УДК 517.956.223+517.575

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В. В. Карачик

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и функционального анализа, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, karachik@susu.ru

Рассматривается классическая задача Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. Для задачи Дирихле с полиномиальной правой частью и нулевыми граничными данными построено полиномиальное решение. Примененный подход основан на представлении Альманси полигармонических функций, а также на полученном ранее явном представлении гармонических компонент, выраженных через заданную полигармоническую функцию. В случае гармонического уравнения из полученной формулы следует известное представление решения задачи Дирихле через функцию Грина.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение и полиномы, задача Дирихле.

Хорошо известна [1] классическая задача Дирихле для неоднородного полигармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^m u(x) = Q(x), \quad x \in S; \qquad u_{|\partial S} = f_0(s), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}_{|\partial S} = f_{m-1}(s), \quad s \in \partial S,$$

где ν — внешняя нормаль к единичной сфере ∂S. Множество работ посвящено этой задаче. Из последних отметим работы [2, 3], посвященные представлению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения и ее свойствам.

Настоящая работа является продолжением исследований автора, начатых в [4–8] по построению важного класса решений задачи Дирихле — полиномиальных решений. В основе предлагаемого подхода лежит представление Альманси. Имеются многочисленные работы, посвященные обобщению представления Альманси на дифференциальные операторы, отличные от оператора Лапласа (см., напр., [1, 7, 8]). В работе [5] были построены полиномиальные решения задачи Дирихле, а также обобщенной третьей краевой задачи для уравнения Пуассона, а в работе [6] исследовалась задача Дирихле для бигармонического уравнения в единичном шаре. Настоящая работа является обобщением этих исследований на задачу Дирихле для l-гармонического уравнения $\Delta^l u(x) = Q(x)$, $x \in S$.

Рассмотрим следующую однородную краевую задачу для неоднородного l-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$:

$$\Delta^l u(x) = Q(x), \qquad x \in S; \qquad u_{|\partial S} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{l-1} u}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = 0 \tag{1}$$

с полиномиальной правой частью $Q(x)$ и при $n \geqslant 3$.

Пусть $(a, b)_k = a(a+b)\cdots(a+(k-1)b)$ — обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$. При $b = 1$ пишут $(a, 1)_k = (a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$. Факториальную степень $t^{[k]}$ определим равенством $t^{[k]} = t(t-1)\cdots(t-k+1)$ [9]. Введем оператор $\Lambda u(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_{x_k}(x)$. Отметим важное свойство оператора Λ.

Лемма 1. *На единичной сфере ∂S имеет место равенство* $\dfrac{\partial^k u}{\partial \nu^k}_{|\partial S} = \Lambda^{[k]} u_{|\partial S}$.

Исследуем задачу Дирихле (1) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$, где $R_{m-2s}(x)$ — однородный гармонический полином степени $m - 2s$. Докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Решение $v_s(x)$ однородной задачи Дирихле* (1) *при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ имеет вид*

$$v_s(x) = \left(|x|^{2s+2l} - l\binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{|x|^{2i}}{s+l-i}\right) \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}}, \tag{2}$$

где $C_{m,s,l} = (2s+2, 2)_l (2m-2s+n, 2)_l$.

Доказательство. Пусть полином $v_s(x)$ определяется формулой

$$v_s(x) = \frac{1}{C_{m,s,l}} \left(|x|^{2s+2l} R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} |x|^{2i} H^i_{m-2s}(x) \right), \tag{3}$$

где $H^i_{m-2s}(x)$ — однородные гармонические полиномы степени $m-2s$. Используя значение константы $C_{m,s,l}$ из условия теоремы, получим:

$$\Delta^l v_s(x) = \frac{1}{C_{m,s,l}} \Delta^l \left(|x|^{2s+2l} R_{m-2s}(x) \right) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x),$$

