествознания и техники связано с исследованием прямых и обратных спектральных задач для дифференциальных уравнений на геометрических графах (пространственных сетях)[1–4]. Наиболее изучены такие задачи для часто встречающегося в приложениях оператора Штурма–Лиувилля. В то же время ряд практически важных задач приводит к уравнениям высших порядков, причем порядки уравнений на разных ребрах графа могут быть различными [4]. Такие задачи лишь недавно стали предметом систематического изучения, и на данный момент исследованы недостаточно. В работе [5] впервые рассматривалась обратная спектральная задача для оператора переменного порядка на графе, точнее, на графе-звезде. Более трудный для изучения случай графа с (одним) циклом исследован в работе [6]. В настоящей работе, в отличие от работ [5, 6], изучается обратная спектральная задача (задача рассеяния) на некомпактном графе. Исследуемый граф состоит из цикла и луча, соединенных в общей вершине. На луче рассматривается уравнение произвольного высшего порядка, порядок уравнения на цикле равен 3 (в отличие от работы [6], где порядок уравнения на цикле равен 2).

Работа построена следующим образом. В части 1 мы вводим и исследуем так называемые решения типа Вейля, определяемые как функции, удовлетворяющие заданным дифференциальным уравнениям на ребрах графа и некоторым условиям склейки в вершине, а также имеющие заданные асимптотики на бесконечности вдоль луча. Исходя из свойств решений типа Вейля мы определяем данные рассеяния, ассоциированные с лучом, аналогично тому, как это было сделано для операторов высшего порядка на оси в [7]. В части 2 показано, что данные рассеяния, ассоциированные с лучом, однозначно определяют коэффициенты дифференциального уравнения на луче (соответствующую обратную задачу мы называем частичной обратной задачей рассеяния). В части 3 рассматривается задача восстановления оператора на всем графе (полная обратная задача рассеяния) и устанавливается соответствующая теорема единственности.

1. РЕШЕНИЯ ТИПА ВЕЙЛЯ

Пусть Γ — геометрический граф, состоящий из замкнутой кривой r_0 длины T и луча r_1, исходящего из некоторой точки $v_1 \in r_0$. Функцию y на графе Γ будем трактовать как пару функций $(y_0(x), x \in [0,T], y_1(x), x \in [0,\infty))$.

На цикле r_0 рассмотрим уравнение

$$\ell_0 y_0 \equiv D^3 y_0 + p_{01}(x) D y_0 + p_{00}(x) y_0 = \rho^3 y_0, \tag{1}$$

где ρ — спектральный параметр, $D = -id/dx$ и коэффициенты $p_{00}(x)$, $p_{01}(x)$ таковы, что $\ell_0^* = \ell_0$.

На луче r_1 рассмотрим уравнение

$$\ell_1 y_1 \equiv D^N y_1 + \sum_{s=0}^{N-2} p_{1s}(x) D^s y_1 = \rho^N y_1, \tag{2}$$

где $N \geq 3$ и для некоторого $\tau > 0$ выполнено условие:

$$\int\limits_0^\infty |p_{1s}(x)| \exp(\tau x)\, dx < \infty. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение следующие линейные формы:

$$U_\nu(y) := \sigma_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \sum_{s=0}^{\nu-2} \sigma_{\nu s} y^{(s)}(0), u_{\xi\nu}(y) = (-1)^{\chi_{\xi\nu}} y^{(\nu-1)}(\xi),$$

где $\xi \in \{0,T\}$, $\chi_{0\nu} = 0$, $\chi_{T\nu} = \chi$, $\nu = 1,2$, $\chi_{T3} = \chi + 1$, $\chi \in \{0,1\}$. Для функции $y = (y_0, y_1)$ на Γ и $\nu \in \overline{1,N}$ определим условие склейки $C(\nu)$ как равенство $u_{0\nu}(y_0) = u_{T\nu}(y_0) = U_\nu(y_1)$, а условие $K(\nu)$ равенством $u_{0\nu}(y_0) + u_{T\nu}(y_0) + U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu \leq 3$ и $U_\nu(y_1) = 0$ при $\nu > 3$.

Пусть $S_l := \{\arg(i\rho) \in ((l-1)\pi/N, l\pi/N)\}$. Для фиксированного l через R_k, $k = \overline{1,N}$ обозначим корни N-й степени из 1, занумерованные таким образом, что $\mathrm{Re}(i\rho R_1) < \mathrm{Re}(i\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(i\rho R_N)$ для всех $\rho \in S_l$.