т. е. полином $v_s(x)$ — решение уравнения из (1) при $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$. Будем подбирать однородные полиномы $H^i_{m-2s}(x)$ так, чтобы выполнялись однородные граничные условия из (1). Тогда будем иметь $R_{m-2s}(x) - \sum\limits_{i=0}^{l-1} H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow v_{s|\partial S} = 0$. Далее, используя лемму 1 и для краткости изложения обозначения $\delta_i = m + 2i - 2s$ и $\delta = m + 2l$, получим:

$$\delta R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow (\Lambda^{[1]} v_s)_{|\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_s}{\partial \nu}_{|\partial S} = 0,$$

$$\dots$$

$$\delta^{[l-1]} R_{m-2s}(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \delta_i^{[l-1]} H^i_{m-2s}(x) = 0 \Rightarrow (\Lambda^{[l-1]} v_s)_{|\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^{l-1} v_s}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = 0,$$

и поэтому для определения $H^i_{m-2s}(x)$ необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{l-1} \delta_i^{[j]} H^i_{m-2s}(x) = \delta^{[j]} R_{m-2s}(x), \quad j = 0, \dots, l-1. \tag{4}$$

Определитель $\mathscr{D}$ этой системы уравнений относительно $H^i_{m-2s}(x)$ имеет вид

$$\mathscr{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{l-1} \\ \dots & & & \\ \delta_0^{[l-1]} & \delta_1^{[l-1]} & \dots & \delta_{l-1}^{[l-1]} \end{vmatrix} = W[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}] = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant l-1} (\delta_i - \delta_j),$$

где $W[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}]$ — определитель Вандермонда порядка l. Поскольку $\delta_i - \delta_j = 2(i-j)$, то получим $\mathscr{D} = \prod\limits_{i=1}^{l-1} (2i)!!$. Обозначим через $\mathscr{D}_{i-1}$ определитель, получающийся из определителя $\mathscr{D}$ заменой столбца с номером i на столбец свободных членов системы (4). Тогда имеем:

$$\mathscr{D}_{i-1} = R_{m-2s}(x) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \delta_0 & \cdots & \delta_{i-2} & \delta & \delta_i & \cdots & \delta_{l-1} \\ \dots & & & & & & \\ \delta_0^{[l-1]} & \dots & \delta_{i-2}^{[l-1]} & \delta^{[l-1]} & \delta_i^{[l-1]} & \dots & \delta_{l-1}^{[l-1]} \end{vmatrix} =$$

$$= R_{m-2s}(x) W[\delta_0, \dots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \dots, \delta_{l-1}], \quad i = 1, \dots, l.$$

Вычислим определитель Вандермонда $W[\delta_0, \dots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \dots, \delta_{l-1}]$. Имеем:

$$W[\delta_0, \dots, \delta_{i-2}, \delta, \delta_i, \dots, \delta_{l-1}] = W[\delta_0, \dots, \delta_{l-1}] \frac{\prod\limits_{j=0}^{i-2} (\delta - \delta_j) \prod\limits_{j=i}^{l-1} (\delta_j - \delta)}{\prod\limits_{j=0}^{i-2} (\delta_{i-1} - \delta_j) \prod\limits_{j=i}^{l-1} (\delta_j - \delta_{i-1})} =$$

$$= W[\delta_0, \dots, \delta_{l-1}] \frac{(-1)^{l-i} \prod\limits_{j=0,\, j \neq i-1}^{l-1} (\delta - \delta_j)}{(2i-2)!!(2l-2i)!!} = \mathscr{D} \frac{(-1)^{l-i}}{(l-1)!} \binom{l-1}{i-1} \prod_{j=1,\, j \neq l-i+1}^{l} (s+j),$$

где учтено, что $\delta_i = m + 2i - 2s$ и $\delta = m + 2l$. Отсюда вытекает, что

$$H^{i-1}_{m-2s}(x) = \frac{\mathscr{D}_{i-1}}{\mathscr{D}} = R_{m-2s}(x) l \binom{s+l}{l} (-1)^{l-i} \binom{l-1}{i-1} \frac{1}{s+l-i+1}$$

при $i = 1, \dots, l$. Подставляя полученные значения $H^i_{m-2s}(x)$ в формулу (3), получим:

$$v_s(x) = \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} \left(|x|^{2s+2l} - l \binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{|x|^{2i}}{s+l-i} \right).$$

Отсюда следует равенство (2), утверждаемое в лемме. □

Преобразуем полученное решение.