Зафиксируем $\chi \in \{0,1\}$. Для каждого $k = \overline{1,N}$ в каждом из секторов S_l определим *решение типа Вейля порядка* k как решение системы (1), (2) $\psi_k(\rho) = (\psi_{k0}(x,\rho), \psi_{k1}(x,\rho))$ со следующими свойствами:

1) $\psi_{k1}(x,\rho) = \exp(i\rho R_k x)(1 + o(1))$, $x \to \infty$;

2) для $\psi_k(\rho)$ выполнены условия склейки $C(\nu)$, $\nu = \overline{1,\nu_k - 1}$, $\nu_k = \min\{k,3\}$, $K(\nu)$, $\nu = \overline{\nu_k, k}$.

Используя разложения $\psi_{k0}(x,\rho)$, $\psi_{k1}(x,\rho)$ по фундаментальным системам решений уравнений (1) и (2) соответственно, можно показать, что $\psi_k(\rho)$ существует и единственна при всех $\rho \in \bar{S}_l$ за исключением некоторого, не более чем счетного множества, не имеющего конечных предельных точек, кроме, возможно, точки 0. В дальнейшем мы будем считать, что эта последняя возможность исключена, более точно мы предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_0**.** При каждом k $\psi_{k1}(x,\rho)$ голоморфна в $S_l \cap \{|\rho| < \delta\}$ при некоторой $\delta > 0$, непрерывна в $\bar{S}_l \cap \{|\rho| < \delta\} \setminus \{0\}$ и $\psi_{k1}^{(\nu-1)}(x,\rho) = O\left(\rho^{-M}\right)$, $k,\nu = \overline{1,N}$ при $\rho \to 0$, где $M < \infty$.

Обозначим через $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$, $k = \overline{1,N}$, функции, образующие фундаментальную систему решений (свою для каждого сектора S_l) уравнения (2), построенную аналогично ФСР B_α^0 [8, § 3.1]. Напомним следующие свойства функций $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$:

1) при каждом $x \geq 0$ $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$ голоморфны по ρ в $S_l \cap \{|\rho| > \rho_\alpha\}$, причем $\rho_\alpha \to 0$ при $\alpha \to \infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} Y_{k1}^\alpha(x,\rho)\exp(-i\rho R_k x) = 1$;

3) $D^\nu Y_{k1}^\alpha(x,\rho) = (\rho R_k)^\nu \exp(i\rho R_k x)[1]$, $[1] := \left(1 + O(\rho^{-1})\right)$, $x \geq \alpha$, $\rho \to \infty$.

Зафиксируем α такое, что $Y_{k1}^\alpha(x,\rho)$ голоморфны в $S_l \cap \{|\rho| > \delta/2\}$ и непрерывны в $\bar{S}_l \cap \{|\rho| \geq \delta/2\}$. Тогда при $\rho \in \bar{S}_l \cap \{|\rho| \geq \delta/2\}$ с учетом условия 1 определения решений типа Вейля имеют место представления:

$$\psi_{k1}(x,\rho) = Y_{k1}^\alpha(x,\rho) + \sum_{j<k} \gamma_{jk}^\alpha(\rho) Y_{j1}^\alpha(x,\rho). \tag{4}$$

Для $\psi_{k0}(x,\rho)$ воспользуемся представлениями вида

$$\psi_{k0}(x,\rho)=\sum_{j=1}^{3}\beta_{jk}(\rho)C_j(x,\lambda), \qquad (5)$$

где $\lambda=\rho^3$ и $C_j(x,\lambda)$ суть решения уравнения $\ell_0 y=\lambda y$ при условиях $C_j^{(\nu-1)}(0,\lambda)=\delta_{j,\nu}$.

Подставляя (4), (5) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_{jk}^{\alpha}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Обозначим через $\Delta_k(\rho)$ определители этих СЛАУ и через Z_{kl} множества их нулей, лежащих в $\bar{S}_l\setminus\{0\}$ при $k\in\overline{2,N}$ и в $\bar{S}_l$ при $k=1$. Ясно, что $\psi_k(\rho)$ непрерывны на $\bar{S}_l\setminus(\{0\}\cup Z_{kl})$ и голоморфны в $S_l\setminus Z_{kl}$. Заметим, что при выполнении условия (3) функции $Y_{k1}^{\alpha}(x,\rho)$ допускают аналитическое продолжение в некоторую область вида $S_l^{\varepsilon}\setminus\{|\rho|\le\rho_\alpha\}$, где $S_l^{\varepsilon}:=S_l+i\varepsilon\exp\left(i\left(l-1/2\right)\pi/N\right)$. Следовательно, для любого $\rho_0\in Z_{kl}$ $\psi_{kj}(x,\rho)$ допускают голоморфное продолжение в некоторую проколотую окрестность ρ_0. Всюду далее предполагаем выполненным следующее условие.

Условие G_1**.** Множества Z_{kl} при различных k не пересекаются. Каждое $\rho_0\in Z_{kl}$ есть простой нуль $\Delta_k(\rho)$ и простой полюс $\psi_{kj}(x,\rho)$ (хотя бы при одном $j\in\{0,1\}$). Последнее означает, что существуют функции $\psi_{kj,\langle -1\rangle}(x,\rho_0)$, $j=0,1$, хотя бы одна из которых не является тождественным 0, такие, что функции

$$\psi_{kj}(x,\rho)-(\rho-\rho_0)^{-1}\psi_{kj,\langle -1\rangle}(x,\rho_0)$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Замечание. Поскольку $Y_{11}^{\alpha}(x,\rho)$ не зависит от α и при выполнении (3) допускает аналитическое продолжение в окрестность 0, определитель $\Delta_1(\rho)$ также допускает аналитическое продолжение в окрестность 0. Поэтому мы допускаем возможность $0\in Z_{1l}$, условие G_1 в этом случае требует, чтобы 0 был простым нулем $\Delta_1(\rho)$ и простым полюсом $\psi_1(\rho)$ (фактически, $\psi_{10}(x,\rho)$).

Из представления (4) вытекает, что для $\rho_0\in Z_{kl}$

$$\psi_{k1,\langle -1\rangle}(x,\rho_0)=\sum_{j<k}\gamma_{jk,\langle -1\rangle}^{\alpha}(\rho_0)Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0).$$

В силу условия G_1 все $\psi_{j1}(x,\rho)$, $j<k$, голоморфны в окрестности ρ_0, а представления (4) можно обратить следующим образом:

$$Y_{j1}^{\alpha}(x,\rho_0)=\psi_{j1}(x,\rho_0)+\sum_{s<j}g_{sj}(\rho_0)\psi_{s1}(x,\rho_0),$$

что приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Для любого* $\rho_0\in Z_{kl}$ *существуют (единственные) числа* $v_{jk}^{l}(\rho_0)$, $j<k$, *такие, что функции*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)-(\rho-\rho_0)^{-1}\sum_{j<k}v_{jk}^{l}(\rho_0)D^{\nu-1}\psi_{j1}(x,\rho_0), \qquad \nu=\overline{1,N}$$

голоморфны в окрестности ρ_0.

Для исследования поведения решений типа Вейля при больших ρ запишем их в виде

$$\psi_{k1}(x,\rho)=Y_{k1}(x,\rho)+\sum_{j<k}\gamma_{jk}(\rho)Y_{j1}(x,\rho), \qquad (6)$$

$$\psi_{k0}(x,\rho)=\sum_{j=1}^{3}\beta_{jk}(\rho)Y_{j0}(x,\rho). \qquad (7)$$

Через $Y_{k1}(x,\rho)$ в (6) обозначены $Y_{k1}^{\alpha}(x,\rho)$ при $\alpha=0$. Через $Y_{k0}(x,\rho)$ в (7) обозначены решения Бирхгофа уравнения (1) [8, § 3.1]. Напомним, что для решений $Y_{k0}(x,\rho)$ справедливы асимптотики следующего вида:

$$D^{\nu}Y_{s0}(x,\rho)=(\rho\omega^s)^{\nu-1}\exp\left(i\rho\omega^s x\right)[1], \qquad \omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$$

при $\rho\to\infty$ по любому замкнутому сектору в ρ-плоскости такому, что выражения $\mathrm{Re}(i\rho(\omega^s-\omega^j))$ для любых j,s сохраняют знак в этом секторе.