Лемма 3. *Решение* (2) *однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = |x|^{2s} R_{m-2s}(x)$ *можно записать в виде*

$$v_s(x) = (|x|^2 - 1)^l \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} \sum_{i=0}^{s} \binom{s+l}{i+l} (|x|^2 - 1)^i, \tag{5}$$

где $C_{m,s,l} = (2s+2, 2)_l (2m - 2s + n, 2)_l$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - l \binom{s+l}{l} \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^{l-1-i} \binom{l-1}{i} \frac{\tau^i}{s+l-i}.$$

Тогда в соответствии с (2) имеет место равенство

$$v_s(x) = \frac{R_{m-2s}(x)}{C_{m,s,l}} P(|x|^2). \tag{6}$$

Преобразуем полином $P(\tau)$. Поскольку

$$\frac{\tau^i}{s+l-i} = \tau^i \int_0^1 t^{s+l-1-i} dt = \int_0^1 \tau^i t^{l-1-i} t^s dt,$$

то

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - l \binom{s+l}{l} \int_0^1 t^s \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \tau^i (-t)^{l-1-i} dt = \tau^{s+l} - l \binom{s+l}{l} \int_0^1 t^s (\tau - t)^{l-1} dt.$$

Не трудно видеть, что

$$l \int_0^1 (\tau - t)^{l-1} t^s dt = l \int_0^1 (\tau - t)^{l-1} d\frac{t^{s+1}}{s+1} = \frac{l}{s+1} (\tau - t)^{l-1} t^{s+1} \Big|_0^1 + \frac{l(l-1)}{s+1} \int_0^1 (\tau - t)^{l-2} t^{s+1} dt =$$

$$= \frac{l}{s+1} (\tau - 1)^{l-1} + \frac{l(l-1)}{(s+1)(s+2)} (\tau - t)^{l-2} t^{s+2} \Big|_0^1 + \frac{l(l-1)(l-2)}{(s+1)(s+2)} \int_0^1 (\tau - t)^{l-3} t^{s+2} dt = \dots =$$

$$= l! s! \sum_{k=0}^{l-2} \frac{(\tau - 1)^{l-1-k}}{(s+k+1)!(l-1-k)!} + \frac{l! s!}{(s+l-1)!} \int_0^1 (\tau - t)^0 t^{s+l-1} dt = l! s! \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(\tau - 1)^{l-1-k}}{(s+k+1)!(l-1-k)!} =$$

$$= l! s! \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\tau - 1)^j}{(s+l-j)! j!} = \frac{l! s!}{(s+l)!} \sum_{j=0}^{l-1} \binom{s+l}{j} (\tau - 1)^j.$$

Поэтому

$$P(\tau) = \tau^{s+l} - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{s+l}{j} (\tau - 1)^j = \sum_{j=l}^{s+l} \binom{s+l}{j} (\tau - 1)^j = (\tau - 1)^l \sum_{k=0}^{s} \binom{s+l}{k+l} (\tau - 1)^k.$$

Подставляя полученное значение $P(\tau)$ в формулу (6), получим (5). □

Теперь можно построить полином $u_0(x)$ — решение задачи Дирихле (1) при $Q(x) = Q_m(x)$ — однородный полином степени m.

Лемма 4. *Решение* (2) *однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = Q_m(x)$ *можно записать в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{s} |x|^{2i} \binom{l-1+s-i}{l-1} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{m-2s+2j+n/2-1}{j!(l+s-j)!(m-2s+j+n/2-1)_{s+l+1}}. \tag{7}$$