Подставляя (6), (7) в условия склейки из условия 2 определения решений типа Вейля, получим некоторую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\gamma_{jk}(\rho)$, $\beta_{jk}(\rho)$. Строку этой системы, содержащую U_ν и (или) $Y_{j0}^{(\nu-1)}$, поделим на $(i\rho)^{\nu-1}$ (нетрудно заметить, что выражения такого вида в пределах одной строки соответствуют одному и тому же ν). Решая полученную таким образом СЛАУ по правилу Крамера, получим представления

$$\gamma_{sk}(\rho)=-\frac{D_{sk}(\rho)}{D_k(\rho)},\tag{8}$$

где $D_k(\rho)$ — определитель системы, а $D_{sk}(\rho)$ могут быть получены из $D_k(\rho)$ формальной заменой Y_{s1} на Y_{k1}.

Рассмотрим следующую СЛАУ (она получается из описанной выше заменой Y_{kj} главными частями их асимптотик):

$$\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}=(-1)^{\chi_{T\nu}}\sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}\exp(i\rho\omega^sT)=\sigma_\nu\left(\sum\limits_{s=1}^{k-1}\gamma_{ks}R_s^{\nu-1}+R_k^{\nu-1}\right), & \nu=\overline{1,\nu_k-1}\\ \sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}+(-1)^{\chi_{T\nu}}\sum\limits_{s=1}^{3}\beta_{ks}\omega^{s(\nu-1)}\exp(i\rho\omega^sT)+\sigma_\nu\left(\sum\limits_{s=1}^{k-1}\gamma_{ks}R_s^{\nu-1}+R_k^{\nu-1}\right)=0, & \nu=\overline{\nu_k,3}\\ \sum\limits_{s=1}^{k-1}\gamma_{ks}R_s^{\nu-1}+R_k^{\nu-1}=0,\quad \nu=\overline{4,k}.\end{cases}$$

Обозначим ее определитель через $D_k^0(\rho)$. Нетрудно показать, что для $D_k^0(\rho)$ имеют место представления следующего вида:

$$D_k^0(\rho)=A_{k0}+\sum_{m=1}^{3}\left(A_{km}^{+}\exp\left(i\rho\omega^mT\right)+A_{km}^{-}\exp\left(-i\rho\omega^mT\right)\right),$$

где числа A_{k0}, $A_{km}^{\pm}$ зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Для определителей $D_k(\rho)$, $D_{sk}(\rho)$ аналогично получаются следующие асимптотические представления:

$$D_k(\rho)=[A_{k0}]+\sum_{m=1}^{3}\left([A_{km}^{+}]\exp\left(i\rho\omega^mT\right)+[A_{km}^{-}]\exp\left(-i\rho\omega^mT\right)\right),$$
$$D_{sk}(\rho)=[A_{sk0}]+\sum_{m=1}^{3}\left([A_{skm}^{+}]\exp\left(i\rho\omega^mT\right)+[A_{skm}^{-}]\exp\left(-i\rho\omega^mT\right)\right),$$

где числа A_{sk0}, $A_{skm}^{\pm}$ также зависят только от коэффициентов σ_ν форм U_ν и сектора S_l. Пусть выполнено следующее условие регулярности.

Условие R. $A_{km}^{\pm}\neq0$ для всех k,m,l.

Тогда из [9, теорема 5.8] вытекают (в частности) следующие утверждения.

Лемма 2. *Число элементов множества Z_{kl} в кольце $\{t\le|\rho|\le t+1\}$ ограничено некоторым числом, не зависящим от t.*

Лемма 3. *При $\rho\to\infty$, $\rho\in\bar S_l$, $dist(\rho,Z_{kl})>\varepsilon$ (где $\varepsilon>0$ произвольно) справедливы асимптотики:*

$$D_k(\rho)=D_k^0(\rho)[1],\qquad |D_{sk}(\rho)|\le C|D_k^0(\rho)|,\qquad |D_{sk}(\rho)-D_{sk}^0(\rho)|\le C|\rho|^{-1}|D_k^0(\rho)|,$$

где $D_{sk}^0(\rho):=A_{sk0}+\sum\limits_{m=1}^{3}\left(A_{skm}^{+}\exp\left(i\rho\omega^mT\right)+A_{skm}^{-}\exp\left(-i\rho\omega^mT\right)\right).$

Из леммы 3 и представлений (6), (8) вытекает, в свою очередь, следующее утверждение.