Доказательство. Разложим однородный полином $Q_m(x)$ по формуле Альманси, а затем применим к каждому слагаемому лемму 3, где s заменяется на k и решение каждой такой однородной задачи обозначается через $v_k(x)$. Используя представление $R_{m-2k}(x)$ из [5], решение $u_0(x)$ рассматриваемой задачи запишем в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{[m/2]} v_k(x) = (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{R_{m-2k}(x)}{C_{m,k,l}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{2m-4k+n-2}{(2,2)_k(2k+2,2)_l(2m-2k+n,2)_l} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s |x|^{2s} \Delta^{s+k} Q_m(x)}{(2,2)_s(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s(2m-4k+n-2)|x|^{2s}\Delta^{s+k}Q_m(x)}{(2,2)_s(2,2)_{k+l}(2m-4k-2s+n-2,2)_{s+k+l+1}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k+l}{i+l} (|x|^2-1)^i =$$
$$= (|x|^2-1)^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^r Q_m(x)}{4^{r+l}} \sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)|x|^{2s}}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}} \sum_{i=0}^{r-s} \frac{(|x|^2-1)^i}{(i+l)!(r-s-i)!}. \tag{8}$$

В полученном выражении участвует следующий полином:

$$R_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(t-1)^i}{(i+l)!(m-i)!}.$$

Преобразуем его. Воспользуемся обозначением $\tau^{i,!} = \tau^i/i!$ и следующим равенством:

$$\frac{1}{(i+l)!} = \frac{1}{i!}\int_0^1 \tau^i (1-\tau)^{l-1,!} d\tau.$$

Тогда, используя свойства бета функции Эйлера $\mathrm{B}(x)$, будем иметь:

$$R_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \int_0^1 \frac{((t-1)\tau)^i}{i!(m-i)!}(1-\tau)^{l-1,!} d\tau = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} ((t-1)\tau)^i \, d\tau =$$
$$= \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!}((t-1)\tau+1)^m \, d\tau = \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-\tau)^{l-1,!}(t\tau+1-\tau)^m \, d\tau =$$
$$= \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{t^i}{i!(m-i)!}\int_0^1 \tau^i(1-\tau)^{l-1+m-i} d\tau = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{\mathrm{B}(i+1,l+m-i)}{i!(m-i)!} t^i =$$
$$= \frac{1}{(l-1)!(l+m)!}\sum_{i=0}^{m} \frac{(l-1+m-i)!}{(m-i)!} t^i.$$

Подставляя значение полинома $R_{r-s}(|x|^2)$ в (8), найдем:

$$u_0(x) = \left(|x|^2-1\right)^l \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Delta^r Q_m(x)}{4^{r+l}} P_r\left(|x|^2\right), \tag{9}$$

где обозначено

$$P_r(|x|^2) = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)|x|^{2s}}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}\sum_{i=0}^{r-s}\frac{(l-1+r-s-i)!}{(r-s-i)!}|x|^{2i}.$$

Теперь преобразуем полином $P_r(|x|^2)$. Имеем:

$$P_r(|x|^2) = \frac{1}{(l-1)!}\sum_{s=0}^{r}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}\sum_{i=0}^{r-s}\frac{(l-1+i)!}{i!}|x|^{2r-2i} =$$

$$= \frac{1}{(l-1)!}\sum_{i=0}^{r}\frac{(l-1+i)!}{i!}\sum_{s=0}^{r-i}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}|x|^{2r-2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r}\frac{(l-1+r-i)!}{(l-1)!(r-i)!}|x|^{2i}\sum_{s=0}^{i}\frac{(-1)^s(m-2r+2s+n/2-1)}{s!(m-2r+s+n/2-1)_{r+l+1}(l+r-s)!}.$$

Заменяя r на s и s на j получим:

$$P_s(|x|^2) = \sum_{i=0}^{s}\binom{l-1+s-i}{l-1}|x|^{2i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{m-2s+2j+n/2-1}{j!(m-2s+j+n/2-1)_{s+l+1}(l+s-j)!}.$$

Подставляя полученное значение $P_s(|x|^2)$ в (9) получим (7). □

Еще немного преобразуем полученное решение $u_0(x)$.