Лемма 4. *При $\rho\to\infty$, $\rho\in\bar S_l$, $dist(\rho,Z_{kl})>\varepsilon$ справедливы асимптотики:*

$$D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)=(\rho R_k)^\nu\exp(i\rho R_kx)[1]-\sum_{s<k}\left(\frac{D_{sk}^0(\rho)}{D_k^0(\rho)}+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)(\rho R_s)^\nu\exp(i\rho R_sx).$$

2. ЧАСТИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Пусть $\chi \in \{0,1\}$ фиксировано и $\psi_k(\rho)$, $k=\overline{1,N}$, — решения типа Вейля, построенные, как описано в предыдущем параграфе, с выбранным значением χ в условиях склейки $C(\nu)$, $K(\nu)$. Исходя из свойств решений типа Вейля мы определим данные рассеяния, ассоциированные с лучом r_1 и покажем, что эти данные однозначно определяют коэффициенты уравнения (2).

Определим матрицу $\Psi=(\Psi_{\nu k})_{k,\nu=\overline{1,N}}$ (ν — номер строки): $\Psi_{\nu k}(x,\rho) := D^{\nu-1}\psi_{k1}(x,\rho)$. Для $\rho_0 \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ (где $\Sigma_l := \bar{S}_l \cap \bar{S}_{l+1}$, $Z_l := \bigcup\limits_k Z_{kl}$) определим: $\Psi_-(x_1,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_l} \Psi(x,\rho)$, $\Psi_+(x,\rho_0) := \lim\limits_{\rho\to\rho_0,\rho\in S_{l+1}} \Psi(x,\rho)$ и матрицу $v(\rho_0) := \Psi_-^{-1}(x,\rho_0)\Psi_+(x,\rho_0)$. Далее, для $\rho_0 \in Z_{kl}$ определим матрицы $v_l(\rho_0) := \left(v^l_{jk}(\rho_0)\right)_{j,k=\overline{1,N}}$ (j — номер строки), где $v^l_{jk}(\rho_0)$ — числа из утверждения леммы 1.

Определение. *Данными рассеяния, ассоциированными с лучом* r_1, назовем набор

$$J_1^\chi = \left\{ v(\rho),\ \rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1}),\ Z_{kl},\ v_l(\rho),\ \rho \in Z_{kl},\ k=\overline{1,N},\ l=\overline{1,2N} \right\}.$$

Наряду с уравнениями (1), (2) рассмотрим уравнения того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{p}_{sj}$. Через $\tilde{\psi}_k(\rho)$ обозначим соответствующие решения типа Вейля (построенные при тех же условиях склейки). Предположим, что условия G_0, G_1 также выполнены, тогда можно определить данные рассеяния $\tilde{J}_1^\chi$.

Теорема 1. *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J}_1^\chi = J_1^\chi$ следует $\tilde{p}_{1s} = p_{1s}$, $s=\overline{0,N-2}$. Кроме того, $\tilde{\Psi}=\Psi$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую *матрицу спектральных отображений* [7, 8]: $P(x,\rho) := \Psi(x,\rho)\tilde{\Psi}^{-1}(x,\rho)$. В силу равенств $\tilde{Z}_{kl} = Z_{kl}$ и $\tilde{v}(\rho)=v(\rho)$, $\rho \in \Sigma_l \setminus (Z_l \cup Z_{l+1})$ матрица $P(x,\rho)$ голоморфна по ρ в $\mathbf{C} \setminus \bigcup\limits_{k,l} Z_{kl} \setminus \{0\}$.

Из леммы 1 следует, что для любого $\rho_0 \in Z_{kl}$ матрица

$$\Psi(x,\rho)\left(I - (\rho-\rho_0)^{-1} v_l(\rho_0)\right),$$

где I — единичная матрица, голоморфна в окрестности ρ_0, и аналогичное утверждение справедливо для $\tilde{\Psi}$. В силу $\tilde{v}^l(\rho_0) = v^l(\rho_0)$ отсюда следует, что $P(x,\rho)$ ограничена в окрестности ρ_0, т.е. ρ_0 является устранимой особенностью $P(x,\rho)$. Таким образом, в условиях теоремы $P(x,\rho)$ голоморфна в $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Далее, из асимптотик леммы 4 вытекают оценки:

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{j-k}\right), \qquad \rho\to\infty, \qquad \operatorname{dist}\left(\rho, \bigcup_{k,l} Z_{kl}\right) > \varepsilon, \tag{9}$$

а из условия G_0 — оценка

$$P_{jk}(x,\rho) = O\left(\rho^{-M_1}\right), \qquad M_1 < \infty, \qquad \rho \to 0. \tag{10}$$