Теорема 1. *Решение однородной задачи Дирихле* (1) *при* $Q(x) = Q_m(x)$ *записывается в виде*

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l-1}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}. \quad (10)$$

Доказательство. Воспользуемся леммой 4 для записи решения $u_0(x)$ задачи (1) при $Q(x) = Q_m(x)$. В формуле (7) обозначим константу

$$A_{s,i} = \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\frac{A_s+2j-1}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}},$$

где $A_s = m-2s+n/2$, и преобразуем ее к более простому виду. Для этого воспользуемся формулой замечания 1 из работы [6], в которой было сделано предположение о виде решения $u_0(x)$. Из нее следует, что

$$A_{s,i} = (-1)^i\frac{(l+s-i)_i}{i!(l+s)!(A_s+i)_{s+l}}. \quad (11)$$

Докажем эту формулу методом математической индукции. Пусть $i=0$. Тогда

$$A_{s,0} = \sum_{j=0}^{0}(-1)^j\frac{A_s+2j-1}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}} = \frac{A_s-1}{(l+s)!(A_s-1)_{s+l+1}} = \frac{(l+s)_0}{(l+s)!(A_s)_{s+l}},$$

и, значит, формула (11) верна при $i=0$. Пусть формула (11) верна при некотором $i\in\mathbb{N}_0$. Докажем ее верность и при $i+1$. Используя предположение индукции, найдем:

$$A_{s,i+1} = \sum_{j=0}^{i+1}\frac{(-1)^j(A_s+2j-1)}{j!(l+s-j)!(A_s+j-1)_{s+l+1}} = A_{s,i} + \frac{(-1)^{i+1}(A_s+2i+1)}{(i+1)!(l+s-i-1)!(A_s+i)_{s+l+1}} =$$

$$\underset{\text{инд.}}{=} \frac{(-1)^i(l+s-i)_i}{i!(l+s)!(A_s+i)_{s+l}} + \frac{(-1)^{i+1}(A_s+2i+1)}{(i+1)!(l+s-i-1)!(A_s+i)_{s+l+1}} =$$

$$= (-1)^{i+1}\frac{(A_s+2i+1)(l+s)-(A_s+i+s+l)(i+1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} =$$

$$= (-1)^{i+1}\frac{(A_s+i)(l+s)-(A_s+i)(i+1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} = \frac{(-1)^{i+1}(A_s+i)(l+s-i-1)}{(A_s+i)_{s+l+1}(l+s-i-1)!(i+1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{i+1}(l+s-i-1)}{(A_s+i+1)_{s+l}(l+s-i-1)!(i+1)!} = (-1)^{i+1}\frac{(l+s-i-1)_{i+1}}{(i+1)!(l+s)!(A_s+i+1)_{s+l}},$$

т. е. формула (11) верна и при $i+1$. Подставляя значение $A_{s,i}$ из (11) в формулу (7) и учитывая, что

$$\binom{l-1+s-i}{l-1}\frac{(l+s-i)_i}{i!} = \frac{(l-1+s)!}{(l-1)!s!}\,\frac{s!}{i!(s-i)!} = \binom{l-1+s}{l-1}\binom{s}{i}$$

и $A_s = m-2s+n/2$, и заменяя индекс i на k, получим:

$$u_0(x) = (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(l+s)!}\sum_{i=0}^{s}(-1)^i|x|^{2i}\binom{l-1+s-i}{l-1}\frac{(l+s-i)_i}{i!(A_s+i)_{s+l}} =$$
$$= (|x|^2-1)^l\sum_{s=0}^{\infty}\binom{s+l-1}{l-1}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{4^{s+l}(s+l)!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{|x|^{2k}}{(m-2s+k+n/2)_{s+l}}.$$

Теорема доказана. □

Из полученной формулы (10) при $l = 1, 2$ следуют формулы (23) и (17) из работ [5, 6] соответственно. Пусть функция $v(x)$, заданная в $\overline{S}$, может быть записана в виде $v_0(x) = (|x|^2-1)^l S(x)$, где $S(x) \in C^{l-1}(\overline{S})$ и $l \in \mathbb{N}$. Тогда она удовлетворяет однородным условиям Дирихле на ∂S: $v_{|\partial S} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial \nu}_{|\partial S} = 0, \ldots, \frac{\partial^{l-1} v}{\partial \nu^{l-1}}_{|\partial S} = 0$. На основании этого утверждения полином $u_0(x)$ из теоремы 1 удовлетворяет всем однородным условиям Дирихле из (1). Еще немного преобразуем многочлен $u_0(x)$, являющийся решением задачи Дирихле (1) при $Q(x) = Q_m(x)$ так, чтобы затем иметь возможность получить формулу для неоднородного полинома $Q(x)$.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t|x|^2)^s(1-t)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt. \tag{12}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (10), запишем:

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Delta^s Q_m(x)}{2^s(2s+2l)!!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+l-1)}{(A-2s+k)_{s+l}}\,|x|^{2k}, \tag{13}$$

где $A = m+n/2$. Преобразуем внутреннюю сумму в полученном выражении. Используя определение символа Похгаммера $(a)_k$, данное после формулы (1), свойство гамма функции $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ и связь гамма $\Gamma(x)$ и бета $\mathrm{B}(x)$ функций Эйлера можем записать:

$$\frac{1}{(A-2s+k)_{s+l}} = \frac{1}{(A-2s+k)\cdots(A-s+k+l-1)} = \frac{\Gamma(m+n/2-2s+k)}{\Gamma(m+n/2-s+k+l)} =$$
$$= \frac{\mathrm{B}(s+l, m+n/2-2s+k)}{\Gamma(s+l)} = \frac{1}{(s+l-1)!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}t^{m+n/2+k-2s-1}\,dt.$$

С помощью этого равенства запишем внутреннюю сумму в (13) в виде

$$\frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}t^{m+n/2-2s-1}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{s}{k}|x|^{2k}t^k\,dt = \frac{1}{s!}\int_0^1(1-t)^{s+l-1}(1-t|x|^2)^s\,t^{m-2s}t^{n/2-1}\,dt.$$

Следовательно, многочлен $u_0(x)$ можно записать в форме

$$u_0(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(1-t)^{s+l-1}(1-t|x|^2)^s}{(2s+2l)!!(2s)!!}\Delta^s Q_m(tx)t^{n/2-1}\,dt,$$

что совпадает с формулой (12). □

Получим решение задачи Дирихле (1) с неоднородным многочленом $Q(x)$.

Теорема 2. *Решение задачи Дирихле* (1) *можно записать в виде*

$$u(x) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\Delta^s Q(\alpha x)\,\alpha^{n/2-1}\,d\alpha. \tag{14}$$

Замечание. *Функцию (оператор) Грина задачи Дирихле* (1) *в единичном шаре в случае полиномиальных функций* $Q(x)$ *можно записать в виде*

$$G_l[Q](x;\alpha) = \frac{(|x|^2-1)^l}{2(2l-2)!!}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha|x|^2)^s(1-\alpha)^{s+l-1}}{(2s)!!(2s+2l)!!}\,\alpha^{n/2-1}(\Delta^s Q)(\alpha x)$$

и тогда решение (14) *задачи Дирихле в шаре* (1) *имеет вид*

$$u_l(x) = \int_0^1 G_l[Q](x;\alpha)\,d\alpha. \tag{15}$$

Теорема 3. *Формула* (15) *при* $l=1$ *совпадает с представлением решения однородной задачи Дирихле в единичном шаре через функцию Грина* $G(x,\xi)$

$$u_1(x) = \int_0^1 G[Q](x;\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{\omega_n}\int_S G(x,\xi)Q(\xi)\,d\xi,$$

где $G(x,\xi)=E(x,\xi)-E(x/|x|,\xi|x|)$, $E(x,\xi)=(n-2)^{-1}|x-\xi|^{2-n}$ *— элементарное решение уравнения Лапласа, а* ω_n *— площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $Q(x)=|x|^{2k}H_s^{(i)}(x)$, где $H_s^{(i)}(x)$ — один из полиномов ортогональной системы гармонических полиномов [10] с нормировкой $\int_{\partial S}(H_s^{(i)}(x))^2 ds=\omega_n$. Из леммы 2 следует, что

$$\int_0^1 G\big[|x|^{2k}H_s^{(i)}(x)\big](x;\alpha)\,d\alpha = \frac{|x|^{2k+2}-1}{(2k+2)(2k+2s+n)}H_s^{(i)}(x). \tag{16}$$

В [5, теорема 13] было показано, что

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S E(x,\xi)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi = \frac{|x|^{2k+2}H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)} - \frac{H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2s+n-2)}.$$

Далее, поскольку при $|x|<|\xi|$ справедливо представление (см. [5, лемма 11])

$$E(x,\xi) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{|\xi|^{-(2s+n-2)}}{2s+n-2}\sum_{i=1}^{h_s}H_s^{(i)}(x)H_s^{(i)}(\xi),$$

где $h_s=\dfrac{2s+n-2}{n-2}\binom{s+n-3}{n-3}$ [9], то в силу равномерной сходимости ряда по $|\xi|<1$ и ортогональности полиномов $H_s^{(i)}(x)$ на единичной сфере имеем:

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1}E(x/|x|,\xi|x|)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{|x/|x||^{-(2m+n-2)}}{2m+n-2}\sum_{j=1}^{h_m}H_m^{(j)}(x/|x|)\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|<1}H_m^{(j)}(\xi|x|)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+n-2}\sum_{i=1}^{h_m}H_m^{(j)}(x)\int_0^1 r^{2k+m+s+n-1}\,dr\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}H_m^{(j)}(\xi)H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi =$$
$$= \frac{H_s^{(i)}(x)}{(2s+n-2)(2k+2s+n)}.$$

Таким образом, в силу (16)

$$-\frac{1}{\omega_n}\int_S G(x,\xi)|\xi|^{2k}H_s^{(i)}(\xi)\,d\xi = \frac{|x|^{2k+2}H_s^{(i)}(x)}{(2k+2)(2k+2s+n)} - \frac{H_s^{(i)}(x)}{2s+n-2}\Big(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2s+n}\Big) =$$

$$= \frac{|x|^{2k+2}-1}{(2k+2)(2k+2s+n)} H_s^{(i)}(x) = \int_0^1 G\big[|x|^{2k} H_s^{(i)}(x)\big](x;\alpha)\, d\alpha.$$

Поскольку любой полином $Q(x)$ в силу формулы Альманси может быть разложен по полиномам вида $|x|^{2k} H_s^{(i)}(x)$, то теорема доказана. □

Библиографический список

1. *Nicolescu N.* Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire // Studia Math. 1958. Vol. 16. P. 353–363.
2. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 441–445.
3. *Кангужин Б. Е., Кошанов Б. Д.* Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Матем. журн. 2008. Т. 8, № 1(27). С. 50–58.
4. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 4. С. 61–74.
5. *Карачик В. В.* Построение полиномиальных решений некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 9. С. 1674–1694.
6. *Карачик В. В., Антропова Н. А.* Полиномиальные решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 250–254.
7. *Карачик В. В.* Об одном разложении типа Альманси // Матем. заметки. 2008. Т. 83, № 3. С. 370–380.
8. *Карачик В. В.* Применение формулы Альманси к построению полиномиальных решений задачи Дирихле для уравнения второго порядка // Изв. вузов. Матем. 2012. Т. 6. С. 24–35.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М. : Наука, 1966.
10. *Karachik V. V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. Vol. 126, № 12. P. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9.

Green Function of the Dirichlet Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation in a Ball Under Polynomial Data

V. V. Karachik

South Ural State University, 76, pr. Lenina, Chelyabinsk, 454080, Russia, karachik@susu.ru

The classical Dirichlet boundary value problem for the polyharmonic equation in the unit ball is considered. For this problem with polynomial right-hand side and zero boundary data a polynomial solution is constructed. Our approach is based on the Almansi representation of polyharmonic functions and on the previously obtained an explicit representation of the harmonic components, expressed through the given polyharmonic function. In the case of the harmonic equation the known representation of the solution through the Green function is obtained.

Key words: Polyharmonic equation, polyharmonic polynomials, Dirichlet problem.