С учетом леммы 2 из (9), (10) следует, что $P(x,\rho)$ представима в виде

$$P(x,\rho) = \sum_{\nu=-M_1}^{N-1} \rho^\nu P_{\langle\nu\rangle}(x). \tag{11}$$

Из условия 1 определения решений типа Вейля следует:

$$\lim_{x\to\infty} P_{\langle\nu\rangle}(x) = 0, \qquad \nu \ne 0, \qquad \lim_{x\to\infty} P_{\langle 0\rangle}(x) = I.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.54 [7] выводим отсюда, что $P_{\langle\nu\rangle}(x) \equiv 0$ при $\nu \ne 0$, а рассуждая, как при доказательстве леммы 3.59 [7], заключаем, что при $j \le k$ $P_{\langle 0\rangle,jk}(x) \equiv \delta_{j,k}$. С учетом (11) это означает, в частности, что $P_{1k}(x,\rho) \equiv \delta_{1,k}$, т. е. первые строки матриц $\tilde{\Psi}$ и Ψ тождественно равны. А поскольку остальные строки в этих матрицах получаются дифференцированием первой строки, матрицы $\tilde{\Psi}$ и Ψ совпадают. □

3. ПОЛНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Для восстановления коэффициентов уравнения (1) нам понадобятся два набора данных рассеяния, ассоциированных с лучом r_1 J_1^0, J_1^1 и, возможно, некоторый конечный набор чисел, связанных с (1) непосредственно.

Обозначим через $\Lambda^{\pm}$ спектры краевых задач для уравнения $\ell_0 y = \lambda y$ с условиями $y^{(\nu-1)}(0) \pm \pm y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = \overline{1,3}$, через $\Lambda_s^{\pm}$, $s = 1,2$ — спектры задач для этого же уравнения с условиями $y^{(s-1)}(0) = y^{(s-1)}(T) = y^{(2-s)}(0) \pm y^{(2-s)}(T) = 0$ (все собственные значения берутся с учетом их алгебраической кратности). Характеристические функции указанных задач обозначим через $\Delta_{30}^{\pm}(\lambda)$ и $\Delta_{3s}^{\pm}(\lambda)$ соответственно. Определим $\Lambda_{3s}^{\pm} := \Lambda^{\pm} \cap \Lambda_s^{\pm}$.

Определение. *Глобальными данными рассеяния* назовем набор $J = \{J_1^0, J_1^1, \Lambda_{31}^+, \Lambda_{31}^-, \Lambda_{32}^+, \Lambda_{32}^-\}$.

Теорема 2. *При выполнении условий G_0, G_1 и условия регулярности склейки R из $\tilde{J} = J$ следует $\tilde{p}_{1s} = p_{1s}$, $s = \overline{0, N-2}$, $\tilde{p}_{0s} = p_{0s}$, $s = 0,1$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 из совпадения данных рассеяния следует совпадение коэффициентов уравнения (2) и решений типа Вейля на луче r_1. Теперь единственность восстановления коэффициентов уравнения (1) следует из единственности решения классической обратной задачи на конечном отрезке по матрице Вейля [8, гл. 3]. Покажем это.

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = 1,2$ суть решения Вейля для уравнения $\ell_0 y = \lambda y$, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\Phi_1(0,\lambda) = 1, \qquad \Phi_1(T,\lambda) = \Phi_1'(T,\lambda) = 0,$$
$$\Phi_2(0,\lambda) = 0, \qquad \Phi_2'(0,\lambda) = 1, \qquad \Phi_2(T,\lambda) = 0.$$

Определим функции Вейля $M_{k\nu}(\lambda) := \Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda)$. Имеют место представления [1, § 3.1]:

$$M_{12}(\lambda) = -\frac{d_{12}(\lambda)}{d_1(\lambda)}, \qquad M_{13}(\lambda) = -\frac{d_{13}(\lambda)}{d_1(\lambda)},$$

где

$$d_1 = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_2' & C_3' \end{vmatrix}, \qquad d_{12} = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_1' & C_3' \end{vmatrix}, \qquad d_{13} = \begin{vmatrix} C_2 & C_1 \\ C_2' & C_1' \end{vmatrix}.$$

Здесь для краткости в выражениях вида $C_j^{(\nu)}(T,\lambda)$ аргументы (T,λ) опущены. Отметим, кроме того, что в силу самосопряженности дифференциального выражения ℓ_0 имеет место связь $M_{23}(\lambda) = \overline{M_{12}(\bar{\lambda})}$.

Вернемся к доказательству теоремы. Условия склейки для решения $\psi_3(\rho)$ приводят к следующим соотношениям (где различные знаки соответствуют разным $\chi \in \{0,1\}$):

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,1} \pm C_s(T,\lambda)\right) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,2} \pm C_s'(T,\lambda)\right) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s3}\left(\delta_{s,3} \pm C_s''(T,\lambda)\right) = -U_3(\psi_{31}^{\pm}), \\ \beta_{13} = U_1(\psi_{31}^{\pm}), \\ \beta_{23} = U_2(\psi_{31}^{\pm}), \end{cases} \tag{12}$$

Применяя к (12) теорему Кронекера – Капелли (как к СЛАУ относительно β_{s3}, $s = 1,2,3$), получим соотношения:

$$\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 & 0 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' & 0 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm}) \\ 1 & 0 & 0 & U_1(\psi_{31}^{\pm}) \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 & 0 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' & 0 \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 & \mp U_3(\psi_{31}^{\pm}) \\ 0 & 1 & 0 & U_2(\psi_{31}^{\pm}) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Соотношения (13), (14) могут быть переписаны в терминах характеристических функций $\Delta^{\pm}_{3s}(\lambda)$, введенных в начале параграфа. С учетом представлений:

$$\Delta^{\pm}_{30} = \pm\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \pm 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta^{\pm}_{31} = \begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ C_2' \pm 1 & C_3' \end{vmatrix}, \qquad \Delta^{\pm}_{32} = \begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_3 \\ C_1' & C_3' \end{vmatrix},$$

эти соотношения принимают вид

$$U_1(\psi^{\pm}_{31})\Delta^{\pm}_{30} \mp U_3(\psi^{\pm}_{31})\Delta^{\pm}_{31} = U_2(\psi^{\pm}_{31})\Delta^{\pm}_{30} \pm U_3(\psi^{\pm}_{31})\Delta^{\pm}_{32} = 0,$$

что приводит к соотношениям:

$$\frac{\Delta^{\pm}_{31}}{\Delta^{\pm}_{30}} = \pm\frac{U_1(\psi^{\pm}_{31})}{U_3(\psi^{\pm}_{31})}, \qquad \frac{\Delta^{\pm}_{32}}{\Delta^{\pm}_{30}} = \mp\frac{U_2(\psi^{\pm}_{31})}{U_3(\psi^{\pm}_{31})}.$$

В условиях теоремы, как уже было замечено, $\tilde{\psi}^{\pm}_{31} = \psi^{\pm}_{31}$ и, следовательно,

$$\frac{\tilde{\Delta}^{\pm}_{31}}{\tilde{\Delta}^{\pm}_{30}} = \frac{\Delta^{\pm}_{31}}{\Delta^{\pm}_{30}}, \qquad \frac{\tilde{\Delta}^{\pm}_{32}}{\tilde{\Delta}^{\pm}_{30}} = \frac{\Delta^{\pm}_{32}}{\Delta^{\pm}_{30}}. \tag{15}$$

Фигурирующие в (15) характеристические функции $\Delta^{\pm}_{3s}(\lambda)$ однозначно определяются заданием своих нулей, а в силу (15) и условия $\tilde{\Lambda}^{\pm}_{3s} = \Lambda^{\pm}_{3s}$ эти множества совпадают (с учетом кратностей). Таким образом, в условиях теоремы имеем:

$$\tilde{\Delta}^{\pm}_{3s} = \Delta^{\pm}_{3s},\ s = \overline{0,2}. \tag{16}$$

Учитывая, что

$$d_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{+}_{31} + \Delta^{-}_{31}\right), \qquad d_{12} = \frac{1}{2}\left(\Delta^{+}_{32} + \Delta^{-}_{32}\right),$$

из (16) следует, что $\tilde{d}_1 = d_1$, $\tilde{d}_{12} = d_{12}$. Это влечет, в свою очередь, $\tilde{M}_{12} = M_{12}$, $\tilde{M}_{23} = M_{23}$.