References

1. Nicolescu N. Probléme de l'analyticité par rapport á un opérateur linéaire. *Studia Math.*, 1958, vol. 16, pp. 353–363.
2. Kal'menov T. S., Suragan D. On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 3. pp. 441–445. DOI: 10.1134/S0012266112030160.
3. Kanguzhin B. E., Koshanov B. D. The Green function representation and properties in the Dirichlet problem for polyharmonic equations. *Math. J.*, 2008, vol. 8, no. 1. pp. 50–58.
4. Karachik V. V. On Solvability Conditions for the Neumann Problem for a Polyharmonic Equation in the Unit Ball. *J. Appl. Industr. Math.*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 1–14. DOI: 10.1134/S1990478914010074.
5. Karachik V. V. Construction of polynomial solutions to some boundary value problems for Poisson's equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1567–1587. DOI: 10.1134/s0965542511090120.
6. Karachik V. V., Antropova N. A. Polynomial Solutions of the Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation in the Ball. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 251–256. DOI: 10.1134/S0012266113020122.
7. Karachik V. V. On an expansion of Almansi type. *Math. Notes*, 2008, vol. 83, no. 3–4, pp. 335–344. DOI: 10.1134/S000143460803005X.
8. Karachik V. V. Application of the Almansi formula for

constructing polynomial solutions to the Dirichlet problem for a second-order equation. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 6, pp. 20–29. DOI: 10.3103/S1066369X12060035.
9. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. Vol. 2. New York, McGraw-Hill, 1953.
10. Karachik V. V. On one set of orthogonal harmonic polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, vol. 126, no 12, pp. 3513–3519. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-05019-9.

УДК 517.984

БАЗИСЫ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С РАЗРЫВНЫМИ ЯДРАМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ИНВОЛЮЦИЮ

В. П. Курдюмов[1], А. П. Хромов[2]

[1]Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KurdyumovVP@yandex.ru
[2]Доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

При предположении существования обратного к интегральному оператору, ядро которого терпит разрывы на диагоналях единичного квадрата, доказана базисность Рисса его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2[0,1]$.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, краевое условие.

В данной работе исследуется вопрос о базисности Рисса в $L_2[0,1]$ собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) интегрального оператора:

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \int\limits_{1-x}^1 A_2(1-x,t)f(t)\,dt, \tag{1}$$

где $\alpha^2 \ne 1$, $A_i(x,t) (i=1,2)$ имеют непрерывные производные:

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t) \qquad (0 \le k+l \le 2, \quad l \le 1)$$

при $x \ge t$ для $A_1(x,t)$, при $x \le t$ для $A_2(x,t)$, и $A_1(x,x-0) = A_2(x,x+0) = 1$. Таким образом, ядро оператора A терпит разрыв на диагоналях $t = x$ и $t = 1-x$.

Оператор (1) и более общего вида интегральные операторы с ядрами, допускающими разрывы самих ядер или некоторых их производных впервые рассматривались одним из авторов [1]. В дальнейшем таким операторам было уделено много внимания (см., напр., [2–4]).

В [5] для решения вопроса о базисности Рисса с. п. ф. оператора (1) было проведено сведение этого оператора к оператору $\tilde A$ в пространстве вектор-функций размерности 2 и установлена базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) при дополнительном предположении существования оператора $\tilde A^{-1}$. В настоящей работе базисность Рисса с. п. ф. оператора (1) устанавливается лишь при предположении существования обратного к оператору (1),что упрощает доказательство основного результата.

1. СВЕДЕНИЕ К ОПЕРАТОРАМ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Сведем оператор A к оператору в пространстве вектор-функции размерности 2. Введем следующий оператор:

$$\tilde A \tilde f = (\tilde A \tilde f)(x) = \tilde A \tilde f(x) = \int\limits_0^1 \tilde A(x,t)\tilde f(t)\,dt,$$

где $\tilde f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ (T — знак транспонирования),

$$\tilde A(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha\varepsilon(x,t)A_1(x,t) & \varepsilon(x,t)A_2(1-x,1-t) \\ \varepsilon(t,x)A_2(x,t) & \alpha\varepsilon(t,x)A_1(1-x,1-t) \end{pmatrix},$$

$\varepsilon(x,t) \equiv 1$ при $x \ge t$, $\varepsilon(x,t) = 0$ при $x < t$.