Осталось показать, что функция Вейля M_{13} также однозначно восстанавливается по глобальным данным рассеяния. Рассмотрим решение типа Вейля $\psi_1(\rho)$. Для него условия склейки приводят к системе вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,1} \pm C_s(T,\lambda)\right) + U_1(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,2} \pm C_s'(T,\lambda)\right) + U_2(Y_{11}) = 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{3} \beta_{s1}\left(\delta_{s,3} \mp C_s''(T,\lambda)\right) + U_3(Y_{11}) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Определитель системы (17) представляет собой целую функцию $\Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$ вида

$$\Delta^{\pm}_{10} = \pm\begin{vmatrix} C_1 \pm 1 & C_2 & C_3 \\ C_1' & C_2' \pm 1 & C_3' \\ C_1'' & C_2'' & C_3'' \mp 1 \end{vmatrix}.$$

В силу условия G_1 $\Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$ имеет только простые нули, совпадающие с 3 степенями элементов множества $\bigcup\limits_{l} Z_{1l}$ и, таким образом, в условиях теоремы $\tilde{\Delta}^{\pm}_{10}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$. Заметим теперь, что

$$\frac{1}{2}\left(\Delta^{\pm}_{10} - \Delta^{\pm}_{30}\right) = d_{13} \mp (C_1 + C_2'). \tag{18}$$

С учетом установленных ранее равенств $\tilde{\Delta}^{\pm}_{10}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{10}(\lambda)$, $\tilde{\Delta}^{\pm}_{30}(\lambda) = \Delta^{\pm}_{30}(\lambda)$ (18) влечет $\tilde{d}_{13} = d_{13}$ и, следовательно, $\tilde{M}_{13} = M_{13}$. □

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1436.2014K).

Библиографический список

1. *Langese J., Leugering G., Schmidt J.* Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. Boston : Birkhauser, 1994.
2. *Kuchment P.* Quantum graphs. Some basic structures // Waves Random Media. 2004. Vol. 14. P. S107–S128.
3. *Pokornyi Yu., Borovskikh A.* Differential equations on networks (geometric graphs) // J. Math. Sci. (N.Y.). 2004. Vol. 119, № 6. P. 691–718.
4. *Покорный Ю. В., Белоглазова Т. В., Дикарева Е. В., Перловская Т. В.* О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 1. С. 146–148.
5. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов на звездообразном графе с разными порядками на разных ребрах // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 1, ч. 2. С. 112–116.
6. *Bondarenko N.* An inverse problem for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges. Preprint arXiv:1309.5360v3.
7. *Beals R.* The inverse problem for ordinary differential operators on the line // Amer. J. Math. 1985. Vol. 107. P. 281–366.
8. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М. : Физматлит, 2007. 384 с.
9. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М. : Физматлит, 1983. 176 с.

Uniqueness of Solution of the Inverse Scattering Problem for Various Order Differential Equation on the Simplest Noncompact Graph with Cycle

M. Yu. Ignatyev

Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia, IgnatievMU@info.sgu.ru

An inverse scattering problem is studied for variable orders differential operators on simplest noncompact graph with cycle. A uniqueness theorem of recovering coefficients of operators from the scattering data is provided.

Key words: quantum graphs, variable orders differential operators, inverse spectral problems, inverse scattering problems.

The results obtained in the framework of the national tasks of the Ministry of education and science of the Russian Federation (*project no.* 1.1436.2014K).

References

1. Langese J., Leugering G., Schmidt J. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures.* Boston, Birkhauser, 1994.
2. Kuchment P. Quantum graphs. Some basic structures. *Waves Random Media*, 2004, vol. 14, pp. S107–S128.
3. Pokornyi Yu., Borovskikh A. Differential equations on networks (geometric graphs). *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 691–718.
4. Pokornyi Yu. V., Beloglazova T. V., Dikareva E. V., Perlovskaya T. V. Green function for a locally interacting system of ordinary equations of different orders. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 1, pp. 141–143.
5. Yurko V. A. Recovering Differential Operators on Star-Type Graphs with Different Orders on Different Edges. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, iss. 1, pt. 2, pp. 112–116 (in Russian).
6. Bondarenko N. *An inverse problem for the differential operator on the graph with a cycle with different orders on different edges*. Preprint arXiv:1309.5360v3.
7. Beals R. The inverse problem for ordinary differential operators on the line. *Amer. J. Math.*, 1985, vol. 107, pp. 281–366.
8. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnyh spectralnyh zadach* [Introduction to the Theory of the Inverse Spectral Problems]. Moscow, Fizmatlit, 2007, 384 p. (in Russian).
9. Leont'ev A. F. *Tselye functsii. Rjady eksponent* [Entire Functions. Series of Exponentials]. Moscow, Fizmatlit, 1983, 176 p. (in Russian).